数理解析研究所講究録
第2015巻 2017年 11-21

有限ポリログとエタールポリログ
(関真一朗氏との共同研究)

大阪大学大学院理学研究科　佐久川憲児
Kenji Sakugawa
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

1 諸言

ポリログは数学の様々な場面に登場する 一見して外見の異なるポリログ達の間には, しかしながら類似性や, 単なる類似性にとどまらない具体的な関係が知られている場合がある ([2], [3], [6], [8] 等) 本稿の目的はそのうちの二つ—有限ポリログとエタールポリログ—の間の明示的な関係を明らかにすることである (主公式=定理 3.2)

本稿は 2016 年の 7 月 11 日から 7 月 14 日にかけて京都大学数理解析研究所において行われた研究集会「多重ゼータ値の諸相」の報告である 講演では主公式を金子 Zagier のアイデアに従ったアデール的な設定の下で述べたが, 紙面の節約のために本稿では (十分大きな) 素数 p を固定して結果を述べる 主公式の証明の詳細についてもここでは述べないことにする 詳しくは論文 [11] を参照されたい その代わり, 応用については講演に於いて話せなかった部分も含め若干詳しく書くことにする 本研究は大阪大学の関真一朗氏との共同研究である

本稿の計画を述べる まず第 2 章において主公式に現れる登場人物について解説する 続いて第 3 章において主公式の主張と証明の概略について解説する 第 4 章では主公式の応用のために必要な準備を行う 最後の章に於いて, 主公式の応用を 2 つ与える 5 1 節に於いてガロワコホモロジーの制限写像に関する有名な結果の別証明を与える 次に 5 2 章において修正された有限ポリログを導入し, その値の満たす関係式についての結果を述べる

記号 本稿に於いて, p は奇素数を表すことにする 体 F に対して, その分離閉包 $\overline{F}$ を一つ固定しておき, F の絶対ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を G_F であらわす. F が局所体の場合には, その整数環を $\mathcal{O}_F$ であらわす. R を商体 F をもつネーター環で, $\bar{\eta}$ を埋め込み $R \hookrightarrow \overline{F}$ で定まる $\mathrm{Spec}(R)$ の幾何的点とする この時, 任意の $\pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(R),\bar{\eta})$ の連続作用を持つ位相アーベル群 M に対して, $\pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(R),\bar{\eta})$ の M 係数連続群コホモロジーを $H^i(R,M)$ と書くことにする 正の整数 n と体 F に対して $\mu_n(F)$ を F に含まれる 1 の n 冪根からなる集合とする 環 A に対して, $A^\times$ で A の単元全体を表す.

2 登場人物

この章において主公式に現れる登場人物を思い出す.

2.1 有限ポリログ

まず, 最初の登場人物である有限ポリログの定義を思い出す.

定義 2.1 (Elbaz-Vincent–Gangl, 2002 [3]). 素数 p に対して, 有限ポリログ $\pounds_{p,m}(t)$ を以下で定める

$$\pounds_{p,m}(t) = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{t^n}{n^m} \in \mathbf{Z}_{(p)}[t] \tag{1}$$

但し, $\mathbf{Z}_{(p)}$ は $\mathbf{Z}$ の素イデアル (p) での局所化とする

古典的なポリログは冪級数

$$\mathrm{Li}_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{m^n}, \quad z \in \mathbf{C}, |z| < 1 \tag{2}$$

で定義されていたことを思い出せば, 有限ポリログは古典的なポリログの類似物と思える 我々は主公式の応用として, 若干の修正が必要ではあるが, 有限ポリログの値の関係式と古典的な一価ポリログの値の関係式の間に, ある包含関係があることを明らかにする (定理 5.6)

2.2 エタールポリログ

次の登場人物である Wojtkowiak により導入された p 進エタールポリログの定義を思い出す. 正確な定義は, 例えば [13, Definition 11 0 1] を参照されたい [1] F を $\mathbf{C}$ の部分体とする $C = \mathbf{P}^1_{01\infty,F} = \mathrm{Spec}(F[t, 1/t(1-t)])$ とし, $\pi_1^p(C_{\overline{F}}, \overrightarrow{01})$ を $C_{\overline{F}} = C \times_{\mathrm{Spec}(F)} \mathrm{Spec}(\overline{F})$ のエタール基本群の最大副 p 商とする ここで $\overrightarrow{01}$ は $\mathbf{P}^1_F$ の 0 における, 標準的な接ヘクトル基点である ([4, Section 2.3]) z を $\mathbf{P}^1_{01\infty,F}(F)$ の元とすると, $\mathbf{P}^1_{01\infty,\overline{F}}$ の $\overrightarrow{01}$ から z への p 進的な道の「ホモトピー類」の集合には, F の絶対ガロワ群 $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ が作用しており, この作用が基本的な研究対象である 以下しばらく p 進的な道 γ $\overrightarrow{01} \rightsquigarrow z$ を固定しよう ガロワ作用を記述するために次の連続 1 コサイクルを考える

$$\mathfrak{f}_\gamma \quad G_F \to \pi_1^p(C_{\overline{F}}, \overrightarrow{01}), \sigma \mapsto \mathfrak{f}_\gamma(\sigma) = \gamma^{-1} \circ \sigma(\gamma)$$

