数理解析研究所講究録
第2014巻 2017年 184-191

二重ゼータ関数の特徴付け

池田創一 (芝浦工業大学)、松岡謙晶 (名古屋大学)

1. 序

kを正の整数とする。$s=\sigma+it, s_1=\sigma_1+it_1,\ldots,s_k=\sigma+it_k$を複素数とする。Euler-Zagier型の$k$重ゼータ関数を次のように定義する。

$$\zeta_k(s_1,\ldots,s_k)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^{s_1}}\sum_{n_2=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{n_2^{s_2}}\cdots\sum_{n_k=n_{k-1}+1}^{\infty}\frac{1}{n_k^{s_k}}$$

ただし、絶対収束性のために$\sigma_1,\ldots,\sigma_k>1$としておく。よく知られているように、Euler-Zagier型の多重ゼータ関数は一部の特異点をのぞいて解析接続されることが知られている（[1]を参照)。いわゆる多重ゼータ値（つまり$s_1,\ldots,s_k$が正の整数の場合）は様々な数学と関連していることが分かり、現在も活発に研究が進められているが、Euler-Zagier型の多重ゼータ関数を複素関数と見たときの解析的な性質を調べる研究も最近になり行われている。多重ゼータ値は様々な数学と関連しているということから、前者の多重ゼータ値の研究の動機としてはいくつかの動機付けが考えられるが、後者の解析的な性質を調べる研究の動機についてもいくつか挙げる事が出来る。まず、最初に挙げる動機としては、「Euler-Zagier型の多重ゼータ関数の性質を調べる事で、リーマンゼータ関数の性質を調べることが出来るかもしれない」という研究の動機である。つまり、リーマンゼータ関数の臨界線上の平均値を計算する上で、Euler-Zagier型の2重ゼータ関数が重要であったことを思い出すと、一般のEuler-Zagier型の多重ゼータ関数の性質を研究する事でリーマンゼータ関数の性質を深く研究できるかもしれない、ということである。ほかにも、いくつかの動機は考えられるが、リーマンゼータ関数の性質を理解するため、もしくは、最終的には「ゼータ関数」とは何かを多変数複素関数の視点から考察するためということも研究の動機として挙げる事が出来るのではないかと思う。

2. 主定理

さて、前章で最後に述べた事と関わるが、Euler-Zagier型の多重ゼータ関数が、リーマンゼータ関数が満たす性質、つまり「ゼータ関数」としての性質を満たしているかを考えてみよう。

リーマンゼータ関数の性質として次にあげるリーマンゼータ関数の関数等式が知られている（例えば [4] などを参照)。

(1) $$\zeta(s)=\chi(s)\zeta(1-s)$$

ここで

$$\chi(s)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

であり $\Gamma(s)$ はガンマ関数である。リーマンゼータ関数の臨界帯上での解析的な挙動を調べる上でリーマンゼータ関数の関数等式は必要不可欠なものであるので、リーマンゼータ関数の関数等式が重要であることは言うまでもない。さらに、リーマンゼータ関数の関数等式の重要性を端的に物語る定理として、次にあげる Hamburger の定理という定理が知られている（例えば [4] などを参照)。

Hamburger の定理
$G(s)$ を位数有限の整関数、 $P(s)$ を多項式とし、$f(s)=G(s)/P(s)$ とする。また、

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

と表すことが出来るものとし、右辺は $\sigma>1$ で絶対収束するものとする。$\alpha>0$ とする。

$$g(1-s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{1-s}}$$

と表すことが出来るものとし、右辺は $\sigma<-\alpha$ で絶対収束するものとする。このとき、C を定数とすれば $f(s)=C\zeta(s)$ と書く事が出来る。

この定理はどのようなことを主張している定理なのかを考えてみると、いくつかの条件（$G(s)$ が位数有限とか $f(s)$ の絶対収束性など）はあるが、端的に言えば、「未知関数においてリーマンゼータ関数の関数等式の形を仮定すれば、未知関数は本質的にリーマンゼータ関数に決まってしまう」ということを主張する定理であると言える。つまり、この定理はある意味でリーマンゼータ関数の特徴付けを与えた定理とみなすことが出来る。

Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数について考えてみよう。Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数には次の関数関係式が松本 [3] により得られている。

$$g(s_1,s_2)=\zeta_2(s_1,s_2)-\frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(s_2)}\Gamma(s_1+s_2-1)\zeta(s_1+s_2-1)$$

とする。ただし、

$$\Psi(a,c;x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty e^{i\phi}} e^{-xy}y^{a-1}(1+y)^{c-a-1}dy$$

