

正規化複シャッフル関係式と川島関係式

慶應義塾大学大学院理工学研究科・KiPAS 山本 修司*

Shuij YAMAMOTO

Keio Institute of Pure and Applied Sciences (KiPAS),
Graduate School of Science and Technology, Keio University

1 序論

多重ゼータ値の間に成り立つ関係式の族は数多く知られている。中でも、すべての代数関係式を生成すると考えられている大きな族として次の三つがある：

- アソシエーター関係式,
- 正規化複シャッフル関係式,
- 川島関係式+シャッフル関係式.

これらが本当にすべての関係式を導くことを証明するのは、多重ゼータ値の独立性の問題も関わるため非常に困難であろう。しかし、もしこれらがそれぞれ実際にすべての関係式を生成するならば、特にそのうちの一つから他の二つを導くことができるはずであり、そのような同値性を示すことはより現実的に手の届く問題と思われる。実際、古庄 [2] はアソシエーター関係式が正規化複シャッフル関係式を導くことを示した。

最近、著者は金子昌信氏との共同研究 [3] において

$$\text{正規化複シャッフル関係式} + \text{双対関係式} \implies \text{川島関係式} \quad (1.1)$$

* This work was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP24224001, JP23340010, JP26247004, JP16H06336, as well as JSPS Joint Research Project with CNRS “Zeta functions of several variables and applications,” JSPS Core-to-Core program “Foundation of a Global Research Cooperative Center in Mathematics focused on Number Theory and Geometry” and the KiPAS program 2013–2018 of the Faculty of Science and Technology at Keio University.

なる包含を得た。ここから、上述の古庄氏の結果と合わせて

$$\text{アソシエーター関係式} \implies \text{川島関係式}$$

も分かる。本稿では、この包含関係 (1.1) の証明を解説する。

2 正規化複シャッフル関係式

記号の導入をかねて、複シャッフル関係式と正規化について復習する。詳しくは荒川・金子 [1] を参照されたい。

収束インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対する多重ゼータ値を

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

で定める (したがって収束条件は $k_r > 1$ である)。

全てのインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$, $r \geq 0$ が生成するベクトル空間 $\mathfrak{H}^1 = \sum_{\mathbf{k}} \mathbb{Q} \cdot \mathbf{k}$ と、収束インデックスで生成される部分空間 $\mathfrak{H}^0 = \sum_{\mathbf{k}: \text{収束}} \mathbb{Q} \cdot \mathbf{k}$ を考える。よく知られているように、 \mathfrak{H}^1 には調和積 $*$ およびシャッフル積 \sharp という二通りの積によって可換 \mathbb{Q} 代数の構造が入る (これらをそれぞれ \mathfrak{H}_*^1 , \mathfrak{H}_{\sharp}^1 で表す)。また \mathfrak{H}^0 はどちらの積についても部分代数であり、多重ゼータ値を \mathbb{Q} 線型に拡張した写像 $\zeta: \mathfrak{H}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ は二つの積を保つ:

$$\zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} \sharp \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}). \quad (2.1)$$

これを有限複シャッフル関係式という。

さらに、 $\bullet = *, \sharp$ のそれぞれについて $\mathfrak{H}_{\bullet}^1 \cong \mathfrak{H}_{\bullet}^0[[1]]$ となることから、上の写像 ζ を拡張した \mathbb{Q} 準同型

$$\zeta_{\bullet}: \mathfrak{H}_{\bullet}^1 \rightarrow \mathbb{R}[[T]]$$

が $\zeta_{\bullet}(1) = T$ により一意的に定まる。こうして得られた ζ_* および ζ_{\sharp} をそれぞれ調和正規化、シャッフル正規化という。この二つの写像の関係を与えるのが次の正規化定理である。

定理 2.1. \mathbb{R} 線型写像 $\rho: \mathbb{R}[[T]] \rightarrow \mathbb{R}[[T]]$ を、 $\mathbb{R}[[T]][[u]]$ における等式

$$\rho(e^{Tu}) \left(:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(T^n)}{n!} u^n \right) = A(u)e^{Tu}, \quad A(u) := \exp \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) u^n \right)$$