この 1 コサイクルは γ が G_F の作用でどれだけずれるかを表しており, また基本群へのガロワ作用の基点の取り換えに関する依存性を表している $\mathfrak{f}_\gamma$ をより見やすくするために, 基本群を非可換形式的冪級数環へ埋め込んで考えることにする $\pi_1^p(C_{\overline{F}}, \overrightarrow{01})$ は階数が 2 の自由副 p 群で, それぞれ 0, 1 の周りを反時計回りに一周するループに対応する標準的な生成元 $\{x, y\}$ をもつ x は 1 の冪根の連接系 $\{\zeta_n \in \mu_n(\overline{F})\}_{n \in \mathbf{Z}_{>0}}$ を定めており, 特に G_F 加群 $\mathbf{Q}_p(1) = (\varprojlim_n \mu_{p^n}(\overline{F})) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の基底を定める この基底を $e_1 = (\zeta_{p^n})_n$ と書き, $\mathbf{Q}_p(m) = \mathbf{Q}_p(1)^{\otimes m}$ の基底 e_m を $e_m = e_1^{\otimes m}$ で定めることにする さて, ここで群の埋め込み

$$\iota \quad \pi_1^p(C_{\overline{F}}, \overrightarrow{01}) \hookrightarrow \mathbf{Q}_p\langle\langle X, Y\rangle\rangle^\times, \quad x, y \mapsto \exp(X), \exp(Y)$$

を考える このとき p 進エタールポリログの z での値 $\mathrm{li}_{p,m}(z,\gamma)$ とは以下で定義される連続関数 $G_F \to \mathbf{Q}_p(m)$ のことである

$$\mathrm{li}_{p,m}(z,\gamma)(\sigma) = \left(\log(\mathfrak{f}_\gamma(\sigma)) \text{ の } \overbrace{[X,[X, \quad [X}^{m-1},Y] \quad]] \text{ における係数} \right) \times e_m$$

但し, 環 $\mathbf{Q}_p\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ 上のブラケット積 [,] は $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$ で定められているとする p 進エタールポリログは古典的な一価ポリログの p 進エタール類似物であることが知られている ([8] 参照) 次章に於いて, p 進エタールポリログと有限ポリログの間の明示的な関係を与えることにする

[1] 実際には符号が少しずれる ([11, Remakr 2 3])

3 主公式

主公式の主張と, その証明の概略を与えよう. この章では $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大 F と, $\overline{F}$ の $\mathbf{C}$ と $\mathbf{C}_p$ への埋め込みを固定しておく. また, 前節同様 C は $\mathbf{P}^1_{01\infty,F}$ を, $C_{\overline{F}}$ は C の $\overline{F}$ への基底変換を表すとする.

3.1 主張

主張を述べるために若干の準備が必要である. まず $\log_p\colon \mathbf{C}_p^\times \to \mathbf{C}_p$ を p 進対数関数とし, $\Lambda_F := \log_p(\mathcal{O}_F^\times)/p\log_p(\mathcal{O}_F^\times)$ と置く. mod p クンマー写像

$$\kappa_{p,F}\colon F^\times/(F^\times)^p \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mathbf{F}_p(1))$$

による $\mathcal{O}_F^\times/(\mathcal{O}_F^\times)^p$ の像を $H^1_f(F, \mathbf{F}_p(1))$ と書き, $H^1(F, \mathbf{F}_p(1))$ の有限部分とよぶ. 但し, 任意の整数 n に対して $\mathbf{F}_p(n)$ を $\mu_p(\overline{F})^{\otimes n}$ として定めている. すると, $\kappa_{p,F}^{-1}$ と $\log_p$ は次の群準同型を引き起こす:

$$\lambda_{\mathbf{F}_p(m-1),F}\colon H^1_f(F, \mathbf{F}_p(1)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p(m-1) \to \Lambda_F \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p(m-1).$$

以下この節では $z \in C(F)$ と p 進的な道 $\gamma\colon \overrightarrow{01} \rightsquigarrow z$ を固定する. さて, p 進エタールポリログに対しては, 以下のことが示されている:

補題 3.1 ([11, Lemma 2.2, Proposition 3.2] 参照). m を正の整数とする.

(1) p が m より大きいならば, $\mathrm{li}_{p,m}(z,\gamma)$ の像は $\mathbf{Z}_p(m)$ に含まれる. 合成写像

$$G_F \xrightarrow{\mathrm{li}_{p,m}(z,\gamma)} \mathbf{Z}_p(m) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_p(m)$$

を mod p エタールポリログとよび, $\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(z,\gamma)$ と書くことにする.

(2) F が 1 と z の p 冪根を含んでいると仮定する. このとき, $\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(z,\gamma)$ は群準同型である. すなわち $\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(z,\gamma) \in H^1(F, \mathbf{F}_p(m))$.

(3) F が 1 と z の p 冪根を含んでおり, 更に $1-z \in \mathcal{O}_F^\times$ であることを仮定する. このとき $\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(z,\gamma) \in H^1_f(F, \mathbf{F}_p(1)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p(m-1) \subset H^1(F, \mathbf{F}_p(m))$ となる.