は合流型超幾何関数であり、$\Re a>0$, $-\pi<\phi<\pi$, $|\phi+\arg x|<\pi/2$ を満たすものとする。$\sigma_l(k)=\sum_{d|k}d^l$ とおく。

松本の式

(2)

$$\frac{g(s_1,s_2)}{(2\pi)^{s_1+s_2-1}\Gamma(1-s_1)}=\frac{g(1-s_2,1-s_1)}{i^{s_1+s_2-1}\Gamma(s_2)}+2i\sin\left(\frac{\pi}{2}(s_1+s_2-1)\right)F_+(s_1,s_2)$$

が成り立つ。ここで $i=\sqrt{-1}=\exp(\pi i/2)$ であり、 $F_+(u,v)$ は次のような級数である。

(3) $$F_+(u,v)=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{u+v-1}(k)\Psi(v,u+v;2\pi ik)$$

(3) の右辺は $\Re u<0$, $\Re v>1$ で収束するが、$F_+(u,v)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の有理型関数に解析接続することが出来る。

この松本の式についてであるが、(2) の右辺の合流型超幾何関数の部分をのぞいて考えると、s_1 と $1-s_2$ についての興味深い関係が見えてくるように思う（合流型超幾何関数の部分についても興味深い式が成り立つ。詳細は松本 [3] を参照)。したがって、この式を Euler-Zagier 型の２重ゼータ関数の「関数等式」とみなしてもいいと考える事が出来る（しかし、様々なゼータ関数における関数等式と比べると、少し違った趣を持つ式なのではないかとも思える。この点については、(2) の右辺の合流型超幾何関数の部分をどのように捉えるかという問題とも言えるが)。

どのような関数をゼータ関数と名付けてよいかについてであるが、個人的な意見を述べると「ゼータ関数」は関数等式を持っている必要があると思うので、松本の式を Euler-Zagier 型の２重ゼータ関数の関数等式と考えると、ある意味で Euler-Zagier 型の２重ゼータ関数はゼータ関数の性質である「関数等式を持つ」という性質を備えていることになる。我々は、松本の式から Euler-Zagier 型の２重ゼータ関数を復元する事、つまり Hamburger の定理の二重ゼータ関数類似とも言えることを示そうと考えた。まず、我々が考えた事は、リーマンゼータ関数が１変数関数だったのに対して、２重ゼータ関数は２変数関数なので、松本の式だけで特徴付けを与えるのは難しいということである。なので、２重ゼータ関数で成り立つ調和積公式

(4) $$\zeta_2(s_1,s_2)+\zeta_2(s_2,s_1)=\zeta(s_1)\zeta(s_2)-\zeta(s_1+s_2)$$

と松本の式の二つを仮定して、２重ゼータ関数の特徴付けを与えようと試みた。以下が我々の主定理である。

主定理
$G(s)$ を位数有限の整関数、 $P(s)$ を多項式とし、$f(s)=G(s)/P(s)$ とする。また、

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

と表すことが出来るものとし、右辺は $\sigma>1$ で絶対収束するものとする。 $f_2(s_1,s_2)$ を $\mathbb{C}^2$ 上の有理型値関数とし、

$$f_2(s_1,s_2)+f_2(s_2,s_1)=f(s_1)f(s_2)-f(s_1+s_2) \tag{5}$$

を満たすものとする。次の関係式

(6)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^{s_1+s_2-1}\Gamma(1-s_1)}\left(f_2(s_1,s_2)-\frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(s_2)}\Gamma(s_1+s_2-1)f(s_1+s_2-1)\right)\\&\quad=\frac{1}{i^{s_1+s_2-1}\Gamma(s_2)}\left(f_2(1-s_2,1-s_1)-\frac{\Gamma(s_2)}{\Gamma(1-s_1)}\Gamma(1-s_1-s_2)f(1-s_1-s_2)\right)+\\&\qquad+2i\sin\left(\frac{\pi}{2}(s_1+s_2-1)\right)F_+(s_1,s_2)\end{aligned}$$

が $\mathbb{C}^2$ 上で成り立つとする。 $f(2)=-2\pi^2 f(-1)$ および

$$\lim_{s\to-2}\Gamma(s)f(s)=-\frac{f(3)}{8\pi^2}=-\frac{\zeta(3)}{8\pi^2} \tag{7}$$

が成り立つものとする。さらに、次の (a) もしくは (b) が成り立つものとする。

(a) 領域 $D=\{s\in\mathbb{C}\mid 2\le\sigma\le 4\}$ において、$\zeta(1-s)\ll|f(1-s)|$ および $|\{s\in D\mid f(1-s)=0\}|\le 1$ が成り立つ。