によって定義する。このとき

$$\zeta_{\text{III}} = \rho \circ \zeta_* \quad (2.2)$$

が成り立つ。

定義 2.2. 有限複シャッフル関係式 (2.1) と正規化定理 (2.2) とをまとめて多重ゼータ値の関係式族と見なし、これを正規化複シャッフル関係式と呼ぶ。

注意 2.3. 上に定義した意味での正規化複シャッフル関係式から、

$$\zeta_*(v * w - v \text{III} w) = \zeta_{\text{III}}(v * w - v \text{III} w) = 0 \quad (v \in \mathfrak{H}^0, w \in \mathfrak{H}^1)$$

なる線型関係式が得られる (これを正規化複シャッフル関係式と呼ぶこともある)。なお、この線型関係式族とシャッフル (または調和) 関係式とを合わせたものは、上の意味の正規化複シャッフル関係式と同値である。

あとの議論のために、多重ゼータスター値

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \sum_{0 < m_1 \leq \dots \leq m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

に関連する記号もまとめておく。定義から分かるように、 $\zeta^*(\mathbf{k})$ は多重ゼータ値の有限和として

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p} \preceq \mathbf{k}} \zeta(\mathbf{p})$$

と表される。ここで $\mathbf{p} \preceq \mathbf{k}$ とは、インデックス \mathbf{p} が $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ におけるコンマのいくつかを和に置き換えて得られることを表す。そこで $\mathbf{k}^* := \sum_{\mathbf{p} \preceq \mathbf{k}} \mathbf{p} \in \mathfrak{H}^1$ と定義すると、 \mathbf{k} が収束インデックスならば $\mathbf{k}^* \in \mathfrak{H}^0$ であって $\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}^*)$ が成り立つ。さらに、スター版調和積 $\bar{*}$ を $(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l})^* = (\mathbf{k}^*) * (\mathbf{l}^*)$ で定義すれば、

$$\zeta^*(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}) = \zeta^*(\mathbf{k}) \zeta^*(\mathbf{l})$$

なる関係が成り立つ。

3 川島関係式

この節では川島関係式の主張を述べる。まず川島関数を導入しよう。 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ を空でないインデックスとし、 $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$s_{\mathbf{k}}^*(N) = \sum_{0 < a_1 \leq \dots \leq a_r = N} \frac{1}{a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}}, \quad \zeta_N^*(\mathbf{k}) = \sum_{0 < a_1 \leq \dots \leq a_r \leq N} \frac{1}{a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}}$$

とおく. 川島関数 $F_{\mathbf{k}}(z)$ は, Newton 級数

$$F_{\mathbf{k}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{\mathbf{k}^{\vee}}^*(n) \binom{z}{n} \quad (3.1)$$

として定義される (\mathbf{k}^{\vee} は \mathbf{k} の Hoffman 双対を表す). $F_{\mathbf{k}}(z)$ は補間公式

$$F_{\mathbf{k}}(N) = \zeta_N^*(\mathbf{k}) \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

を満たす唯一の Newton 級数として特徴付けられる.

定理 3.1 (川島 [4, Theorem 5.3]). インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l} \neq \emptyset$ に対して

$$F_{\mathbf{k}}(z)F_{\mathbf{l}}(z) = F_{\mathbf{k} * \mathbf{l}}(z) \quad (3.2)$$

が成り立つ.

注意 3.2. (3.2) の右辺は, 写像 $\mathbf{k} \mapsto F_{\mathbf{k}}(z)$ を線型に拡張することで定義される. 以下では, この種の線型性による定義の拡張をしばしば断りなく用いる.

補間公式により $F_{\mathbf{k}}(0) = \zeta_0^*(\mathbf{k}) = 0$ なので, 川島関数の Taylor 展開を

$$F_{\mathbf{k}}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} A_m(\mathbf{k}) z^m$$

と表すことができる. すると (3.2) は

$$\sum_{i=1}^{m-1} A_i(\mathbf{k}) A_{m-i}(\mathbf{l}) = -A_m(\mathbf{k} * \mathbf{l}) \quad (3.3)$$

と書ける. そこでこれらの係数を多重ゼータ値で表示できれば, 多重ゼータ値の関係式が得られるのである.