F の有限次拡大体 F_z を $F_z := F(\zeta_p, z^{1/p})$ で定義する. すると, 補題 3.1 (3) より, $1-z \in \mathcal{O}_F^\times$ ならば $\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(z,\gamma)$ の G_{F_z} への制限は $H^1_f(F_z, \mathbf{F}_p(1)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p(m-1)$ に含まれることが分かる. 記号の節約のためにこの制限のことも再び $\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(z,\gamma)$ と書いてしまおう. すると本稿の主結果は以下の通り:

定理 3.2 (主公式, 佐久川・関, 2016 [11, Theorem 3.4]). m を 2 以上の整数とする. 更に, (i)F は絶対不分岐, (ii) $p > m-1$, (iii) $z \in C(\mathcal{O}_F)$, という三つの条件を仮定する. このとき, 以下の合同式が成立する:

$$\lambda_{\mathbf{F}_p(m-1),F_z}\left(\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(z,\gamma)\right) \equiv \left[\frac{(1-\zeta_p)^{p-m}}{z-1}\pounds_{p,m}\left(z^{1/p}\right)\right] \otimes \zeta_p^{\otimes(m-1)} \left(\mathrm{mod}\ (\zeta_p-1)^{p-m+1}\right)$$

但し $z^{1/p}$ は γ で定まる z の p 冪根とする.

注意 3.3. 講演では F は固定された代数体 K のある有限素点 v での完備化で, z を $\mathbf{P}^1_{01\infty}(K)$ の元としてとっていた. このとき定理 3.2 における仮定 (i), (ii), (iii) はほとんどすべての有限素点 v において満たされている.

注意 3.4. Besser は論文 [2] に於いて, コールマン p 進ポリログ $\mathrm{Li}_m^{p\text{-adic}}(z)$ を修正した関数 $F_m^{p\text{-adic}}(z)$ を

$$F_m^{p\text{-adic}}(z) = -m\mathrm{Li}_m^{p\text{-adic}}(z) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{(-1)^j}{(j-1)!} + \frac{(-1)^{j+1}m}{j!}\right)\log_p^j(z)\mathrm{Li}_{m-j}^{p\text{-adic}}(z)$$

で定め, $z \in W(\overline{\mathbf{F}_p})^\times \cap (1 + pW(\overline{\mathbf{F}_p}))$ に対し合同式

$$p^{1-m}DF_m^{p\text{-adic}}(z) \equiv \pounds_{p,m-1}(\mathrm{Fr}_p(z)) \pmod p \tag{3}$$

を示した ([2, Theorem 1.1]). 但し $W(\overline{\mathbf{F}_p})$ は $\overline{\mathbf{F}_p}$ のヴィット環, Fr_p は幾何的フロベニウスで, D は微分作用素 $z(1-z)d/dz$ のこととする. 定理 3.2 は合同式 (3) の p 進エタール類似ともみなせる.

3.2 証明の概略

まず次の重要な命題を思い出す:

命題 3.5 (中村・Wojtkowiak, 1994 [7, Section 3; Corollary]). m を $p > m-1$ を満たす正の整数とする. z, γ は前節と同様とし, $z^{1/p}$ を γ で定まる z の p 冪根とする. このとき $F_z^\times$ の元 $w_{p,m}(z,\gamma)$ を

$$w_{p,m}(z,\gamma) = \prod_{i=0}^{p-1}\left(1 - z^{1/p}\zeta_p^i\right)^{i^{m-1}},$$

で定める. 但しここで $m=1$ の時は $0^0 = 1$ と解釈する. すると等式

$$\pounds_{p,m}^{\mathrm{et}}(z,\gamma) = \frac{1}{(m-1)!}\kappa_{p,F_z}(w_{p,m}(z,\gamma)) \otimes \zeta_p^{\otimes(m-1)}$$

が $H^1(F_z, \mathbf{F}_p(m))$ の中で成立する.

この命題を用いて $\lambda_{\mathbf{F}_p(m-1),F_z}(\pounds_{p,m}^{\mathrm{et}}(z,\gamma))$ を直接計算する, というのが主公式の証明方針である.

定理 3.2 の証明の概略. $\lambda_{\mathbf{F}_p(m-1),F_z}$ の定義から, $\mathcal{O}_{F_z}$ の中で次の合同式が成立することを示せばよいことは直ちにわかる.

$$\log_p(w_{p,m}(z,\gamma)) \equiv (m-1)!\frac{(1-\zeta_p)^{p-m}}{z-1}\pounds_{p,m}(z^{1/p}) \pmod{(\zeta_p-1)^{p-m+1}} \tag{4}$$

合同式 (4) を証明するために, 左辺を計算しよう. $\xi = z^{-1/p} - 1$ とおけば, 以下の等式・合同式が成立している.

$$\begin{aligned}\log_p(w_{p,m}(z,\gamma)) &= \sum_{i=1}^{p-1} i^{m-1}\log_p(1 - z^{1/p}\zeta_p^i) \\ &\equiv -\sum_{i=0}^{p-1} i^{m-1}\sum_{l=1}^{p-1}\frac{1}{l\xi^l}(\zeta_p^i - 1)^l \pmod{(\zeta_p-1)^{p-m+1}}\end{aligned} \tag{5}$$

最初の等式は定義 3.5 から直ちに従う. 二つ目の等式は $\log_p$ の無限級数展開とその展開に現れる各項の付値の評価によって得られる ($m>1$ も使う). 更に $m>1$ ならば次の合同式が成立する.

$$\sum_{i=0}^{p-1} i^{m-1}(\zeta_p^i - 1)^l \equiv (-1)^l\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!p}{(\zeta_p-1)^{m-1}}\sum_{l\geq n_1\geq\cdots\geq n_{m-1}\geq 1}\frac{1}{n_1\cdots n_{m-1}} \pmod{(\zeta_p-1)^{p-m+1}} \tag{6}$$