(b) 次の極限値 $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在する。

$$c=\lim_{s\to+\infty}\chi(s)f(1-s)$$

ここで $s\in\mathbb{R}$ とする。このときに、$f(s)=\zeta(s)$ および $f_2(s_1,s_2)=\zeta_2(s_1,s_2)$ が成り立つ。

我々の定理は元の Hamburger の定理とは違って、Riemann ゼータ関数と二重ゼータ関数の両方を同時に特徴づけるものである。次のページから証明および証明に必要な補題を述べていく。

3. 主定理の証明

証明の為に補題を用意する。補題の証明は省略する。

Lemma 1. f と g を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数とし、f と g は

$$f(s)f(1-s) = g(s)g(1-s) = 1$$

および

$$f(s)f(k-s) = g(s)g(k-s)$$

を満たすとする。ただし、$k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ とする。$f(s)/g(s)$ が $D = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma_0 \leq \Re s \leq \sigma_0 + |k-1|\}$ で有界となるような $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ が存在するならば、$f(s) = \pm g(s)$ である。

Lemma 2. $T > 0$ とする。 $h(s)$ を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数とし $r(s) := h(s)/h(1-s)$ とする。 $r(s+T) = r(s)$ が $s \in \mathbb{C}$ で成り立つとする。次の極限値

$$\lim_{s \to +\infty, s \in \mathbb{R}} h(s)$$

および

$$\lim_{s \to +\infty, s \in \mathbb{R}} h(1-s) \neq 0$$

が存在するならば、 $r(s) = 1$ が全ての $s \in \mathbb{C}$ で成り立つ。

Lemma 3. $g(s_1, s_2)$ を $\mathbb{C}^2$ 上の有理型関数とする。

$$g(s_1, s_2) + g(s_2, s_1) = \zeta(s_1)\zeta(s_2) - \zeta(s_1 + s_2)$$

を満たす関数 g は

$$g(s_1, s_2) = \zeta_2(s_1, s_2) + \varphi(s_1, s_2)$$

と書く事ができる。ここで、$\varphi(s_1, s_2)$ は有理型の関数で $\varphi(s_2, s_1) = -\varphi(s_1, s_2)$ を満たすものである。

以下では、主定理の証明を行う。

Proof. $C(s_1, s_2) = \Gamma(s_2)/\Gamma(1-s_1)$ とおく。$s_1 + s_2 = 3$ のときは

$$C(s_1, s_2) = \frac{\Gamma(3-s_1)}{\Gamma(1-s_1)} = (s_1-1)(s_1-2)$$

が成り立つ。この関係式から、$s_1+s_2 = 3$ のときは $C(s_2, s_1) = C(s_1, s_2)$ が成り立つことがわかる。 一方で、$\chi(s)$ の定義から $\chi(s)\chi(3-s) = -4\pi^2((s-1)(s-2))^{-1}$ であることがわかる。 したがって、$s_1 + s_2 = 3$ のときは, $\chi(s_1)\chi(s_2) = -4\pi^2(C(s_1, s_2))^{-1}$ が成り立つことがわかる。以下では、$s_1 + s_2 = 3$ とする。 (2) を用いると

$$-\frac{1}{4\pi^2}C(s_1, s_2)(f_2(s_1, s_2) - C(s_1, s_2)^{-1}f(2)) = f_2(1-s_2, 1-s_1) + C(s_1, s_2)\frac{f(3)}{8\pi^2}$$

である。また、この式において s_1 を s_2 にすると、

$$-\frac{1}{4\pi^2}C(s_1,s_2)(f_2(s_2,s_1)-C(s_1,s_2)^{-1}f(2)) = f_2(1-s_1,1-s_2)+C(s_1,s_2)\frac{f(3)}{8\pi^2}$$

であることがわかる。これら二つの式と (5) を使うと

$$-\frac{1}{4\pi^2}C(s_1,s_2)(f(s_1)f(s_2)-f(3)-2f(2)C(s_1,s_2)^{-1}) = f(1-s_1)f(1-s_2)-f(-1)+2C(s_1,s_2)\frac{f(3)}{8\pi^2}$$

である。したがって、$f(2)=-2\pi^2 f(-1)$ と (7) を使うと、

$$\begin{aligned} f(s_1)f(3-s_1) &= -4\pi^2(C(s_1,s_2))^{-1}f(1-s_1)f(s_1-2) \\ &= \chi(s_1)\chi(3-s_1)f(1-s_1)f(s_1-2) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。$K(s)=f(s)/f(1-s)$ とすると $K(s)K(1-s)=1$ がなりたつことがわかり、また (8) を用いると

$$\chi(s)\chi(3-s) = \frac{f(s)f(3-s)}{f(1-s)f(s-2)} = K(s)K(3-s) \tag{9}$$

が成り立つ。一方で、$r(s)=K(s)/\chi(s)$ および $h(s)=f(s)/\zeta(s)$ とおくと $r(s)$ の定義から

$$r(s) = \frac{f(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{\zeta(1-s)}{f(1-s)} \tag{10}$$