命題 3.3 ([4, Proposition 5.2]). $m \geq 1$ に対して

$$A_m(\mathbf{k}) = \zeta\left(\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \otimes (\mathbf{k}^{\vee})^*\right). \quad (3.4)$$

ここで, 右辺に現れる積 \otimes は

$$(k_1, \dots, k_r) \otimes (l_1, \dots, l_s) := ((k_1, \dots, k_{r-1}) * (l_1, \dots, l_{s-1}), k_r + l_s)$$

で定義される.

定義 3.4. 等式 (3.3) に (3.4) の表示を代入して得られる多重ゼータ値の関係式を川島関係式という.

4 積分級数等式

川島関係式を言い換えるために、次の等式を用いる。

定理 4.1 ([3, Theorem 4.1]). 空でないインデックス \mathbf{k}, \mathbf{l} に対して

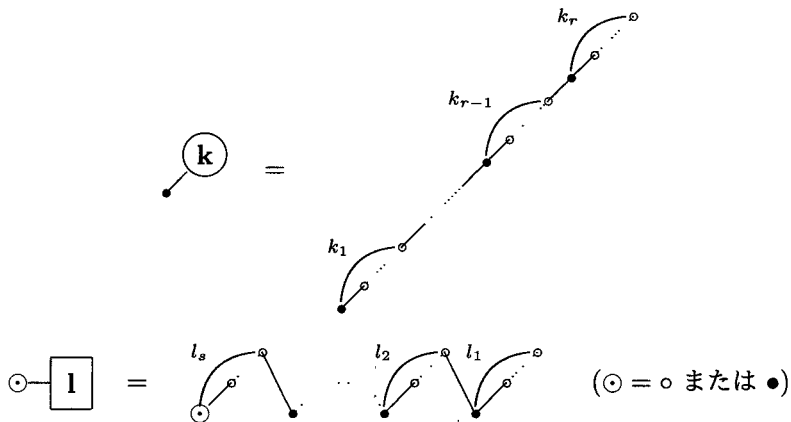
$$\zeta(\mu(\mathbf{k}, \mathbf{l})) = \zeta(\mathbf{k} \oplus \mathbf{l}^*) \tag{4.1}$$

が成り立つ。

ここで用いた記号 $\mu(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ は、 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r), \mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$ に対して

$$\mu(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = W \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with nodes } k_r, l_s, l_{s-1}, \dots, l_1 \text{ and } k_1 \end{array} \right)$$

で定義される \mathfrak{A}^0 の元を表す。右辺の図は \circ と \bullet の2色でラベルづけられた有限ポセットを表す Hasse 図であり、 W はそのような2色ポセットのうち、すべての極小元のラベルが \bullet であるようなものに対して \mathfrak{A}^1 の元を対応させる写像である。詳しくは [5, §2] を参照されたい。ここで



という略記法を導入すると, $\mu(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ は

$$\mu(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = W \left(\begin{array}{c} \text{---} \square \mathbf{l} \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ \bullet \text{---} \mathbf{k} \end{array} \right)$$

と書ける.

注意 4.2. 収束インデックス \mathbf{k} に対し,

$$\zeta \left(W \left(\begin{array}{c} \bullet \text{---} \mathbf{k} \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ \text{---} \square \mathbf{l} \end{array} \right) \right) = \zeta(\mathbf{k}), \quad \zeta \left(W \left(\begin{array}{c} \text{---} \square \mathbf{k} \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \right) \right) = \zeta^*(\mathbf{k}) \quad (4.2)$$

が成り立つ. 第1式はよく知られた多重ゼータ値の反復積分表示に他ならず, 第2式は [5, Corollary 1.3] で与えられた多重ゼータスター値の積分表示である.

等式 (4.1) はこれらの共通の一般化となっている. (4.1) の左辺 $\zeta(\mu(\mathbf{k}, \mathbf{l}))$ は $\mu(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ の定義の図に対応する多重積分で表される. 一方, 右辺は

$$\zeta(\mathbf{k} \otimes \mathbf{l}^*) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r = n_s \geq \dots \geq n_1 > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r} n_1^{l_1} \dots n_s^{l_s}}$$

なる多重級数で表される. そこでこの等式 (4.1) を積分級数等式という.

