数理解析研究所講究録
第2015巻 2017年 65-70

A CERTAIN COMBINATORIAL MODULE INSPIRED BY THE GONCHAROV COPRODUCT

広瀬稔 (MINORU HIROSE)
京都大学理学研究科
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY

本稿では，組合せ論的に定義された加群についてのとある公式について解説する．また，このような組合せ論的対象を考える動機と意義について，antipoded な多重ゼータ値の観点から説明する．第1節では公式について紹介し，第2節では多重ゼータ値及びその antipodes について述べる．第3節では第1節で紹介した公式と antipoded な多重ゼータ値の関係について述べる．

1. 組合せ論的公式

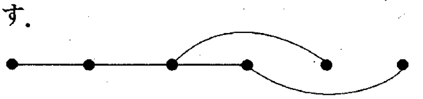
1.1. 非負整数 d に対し，頂点集合を $\{0,\ldots,d\}$ とする木の形式的和からなる $\mathbb{Z}$-加群を $\tilde{T}_d$ で表す．Cayley の公式より

$$\tilde{T}_d \simeq \mathbb{Z}^{(d+1)^{d-1}}$$

である．また，頂点集合を $\{0,\ldots,d\}$ とする木 t に対して

$$E(t)=\{(a,b)\in\{0,\ldots,d\}^2 \mid a<b \text{ かつ } (a,b) \text{ は } t \text{ の辺 }\}$$

と置く．以下では，頂点 $0,1,\ldots,d$ を左から順に配置することにより，木を図示することにしよう．例えば次の図は辺を $(0,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,5)$ とするような木を表す．

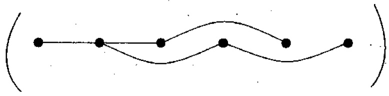


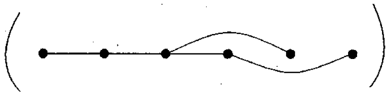
"関係式" の加群 $R_d\subset\tilde{T}_d$ を次で定義する．

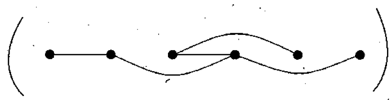
定義 1. $\{t_1-t_2+t_3 \mid (t_1,t_2,t_3)\in S_d\}$ で張られる $\tilde{T}_d$ の部分加群を R_d で表す．ただし，S_d は以下の条件満たすよう木の三組 (t_1,t_2,t_3) の集合である．

- t_1,t_2,t_3 は頂点集合を $\{0,\ldots,d\}$ とする木である．
- 頂点 $v_1<v_2<v_3$ が存在して以下の条件を満たす．
- 任意の $\{v',v''\}\not\subset\{v_1,v_2,v_3\}$ に対して，$(v',v'')\in E(t_1)\Leftrightarrow(v',v'')\in E(t_2)\Leftrightarrow(v',v'')\in E(t_3)$．
- $(v_2,v_3)\notin E(t_1)$, $(v_1,v_3)\in E(t_1)$, $(v_1,v_2)\in E(t_1)$.
- $(v_2,v_3)\in E(t_2)$, $(v_1,v_3)\notin E(t_2)$, $(v_1,v_2)\in E(t_2)$.
- $(v_2,v_3)\in E(t_3)$, $(v_1,v_3)\in E(t_3)$, $(v_1,v_2)\notin E(t_3)$.

例えば，次は $R_5\subset\tilde{T}_5$ の元の例である．

$+$ 

$-$ 

$+$ 

ここで $T_d = \tilde{T}_d / R_d$ と置く．このとき $\mathrm{rank}_{\mathbb{Q}} T_d = d!$ である．また頂点集合を $\{0\}$ とする唯一の木を e とする．$G_d = T_d \otimes T_d$ とし，

$$G = \{(t_i)_{i=0}^{\infty} \in \prod_{i=0}^{\infty} G_d \mid t_0 = e \otimes e\}$$