この合同式の証明は本稿では割愛する 詳しくは論文 [11, Lemma 4 2] を参照されたい そこで (5) に (6) を代入すれば, 以下の合同式を得る

$$\log_p(w_{p,m}(z,\gamma)) \equiv \frac{(-1)^m(m-1)!p}{(\zeta_p-1)^{m-1}}\pounds^{\star}_{p,\{1\}^m}(-\xi^{-1}) \ \left(\mathrm{mod}(\zeta_p-1)^{p-m+1}\right) \tag{7}$$

ここで $\pounds^{\star}_{p,\{1\}^m}(t)$ は等式 $\sum_{p-1\geq n_1\geq\cdots\geq n_m\geq 1}\frac{t^{n_1}}{n_1\cdots n_m}$ で定義される $\mathbf{Z}_{(p)}$ 係数の多項式で, それは即ち [10] において定義された指数 $\{1\}^m$ を持つ等号付き有限多重ポリログの p 成分である よって, [10] の主結果の系である, 以下の補題を用いることにより証明は完結する □

補題 3.6 (佐久川 関, 2016 [10], [11, Appendix (A.4)]). 不等式 $p>m+1$ を満たす奇素数 p と正の整数 m に対して, 以下の合同式が $\mathbf{Z}_{(p)}[t,1/(1-t)]$ において成立する

$$(t^p-1)\pounds^{\star}_{p,\{1\}^m}\left(\frac{t}{t-1}\right) \equiv \pounds_{p,m}(t) \ (\mathrm{mod}\ p)$$

4 体論からの準備

mod p エタールポリログは mod p クンマー写像の像として書けることを思い出しておこう mod p クンマー写像の像が消えているか否かを体の言葉で言い代えると, 対応する体の元が p 乗元であるか否か, となる したがって体の元がいつ p 乗元となるかを研究するのは自然なことであろう 以下 F を $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体とし, π をその素元とする $F^{\times}$ の加法付値 v_F を $v_F(\pi)=1$ で定める $\mu^{(p)}(F)$ を $\mathcal{O}_F$ の 1 の冪根であってその位数が p と互いに素であるものの集合とすると, 任意の $x\in F$ は一意的に無限和

$$x=\sum_{n>-\infty}a_n\pi^n, \quad a_n\in\mu^{(p)}(F)\cup\{0\}$$

のかたちで書ける これを x の π 進展開と呼び, a_n を $a_n(\pi,x)$ と書くことにする 次の補題は明らかと思われるので, 証明は省略する

補題 4.1. x を $\mathcal{O}_F^{\times}$ の元で n を非負整数とする もし $0<n<v_F(p)$ であり $p\nmid n$ ならば $a_n(\pi,x^p)=0$ が成立する

補題 4.2. x を $\mathcal{O}_F$ の主単数, 即ち $1+\pi\mathcal{O}_F$ の元とする 整数 n_0 を $n_0=v_F(\log_p(x))$ で定める

(1) もし条件 $0<n_0<n_0p-v_F(p)$ が成立するならば, $n_0=v_F(x-1)$ となる

(2) (1) の条件の下で, 更に $2n_0\leq n_0p-v_F(p)$ が成立するならば, 次の合同式が成立する

$$\log_p(x)\equiv x-1 \ (\mathrm{mod}\ \pi^{2n_0})$$

Proof. 定義より,

$$\log_p(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n}$$

となっている このとき無限和の第 n 項の π 進付値を計算すると,

$$v_F\left(\frac{(1-x)^n}{n}\right)=nn_0-v_F(n)\geq nn_0-\frac{v_F(p)\log(n)}{\log(p)} \tag{8}$$

となる 但し log は自然対数とする ここで条件 $n_0 < n_0 p - v_F(p)$ を仮定しよう すると式 (8) の右辺は, これを n の関数とみなせば $n \geq p$ で単調増加であることが確かめられる 更に n が 1 から $p-1$ の整数を動く時には明らかに (8) の左辺は単調増加である よって, $N = \min\{2n_0, n_0 p - v_F(p)\}$ とすると合同式

$$\log_p(x) \equiv x - 1 \pmod{\pi^N} \tag{9}$$

が成立する $n_0 < N$ が成り立っているので, 主張 (1) が従う 主張 (2) は式 (9) と条件から直ちにわかる □

命題 4.3. x を $\mathcal{O}_F^\times$ の元とする 整数 $n_0 = v_F(\log_p(x))$ は補題 4.2 (2) の条件を満たすと仮定する 仮に x が F の p 乗元であるならば, 任意の p で割り切れない整数 n で $0 < n < \min\{2n_0, v_F(p)\}$ を満たすものに対して, $a_n(\pi, \log(x)) = 0$ が成立する

Proof. まず, 任意の $\mu^{(p)}(F)$ の元は p 乗元であり, $\log_p$ の核に含まれるので, 最初から x は主単数としてよい すると, 補題 4.2 (2) から $\log_p(x)$ を $x-1$ に置き換えた主張を示せばよい $0 < n < v_F(p)$ に対しては $a_n(\pi, x-1) = a_n(x)$ なので, 主張は補題 4.1 から従う □

命題 4.3 をあとで使う形に書き換えておこう

系 4.4. $c \in H^1_f(F, \mathbf{F}_p(1)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p(m-1)$ に対し $\lambda_{\mathbf{F}_p(m-1),F}(c) = y \otimes \zeta_p^{\otimes m} \in \Lambda_F \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p(m-1)$ と書く 更に以下の 2 条件が成立しているとする

(1) y の $\mathcal{O}_F$ への持ち上げ $\tilde{y} \in \mathcal{O}_F$ が存在する

(2) $n_0 = \min\{n | a_n(\pi, \tilde{y}) \neq 0\}$ が補題 4.2 (2) の条件を満たす.