本稿の目標は正規化複シャッフル関係式と双対関係式から川島関係式を導くことであった. 実は, 積分級数等式は正規化複シャッフル関係式から導くことができる. より正確には次の同値性が成り立つ.

定理 4.3 ([3, Theorem 4.6]). 複シャッフル関係式のもとで, 正規化定理と積分級数等式とは同値である.

川島関数の Taylor 係数の表示 (3.4) に積分級数等式 (4.1) を適用すると,

$$A_m(\mathbf{k}) = \zeta \left(W \left(\begin{array}{c} \text{---} \square \mathbf{k}^\vee \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ \bullet \text{---} m \end{array} \right) \right)$$

となる. さらに双対関係式を用いると, 右辺の図を「ひっくり返す」ことができ

$$A_m(\mathbf{k}) = \zeta \left(W \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} m \\ \diagdown \\ \bullet \text{---} \square \mathbf{k} \end{array} \right) \right) \quad (4.3)$$

なる表示を得る. したがって, 川島関係式を次のように言い換えることができる.

命題 4.4.

$$A'_m(\mathbf{k}) = \zeta \left(W \left(m \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \mathbf{k} \end{array} \right) \right)$$

とおくと,

$$\sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p+q=m}} A'_p(\mathbf{k}) A'_q(\mathbf{l}) = -A'_m(\mathbf{k} * \mathbf{l}) \quad (4.4)$$

が成り立つ.

注意 4.5. 川島関数の積分表示に基づいて Taylor 係数を計算することで, (4.3) を直接証明することも可能である.

5 川島関係式の証明

この節では, 正規化複シャッフル関係式から命題 4.4 を導く方法を説明する.

補題 5.1. インデックス \mathbf{k} および $m \geq 0$ に対して

$$B_m(\mathbf{k}) = \zeta_* \left(W \left(m \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \mathbf{k} \end{array} \right) \right)$$

とおく. このとき

$$\sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ p+q=m}} B_p(\mathbf{k}) B_q(\mathbf{l}) = B_m(\mathbf{k} * \mathbf{l})$$

が成り立つ.

証明. \mathfrak{H}_*^1 における等式として

$$\sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ p+q=m}} W \left(p \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \mathbf{k} \end{array} \right) * W \left(q \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \mathbf{l} \end{array} \right) = W \left(m \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \mathbf{k} * \mathbf{l} \end{array} \right)$$

が成り立つことが, 組合せ的な考察で分かる. この等式に ζ_* を施せば主張を得る. \square

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ に対して $R(\mathbf{k}) = (-1)^r (k_r, \dots, k_1) \in \mathfrak{H}^1$ とおくと, $R(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = R(\mathbf{k}) * R(\mathbf{l})$ が成り立つ. そこで $B'_m(\mathbf{k}) = B_m(R(\mathbf{k}))$ と定義すると, 補題 5.1 は

$$\sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ p+q=m}} B'_p(\mathbf{k}) B'_q(\mathbf{l}) = B'_m(\mathbf{k} * \mathbf{l}) \quad (5.1)$$

と書き換えられる.

補題 5.2. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ および $i = 0, \dots, r$ に対して

$$\mathbf{k}_i = (k_1, \dots, k_i), \quad \mathbf{k}^i = (k_{i+1}, \dots, k_r)$$

とおく (特に $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}^r = \emptyset$ とする). このとき

$$\sum_{i=0}^{r-1} A'_m(\mathbf{k}^i) B'_0(\mathbf{k}_i) + B'_m(\mathbf{k}) = 0 \quad (5.2)$$

が成り立つ.

証明. $A'_m(\mathbf{k}) = A'_m(\mathbf{k}^0) B'_0(\mathbf{k}_0)$ を表すポセットに対し, [5, Proposition 2.3 (1), (2)] を (正確には積分の代わりに \mathfrak{h}^1 への写像 W のもとで) 繰り返し用いると, \mathfrak{h}_m^1 における等式

$$\sum_{i=0}^{r-1} W \left(\begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ m \text{ --- } \bullet \text{ --- } \square \mathbf{k}^i \end{array} \right) \equiv W \left(\begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \bullet \text{ --- } \bigcirc R(\mathbf{k}_i) \end{array} \right) + W \left(\begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ m \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bigcirc R(\mathbf{k}) \end{array} \right) = 0$$