と置く．

1.2. この小節では G に群演算を定める．以下の定義は Goncharov 積の定義 (定義 3) を真似たものである．

定義 2. 整数 d を固定する．以下の条件をみたす有限集合 I，非負整数の族 $(n_\lambda)_{\lambda \in I}$，及び関数族 $(f_\lambda)_{\lambda \in I}$ の三組 $(I, (n_\lambda)_{\lambda \in I}, (f_\lambda)_{\lambda \in I})$ の集合を S_d で表す．

- 各 $\lambda \in I$ に対し f_λ は定義域を $\{0, 1, \ldots, d_\lambda\}$，値域を $\{0, 1, , \ldots, d\}$ とする単射な関数．
- 頂点集合を $I \sqcup \{0, 1, \ldots, d\}$ と，辺集合を
$$\{(\lambda, f_\lambda(m)) \mid \lambda \in I,\ m \in \{0, 1, \ldots, d_\lambda\}\}$$
として得られる (二部) グラフは木となる．

$f = (I, (d_\lambda)_{\lambda \in I}, (f_\lambda)_{\lambda \in I}) \in \mathsf{S}_d$ に対し

$$\varphi'_f : \bigoplus_{\lambda \in I} T_{d_\lambda} \to T_d$$

を

$$\varphi'_f(\bigoplus_{\lambda \in I} t_\lambda) = t,$$

で定める。ただし t_λ は頂点集合を $\{0, 1, \ldots, d_\lambda\}$ とする木で，t は頂点集合が $\{0, \ldots, d\}$，辺集合が

$$\bigcup_{\lambda \in I} \{(f_\lambda(u_1), f_\lambda(u_2)) \mid (u_1, u_2) \text{ は } t_\lambda \text{の辺}\}$$

となる木とする．さらに

$$\varphi_f = \varphi'_f \otimes \varphi'_f : \bigoplus_{\lambda \in I} G_{n_\lambda} \to G_d$$

と置く．また次を満たす全ての $m, c_0, \ldots, c_m, l_0, \ldots, l_m, r_0, \ldots, r_m$ の組の集合を H_d とする．

- $\{0, \ldots, d\} = \bigsqcup_{\alpha=0}^{m} \{l_\alpha, l_\alpha + 1, \ldots, r_\alpha\}$,
- $c_\alpha \in \{l_\alpha, l_\alpha + 1, \ldots, r_\alpha\}$,
- $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_m$.

また $Y=(m,c_0,\dots,r_m)\in \mathsf{H}_d$ に対して $f_Y=(I_Y,(d_\lambda)_{\lambda\in I},(f_\lambda)_{\lambda\in I})\in \mathsf{S}_d$ を

$$\begin{aligned}
I &= \{\#,0,\dots,m,0',\dots,m'\}\\
d_\# &= m\\
d_k &= c_k-l_k\\
d_{k'} &= r_k-c_k\\
f_\#(v) &= c_v\ \ (v=0,1\dots,m)\\
f_k(v) &= c_k-v\ \ (v=0,1,\dots,c_k-l_k)\\
f_{k'}(v) &= c_k+v\ \ (v=0,1,\dots,r_k-c_k)
\end{aligned}$$

で定める．また $c(Y)=\prod_{k=0}^{m}(-1)^{c_k-l_k}$ とおく。$g=(g_d)_{d=0}^{\infty}\in G$ と $h=(h_d)_{d=0}^{\infty}\in G$ に対し $g*h\in G$ を

$$(g*h)_d=\sum_{Y=(m,l_0,\dots,r_m)\in \mathsf{H}_d} c(Y)\varphi_{f_Y}(g_m\otimes \bigotimes_{\lambda\in I_Y\setminus\{\#\}} h_{d_\lambda})$$

で定める．このとき G は二項演算 $*:G\times G\to G$ によって $1=(e\otimes e,0,0,0,\dots)$ を単位元とする群になる．

1.3. 頂点集合を $\{0,\dots,d\}$ とする特別な木 $t_{L,d}$ と $t_{F,d}$ を

$$\begin{aligned}
E(t_{L,d}) &= \{(i-1,i)\mid 1\le i\le d\}\\
E(t_{F,d}) &= \{(0,i)\mid 1\le i\le d\}
\end{aligned}$$