このとき $c = 0$ であるならば, 任意の p で割り切れない整数 n で $0 < n < \min\{2n_0, v_F(p)\}$ を満たすものに対して, $a_n(\pi, \tilde{y}) = 0$ が成立する

さてこの節の最後に, 特殊な体についての補題を用意しておく 以下 F として $\mathbf{Q}_p(\zeta_p, (1+p)^{1/p})$ をとり, $\varpi = (1+p)^{1/p} - 1$ と置く このとき F は $\mathbf{Q}_p$ 上完全分岐で拡大次数は $p(p-1)$ である $v_F(\zeta_p - 1) = p$ であり $v_F(\varpi) = p - 1$ であるので, $\pi = (\zeta_p - 1)/\varpi$ は F の素元である

補題 4.5. 以下の合同式が成立する

$$1 - \zeta_p \equiv \pi^p(1 + \pi^{p-1}) \pmod{\pi^{2p}},$$
$$\varpi \equiv -\pi^{p-1} \pmod{\pi^{2p-2}}$$

Proof. まず $(1-\zeta_p)^{p-1} \equiv -p \pmod{p(\zeta_p - 1)}$ であり,

$$\begin{aligned}
\varpi^p &= (1 + \varpi - 1)^p = (1+\varpi)^p - 1 + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} (-1)^{p-j} (1+\varpi)^j \\
&= p + p \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{j} (-1)^{j-1} (1+\varpi)^j \\
&\equiv p(1 + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j}(1 + j\varpi) \pmod{p\varpi^2} \\
&\equiv p(1 - \varpi) \pmod{p^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

であることに注意しておく．したがって

$$\pi^{p-1} = \varpi\frac{(\zeta_p - 1)^{p-1}}{\varpi^p} \equiv -\varpi \pmod{\varpi^2}$$

が成立するので，二つ目の合同式が成立する．また，

$$\pi^p = (\zeta_p - 1)\frac{(\zeta_p - 1)^{p-1}}{\varpi^p} \equiv -(\zeta_p - 1)\frac{1}{1-\varpi} \pmod{\pi^p(\zeta_p - 1)}$$

が成立するので最初の合同式が成立する． □

$z \in \mathbf{Z}_p$ に対し，フェルマー商 $q_p(z) \in \mathbf{Q}_p$ を

$$q_p(z) := \frac{z^{p-1} - 1}{p} \tag{11}$$

で定義する．フェルマーの小定理から $q_p(z)$ は $\mathbf{Z}_p$ の元であることがわかる．

補題 4.6. $z \in \mathbf{Z}_p$ に対して，$\mathcal{O}_F$ の中で次の合同式が成立する：

$$\pounds_{p,m}\left(z^{1/p}\right) \equiv \pounds_{p,m}(z) + q_p(z)\pounds_{p,m-1}(z)\pi^{p-1} \pmod{\pi^p}. \tag{12}$$

注意 4.7. 任意の整数 r に対して，$\zeta_p^r \equiv 1 \pmod{\pi^p}$ が補題 4.5 から従う．よって合同式 (12) は $z^{1/p}$ の取り方によらずに成立する．

Proof. まず，z を $z = \alpha(1+\beta p)$, $\alpha \in \mu_{p-1}(\mathbf{Q}_p)$, $\beta \in \mathbf{Z}_p$ と書く．すると，合同式

$$\begin{aligned} z^{n/p} = \alpha^n(1+\beta p)^{n/p} &\equiv z^n(1+p)^{\beta n/p} \\ &\equiv z^n(1+\varpi)^{\beta n} \\ &\equiv z^n(1-\beta n\pi^{p-1}) \pmod{\pi^p} \end{aligned}$$

が成立する．最後の合同式は補題 4.5 から従う．よって，

$$\begin{aligned} \pounds_{p,m}\left(z^{1/p}\right) = \sum_{n=1}^{p-1}\frac{z^{n/p}}{n^m} &\equiv \sum_{n=1}^{p-1}\frac{z^n(1-\beta n\pi^{p-1})}{n^m} \pmod{\pi^p} \\ &= \pounds_{p,m}(z) - \beta\pounds_{p,m-1}(z)\pi^{p-1} \end{aligned} \tag{13}$$

となる．一方で，

$$q_p(z) = \frac{(1+\beta p)^{p-1} - 1}{p} \equiv \frac{(1+\beta p(p-1)) - 1}{p} \equiv -\beta \pmod{p}$$

が成立しているので，(13) と合わせて補題は証明された． □

5 応用

5.1 ガロワコホモロジーへの応用

主公式の最初の応用として，次のよく知られた結果の易しい証明を与えよう．

命題 5.1 ([12, Corollary 3.2] 参照). 整数 m を $1 < m < p-1$ を満たす奇数であると仮定する. 更に奇素数 p が正則素数であると仮定すると, ガロワコホモロジーの制限写像

$$\mathrm{res}_m \colon H^1(\mathbf{Z}[1/p], \mathbf{Z}_p(m)) \to H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p(m))$$

は同型である.