ができる. これの ζ_m をとると

$$\sum_{i=0}^{r-1} A'_m(\mathbf{k}^i) \zeta_m \left(W \left(\begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \bullet \text{ --- } \bigcirc R(\mathbf{k}_i) \end{array} \right) \right) + \zeta_m \left(W \left(\begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ m \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bigcirc R(\mathbf{k}) \end{array} \right) \right) = 0$$

となるので, $A'_m(\mathbf{k}^i) \in \mathbb{R}$ に注意して ρ^{-1} を施せば, 正規化定理 $\rho^{-1} \circ \zeta_m = \zeta_*$ より主張を得る. \square

以上の準備のもとで, 命題 4.4 を証明する. $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s)$ として, r, s に関する帰納法によって等式 (4.4) を示すことにする.

まず補題 5.2 を $\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}$ の各項に適用すると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} A'_m(\mathbf{k}^i \bar{*} \mathbf{l}^j) B'_0(\mathbf{k}_i \bar{*} \mathbf{l}_j) + \sum_{i=0}^{r-1} A'_m(\mathbf{k}^i) B'_0(\mathbf{k}_i \bar{*} \mathbf{l}) \\ + \sum_{j=0}^{s-1} A'_m(\mathbf{l}^j) B'_0(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}_j) + B'_m(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

となることが分かる. 左辺第 2 項は, (5.1) の $m = 0$ の場合と (5.2) とにより

$$\sum_{i=0}^{r-1} A'_m(\mathbf{k}^i) B'_0(\mathbf{k}_i \bar{*} \mathbf{l}) = \sum_{i=0}^{r-1} A'_m(\mathbf{k}^i) B'_0(\mathbf{k}_i) B'_0(\mathbf{l}) = -B'_m(\mathbf{k}) B'_0(\mathbf{l})$$

と書き換えられる．同様に第3項は

$$\sum_{j=0}^{s-1} A'_m(\mathbf{l}^j) B'_0(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}_j) = -B'_0(\mathbf{k}) B'_m(\mathbf{l})$$

となる．これらを第4項

$$B'_m(\mathbf{k} \bar{*} \mathbf{l}) = \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=m}} B'_p(\mathbf{k}) B'_q(\mathbf{l})$$

に加えて，さらに残りの項に (5.2) および (5.1) を適用すると，第2項から第4項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p, q \geq 1 \\ p+q=m}} B'_p(\mathbf{k}) B'_q(\mathbf{l}) &= \sum_{\substack{p, q \geq 1 \\ p+q=m}} \left(\sum_{i=0}^{r-1} A'_p(\mathbf{k}^i) B'_0(\mathbf{k}_i) \right) \left(\sum_{j=0}^{s-1} A'_q(\mathbf{l}^j) B'_0(\mathbf{l}_j) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{\substack{p, q \geq 1 \\ p+q=m}} A'_p(\mathbf{k}^i) A'_q(\mathbf{l}^j) B'_0(\mathbf{k}_i \bar{*} \mathbf{l}_j) \end{aligned}$$

に等しい．したがって，式 (5.3) は

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} \left\{ A'_m(\mathbf{k}^i \bar{*} \mathbf{l}^j) + \sum_{\substack{p, q \geq 1 \\ p+q=m}} A'_p(\mathbf{k}^i) A'_q(\mathbf{l}^j) \right\} B'_0(\mathbf{k}_i \bar{*} \mathbf{l}_j) = 0$$

と書き直せる．ここで帰納法の仮定を使うと， $i > 0$ または $j > 0$ の項については $\{ \}$ の部分が0となり，したがって $i = j = 0$ の項も0になる．これが示すべき主張に他ならない．すなわち命題 4.4 が証明された．

参考文献

- [1] 荒川恒男・金子昌信，多重ゼータ値入門，COE Lecture Note Vol. 23，九州大学，2010.
- [2] Furusho, H., Double shuffle relation for associators, *Ann. Math.*, **174** (2011), 341–360.
- [3] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, preprint, arXiv:1605.03117.

- [4] Kawashima, G., A class of relations among multiple zeta values, *J. Number Theory* **129** (2009), 755–788.
- [5] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, arXiv:1405.6499.