が成り立つ。また、(9) と $r(s)$ の定義から

$$r(s) = \frac{\chi(3-s)}{K(3-s)} = r(s-2) \tag{11}$$

が成り立ち、(1) と $K(s)$ の定義から

$$h(s) = r(s)h(1-s) \tag{12}$$

が成り立つ。

最初に、(a) が成り立つと仮定する。$\sigma \geq 2$ において $\zeta(s) \gg 1$ と $f(s) \ll 1$ が成り立つので、D で $f(s)/\zeta(s)$ は有界である。(a) および (7) を用いると、 $f'(-2) \neq 0$ および D で $f(1-s)=0$ が成り立つのは $s=3$ の時だけである事が分かる。したがって $\zeta(1-s)/f(1-s)$ は D で有界であるから、 (10) を用いると $r(s)$ が D で有界であることがわかる。よって Lemma 1 において $f=K$、$g=\chi$ とすると、$K(s)=\pm\chi(s)$ が成り立つ事が分かり、$K(1/2)=\chi(1/2)=1$ なので $K(s)=\chi(s)$ であることがわかる。なので、Hamburger の定理と (7) を用いると、$f=\zeta$ が成り立つことがわかる。

次に (b) が成り立つと仮定する。

$$h(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}a_d\mu(n/d)}{n^s}$$

が成り立つことに注意する。ここで μ は Möbius 関数である。(b) を用いると、

$$\lim_{s\to+\infty}h(1-s)=\lim_{s\to+\infty}\frac{\chi(s)f(1-s)}{\zeta(s)}=c\neq 0$$

が $s\in\mathbb{R}$ において成り立つことがわかる。(11) および (12) が成り立つので、Lemma 2 を用いると $K(s)=\chi(s)$ となる。よって Hamburger の定理と (7) を用いると $f=\zeta$ となる。

ここまで $s_1+s_2=3$ としてきたが、以降では一般の $s_1,s_2\in\mathbb{C}$ とする。$f=\zeta$ ならば、Lemma 3 を用いる事で,

$$f_2(s_1,s_2)=\zeta_2(s_1,s_2)+\varphi(s_1,s_2)$$

と書く事が出来る。ここで φ は有理型の関数であり、$\varphi(s_2,s_1)=-\varphi(s_1,s_2)$ を満たすものとする。定理の証明のためには、$\varphi=0$ を示せば良い。$f_2=\zeta_2$、$f=\zeta$ が (6) の解であることが松本の定理により分かる。(2)、(6) から

$$\frac{\varphi(s_1,s_2)}{(2\pi)^{s_1+s_2-1}\Gamma(1-s_1)}=\frac{\varphi(1-s_2,1-s_1)}{i^{s_1+s_2-1}\Gamma(s_2)}$$

が成り立つ。$\varphi\neq 0$ であるならば、

$$G(s_1,s_2)=\frac{\varphi(s_1,s_2)}{\varphi(1-s_2,1-s_1)}=\frac{(2\pi)^{s_1+s_2-1}\Gamma(1-s_1)}{i^{s_1+s_2-1}\Gamma(s_2)}$$

とすることができて、また

$$G(s_2,s_1)=\frac{-\varphi(s_1,s_2)}{-\varphi(1-s_2,1-s_1)}=G(s_1,s_2)$$

が成り立つことがわかる。この式から

$$\frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(s_2)}=\frac{\Gamma(1-s_2)}{\Gamma(s_1)}$$

が成り立つ事になるから、$\sin\pi s_1=\sin\pi s_2$ が全ての $s_1,s_2\in\mathbb{C}$ で成り立つことになる。しかし、これは不可能なので、$\varphi=0$ となる。 □

4. あとがき

主定理では、調和積、松本の式を仮定したが、さらに、特殊値の仮定等いくつかの仮定をしている。これらは人工的な仮定のようにも思われるので、仮定を取り除く事が望ましいと思う。

池田創一 (芝浦工業大学)、松岡謙晶 (名古屋大学)

References

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, Acta Arith. **98** (2001), 107-116.

[2] S. Ikeda and K. Matsuoka, Double analogue of Hamburger's theorem, Publ. Math. Debrecen **86/1-2**, (2015) 89-98.

[3] K. Matsumoto, Functional equations for double zeta-functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **136** (2004) 1-7.

[4] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, Second Edition, revised and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.