Proof. Euler-Poincaré characteristics の計算により両辺の階数は 1 であることが分かり, 更に両辺ねじれはないことが分かる. したがって res_m が同型であることと合成

$$H^1(\mathbf{Z}[1/p], \mathbf{Z}_p(m)) \to H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p(m)) \to H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_p), \mathbf{F}_p(m)) \tag{14}$$

が非自明であることは同値である. $\overrightarrow{01}$ から z への p 進的な道 γ をうまくとれば, $\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(-1,\gamma) \in H^1(\mathbf{Q}_p(\zeta_p), \mathbf{F}_p(m))$ は (14) の像に含まれている ([7, Section 2, Corollary]). したがって任意の $\gamma\colon \overrightarrow{01} \rightsquigarrow -1$ に対し $\pounds^{\text{ét}}_{p,m}(-1,\gamma) \neq 0$ を示せば十分である.

$F := \mathbf{Q}_p(\zeta_p)$, $n_0 = p-m$ として系 4.4 の対偶を考えると, 定理 3.2 と合わせれば $\pounds_{p,m}(-1)$ が p を法として 0 と合同でないことを示せば十分であることがわかる. この値は $\frac{1-2^{2m-1}}{2^{2m}-2m}B_{p-m}$ と合同であるので ([11, Lemma 4.1 (58)] 参照), p が正則であることから結論が従う. □

5.2 有限ポリログの関数等式への応用

本稿の最後に, 有限ポリログの関数等式への応用を与えよう. まず, 金子・Zagier のアイデアに従って導入された, アデール的な有限ポリログの定義を思い出す. 一般の可換環 R に対し, 可換環 $\mathcal{A}_R$ を

$$\mathcal{A}_R := \left(\prod_{p:\text{素数}} R/pR\right) \Big/ \left(\bigoplus_{p:\text{素数}} R/pR\right) \tag{15}$$

で定義する ([10, Section 3.1]). $R = \mathbf{Z}$ の時には $\mathcal{A}_{\mathbf{Z}}$ は単に $\mathcal{A}$ と書くことにする. $\mathcal{A} = (\prod_p \mathbf{F}_p) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ であることに注意すると, $\mathcal{A}$ は $\mathbf{Q}$ 代数であることが分かる.

定義 5.2 (佐久川・関, 2016 [10, Definition 3.8]). m を正の整数とするとき, 重さが m の有限ポリログ $\pounds_{\mathcal{A},m}(t)$ を

$$\pounds_{\mathcal{A},m}(t) := (\pounds_{p,m}(t) \bmod p)_p \in \mathcal{A}_{\mathbf{Z}[t]} = \left(\prod_{p:\text{素数}} \mathbf{F}_p[t]\right) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

で定義する.

注意 5.3. 重さが m という概念は, 古典的な有限ポリログ $\pounds_{p,m}(t)$ に対してはうまく定義できないことに注意する. なぜならフェルマーの小定理により $\pounds_{p,m}(t) = \pounds_{p,m+p-1}(t)$ となるからである.

さて, 任意の $f = (f_p(t))_p \in \mathcal{A}_{\mathbf{Z}[t]}$ と任意の $z \in \mathbf{Q}$ に対して, $\mathcal{A}$ の元 $f(z) := (f_p(z))_p$ は定義可能である. なぜならほとんどすべての素数 p に対して $z \in \mathbf{Z}_p$ であるので, $z \bmod p$ は定義できるからである. 記号の濫用ではあるが, 対応 $z \mapsto f(z)$ を形式的に拡張した線型写像

$$\mathbf{Z}[\mathbf{Q}] := \bigoplus_{z\in\mathbf{Q}} \mathbf{Z}\{z\} \to \mathcal{A}; \quad \sum_i a_i\{z_i\} \mapsto \sum_i a_i f(z_i)$$

のことも, 再び f で表すことにしよう. このことにより, 以下では我々は有限ポリログ $\pounds_{\mathcal{A},m}(t)$ を $\mathbf{Z}[\mathbf{Q}]$ 上の $\mathcal{A}$ に値を持つ線型写像だと思うことにする.

注意 5.4. 一般の代数体 K に対し, 同様に代入写像

$$f\colon \mathbf{Z}[K] \to \mathcal{A}_K := \mathcal{A} \otimes_{\mathbf{Q}} K$$

が定義できる. 今回は簡単のために $K = \mathbf{Q}$ の場合のみを考えることにする.

$\mathbf{Q}^\times$ 上の $\mathcal{A}$ に値を持つ群準同型 $\log_{\mathcal{A}}$ を

$$\log_{\mathcal{A}}(z) := (q_p(z) \bmod p)_p = \left(\frac{z^{p-1}-1}{p} \bmod p\right)_p \in \mathcal{A}$$

で定義する ([5]). $\log_{\mathcal{A}}$ が群準同型であることは定義から簡単に確かめられる.

定義 5.5. 2 以上の整数 m に対して, 修正された有限ポリログ $\pounds^{\mathrm{mod}}_{\mathcal{A},m}(z)$ とは, 以下の等式で定義される $\mathbf{Z}[\mathbf{Q}\setminus\{0,1\}]$ 上の $\mathcal{A}$ に値を持つ線型写像のことである:

$$\pounds^{\mathrm{mod}}_{\mathcal{A},m}(\{z\}) := m\frac{\pounds_{\mathcal{A},m}(z)}{1-z} - \log_{\mathcal{A}}(z)\frac{\pounds_{\mathcal{A},m-1}(z)}{1-z}, \quad z \in \mathbf{Q}\setminus\{0,1\}.$$

主公式を用いて, 修正された有限ポリログの核と, 古典的な一価ポリログの関係式とを結びつけるということがやりたいことである. まず, 古典的な一価ポリログ $\mathscr{L}^{\mathrm{cl}}_m$ とは等式

$$\mathscr{L}^{\mathrm{cl}}_m(z) := \Re_m\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{B_j}{j!}\log^j(z\bar{z})\mathrm{Li}_{m-j}(z)\right)$$

で定義された, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上の値を $\mathbf{R}(m-1) := \mathbf{R}\sqrt{-1}^{m-1}$ にとる一価関数であったことを思い出そう. 但し, B_j は冪級数 $z/(e^z-1)$ で定義されるベルヌーイ数であり, 任意の $z\in\mathbf{C}$ に対して $\Re_m(z) := (z+(-1)^{m-1}\bar{z})/2$ とする. 次に Zagier の定義した部分アーベル群 $R_m(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Z}[\mathbf{Q}\setminus\{0,1\}]$ の定義を簡単に思い出す. まず, 2 以上の整数 m に対して, 部分群 $A_m(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Z}[\mathbf{Q}\setminus\{0,1\}]$ を以下の条件 $(*)_m$ を満たす線形和 $\sum_i a_i\{z_i\}$ の集合として定義する:

$(*)_m$ 任意の群準同型 $\phi\colon \mathbf{Q}^\times \to \mathbf{Q}$ に対して以下の等式が成立する

$$\sum_i a_i\phi^{m-2}(z_i)z_i \wedge (1-z_i) = 0 \in \bigwedge^2_{\mathbf{Z}} F^\times \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}. \tag{16}$$

更に $A_m(\mathbf{Q})$ の部分群 $R_m(\mathbf{Q})$ を

$$R_m(\mathbf{Q}) := \left\{\sum_i a_i\{z_i\} \in A_m(\mathbf{Q}) \;\middle|\; \sum_i a_i\mathscr{L}^{\mathrm{cl}}_m(z_i) = 0\right\}$$

で定義する ([14, Section 8], [1, Remarque 1.8]). 二つ目の応用は以下の通り:

定理 5.6. 次の包含関係が成立する:

$$R_m(\mathbf{Q}) \subset \mathrm{Ker}(\pounds^{\mathrm{mod}}_{\mathcal{A},m}).$$

注意 5.7. 講演では, 条件 $(*)_m$ を入れなくてはならない部分を外して紹介してしまいました. この場を借りてお詫び申し上げます.

主公式を応用するためには次の補題が重要である.

補題 5.8. $\xi = \sum_i a_i\{z_i\} \in R_m(\mathbf{Q})$ の時, 十分大きな素数 p に対して, ある p 進的な道 $\gamma_i\colon \overrightarrow{01} \rightsquigarrow z_i$ が存在して, G_F 上の関数 $\sum_i a_i \mathrm{li}_{p,m}(z_i, \gamma_i)$ は恒等的に 0 となる.

証明の概略. まず [8, Corollary 6.5] により, γ_i として $\mathbf{Q}_p$ 有理的な道を選べば $\sum_i a_i \mathrm{li}_{p,m}(z_i, \gamma_i)$ が 0 となることが知られている. 更に γ_i はモチヴィックな道の実現としてとれることもわかっている ([9]). モチヴィックな道は十分大きな素数 p に対してその実現が p 進的な道で近似できることがわかるので, 主張は示される. □

定理 5.6 の証明. $\xi = \sum_i a_i\{z_i\} \in R_m(\mathbf{Q})$ に対して, 以下の条件を満たす素数 p を一つ固定する:

(a) 任意の i に対し $z_i, (1 - z_i)$ は p 進単数.

(b) 不等式 $2(p - m) \le p(p - m) - (p - 1)$ が成立する.

(c) p は補題 5.8 の条件を満たす. 即ち線型和 $\sum_i a_i \mathrm{li}_{p,m}(z_i, \gamma_i)$ が G_F 上恒等的に 0 となる p 進的な道 $\gamma_i\colon \overrightarrow{01} \rightsquigarrow z_i$ が存在する.

$\varpi := (1+p)^{1/p} - 1$, $F := \mathbf{Q}_p(\zeta_p, \varpi)$ と置くと, 条件 (a) と補題 3.1 (3) から各 $\pounds_{p,m}(z_i, \gamma_i)$ の G_F への制限は $H^1_f(F, \mathbf{F}_p(1)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p(m-1)$ の元となっている. 更に主公式から, $\lambda_{\mathbf{F}_p(m-1),F}(\pounds_{p,m}(z_i, \gamma_i)) = y_i \otimes \zeta_p^{\otimes(m-1)}$ と書いたとき, y_i の代表元 $\tilde{y}_i$ として

$$\tilde{y}_i = \frac{(1 - \zeta_p)^{p-m}}{z_i - 1} \pounds_{p,m}\left(z_i^{1/p}\right) + x_i(\zeta_p - 1)^{p-m+1}, \quad x_i \in \mathcal{O}_F \tag{17}$$

を取ることができる. 素元 $\pi := (\zeta_p - 1)/\varpi$ に対し, 合同式 $(1 - \zeta_p)^{p-m} \equiv \pi^{p(p-m)}(1 - m\pi^{p-1}) \bmod \pi^{p(p-m+1)}$ が成り立つことに注意すれば (補題 4.5), 補題 4.6 から $\tilde{y}_i$ は以下のように π 進的に展開される:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_i &= \frac{\pi^{p(p-m)}}{z_i - 1}(1 - m\pi^{p-1} + \dots)\left(\pounds_{p,m}(z_i) + q_p(z_i)\pounds_{p,m-1}(z_i)\pi^{p-1} + \dots\right) \\ &= \pi^{p(p-m)}\left(\frac{\pounds_{p,m}(z_i)}{z_i - 1} + \pounds^{\mathrm{mod}}_{p,m}(z_i)\pi^{p-1} + \dots\right).\end{aligned} \tag{18}$$

但し $\pounds^{\mathrm{mod}}_{p,m}(z_i)$ は $\pounds^{\mathrm{mod}}_{\mathcal{A},m}(z_i)$ の p 成分のこととする.

線型和 $\sum_i a_i \pounds^{\mathrm{mod}}_{p,m}(z_i)$ が p を法として 0 と合同でないと仮定して矛盾を導こう. さて, ここで線型和 $c := \sum_i a_i \pounds_{p,m}(z_i, \gamma_i)|_{G_F}$ を考える. $\lambda_{\mathbf{F}_p(m-1),F}(c) = (\sum_i a_i y_i) \otimes \zeta_p^{\otimes(m-1)}$ と書くと, $\sum_i a_i y_i$ の $\mathcal{O}_F$ 上への持ち上げとして当然 $\tilde{y} = \sum_i a_i \tilde{y}_i$ を取ることができ, 仮定 $\sum_i a_i \pounds^{\mathrm{mod}}_{p,m}(z_i) \not\equiv 0 \pmod p$ から, $n_0 := \min\{n | a_n(\pi, \tilde{y})\}$ は $p(p - m)$ 又は $p(p - m) + p - 1$ となる. したがって, $v_F(p) = p(p - 1)$ であることに注意すれば, 条件 (b) から $c, y, \tilde{y}, n_0$ は系 4.4 の条件 (1), (2) を満たしていることが分かる. 一方条件 (c) から $c = 0$ である. 従って系 4.4 から, $0 < n < \min\{2n_0, p(p - 1)\}$ かつ $p \nmid n$ を満たす自然数 n に対しては $a_n(\pi, \tilde{y}) = 0$ が成立する. ところが, $n = p(p - m) + p - 1$ は n_0 が $p(p - m)$ であっても $p(p - m) + p - 1$ であっても上の条件を満たす. 展開式 (18) から

$$a_{p(p-m)+p-1}(\pi, \tilde{y}) \equiv \sum_i a_i \pounds^{\mathrm{mod}}_{p,m}(z_i) \pmod p$$

となることが分かるので, 上式の左辺が 0 であることと右辺が p を法として 0 と合同でないことは矛盾する. 従って, 結局仮定が間違っており, 合同式

$$\sum_i a_i \pounds^{\mathrm{mod}}_{p,m}(z_i) \equiv 0 \pmod p$$

が (a), (b), (c) を満たす素数 p に対して成立することがわかった．この三条件は十分大きな素数 p に対して成立するので, 結局

$$\sum_i a_i \pounds^{\mathrm{mod}}_{\mathcal{A},m}(z_i) = 0$$

となり定理は示された． □

参考文献

[1] A. Beĭlinson and P. Deligne, Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et regulateurs, Motives (Seattle, WA, 1991), 97-121, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **55**, Part 2, *Amer. Math. Soc., Providence*, RI, 1994.

[2] A. Besser, Finite and p-adic polylogarithms, *Compositio Math.*, **130** (2002), no. 2, 215–223.

[3] P. Elbaz-Vincent, H. Gangl, On poly(ana)logs I, *Compositio Math.*, **130** (2002), no. 2, 161–214.

[4] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, Proc. Intern. Congress of Math. Kyoto 1990, 99–120.

[5] M. Kaneko, Finite multiple zeta values, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* (Japanese), to appear.

[6] H. Nakamura, K. Sakugawa, Z. Wojtkowiak, Polylogarithmic analogue of the Coleman-Ihara formula II, submitted.

[7] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *On explicit formulae for l-adic polylogarithms*, Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), 285–294, Proc. Sympos. Pure Math., **70**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2002.

[8] K. Sakugawa, On the upper bound on the space of ℓ-adic polylogarithms in the first Galois cohomology, submitted.

[9] K. Sakugawa, Multiple polylogarithms, multiple Bloch groups, and multiple analog of the weak Zagier conjecture, preprint.

[10] K. Sakugawa, S. Seki, On functional equations of finite multiple polylogarithms, to appear in *Journal of Algebra.*

[11] K. Sakugawa, S. Seki, Finite and étale polylogarithms, submiitted, available at arXiv:1603.05811.

[12] C. Soulé, On higher p-adic regulators, Algebraic K-theory, Evanston 1980 (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1980), 372–401, Lecture Notes in Math., **854**, Springer, Berlin-New York, 1981.

[13] Z. Wojtkowiak, On l-adic iterated integrals II: Functional equations and l-adic polylogarithms, *Nagoya Math. J.*, **177** (2005), 117–153.

[14] D. Zagier, Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic F-theory of fields, Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989), 391–430, *Progr. Math.*, **89**, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1991.