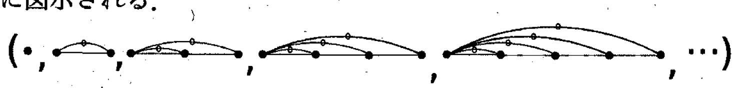
で定める．$Z,Z^S\in G$ を

$$\begin{aligned}
Z &= (t_{L,d}\otimes t_{F,d})_{d=0}^{\infty}\\
Z^S &= ((-1)^d t_{F,d}\otimes t_{L,d})_{d=0}^{\infty}
\end{aligned}$$

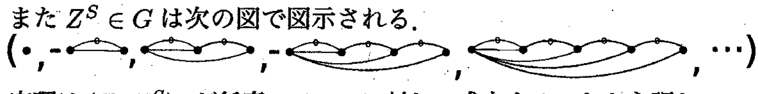
で定める．次が本稿の主結果である．

定理 1. $Z*Z^S=1$

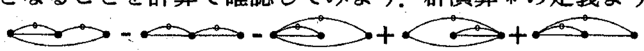
この定理の具体的な計算例を，図で説明しよう．$\tilde{T}_d\otimes\tilde{T}_d$ は，頂点集合を $\{0,\dots,d\}$ とする木のペアから生成される自由加群とみなすことが出来る．この $\tilde{T}_d\otimes\tilde{T}_d$ の基底を二種類の辺 ●——● と ●—⊖—● を用いて図示することにしよう．すると $Z\in G$ は次のように図示される．



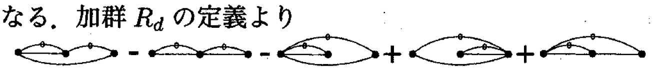
また $Z^S\in G$ は次の図で図示される．

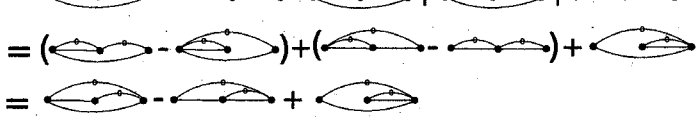


定理は $(Z*Z^S)_d$ が任意の $d>0$ に対して成立することを主張している．$(Z*Z^S)_2=0$ となることを計算で確認してみよう．群演算 $*$ の定義より $(Z*Z^S)_2$ は



となる．加群 R_d の定義より





$= 0$

となる．

2. Gonçharov 積と多重ゼータ値の antipodes

R を可換環とする．$P(R)$ で R 係数べき級数の列

$$(f_0, f_1, f_2, \dots) \quad (f_d \in R[[x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_d - x_0]])$$

で $f_0 = 1$ となるものの集合とする．

定義 3. 二項演算 $* : P(R) \times P(R) \to P(R)$ を

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, \dots) * (g_0, g_1, g_2, g_3, \dots) = (h_0, h_1, h_2, h_3, \dots)$$

で定める．ただし，$d \geq 0$ に対して h_d は次で定まる級数である．

$$h_d(x_0, \dots, x_d) = \sum_{m=0}^{d} \sum f_m(x_{c_0}, \dots, x_{c_m}) \cdot$$

$$\prod_{\alpha=0}^{m} (-1)^{c_\alpha - l_\alpha} g_{c_\alpha - l_\alpha}(-x_{c_\alpha}, -x_{c_\alpha - 1}, \dots, -x_{l_\alpha}) \cdot g_{r_\alpha - c_\alpha}(x_{c_\alpha}, x_{c_\alpha + 1}, \dots, x_{r_\alpha}).$$

ここで二つ目の総和記号では，次を満たす全ての $c_0, \dots, c_m, l_0, \dots, l_m, r_0, \dots r_m$ について和をとる．

- $\{0, \dots, d\} = \coprod_{\alpha=0}^{m} \{l_\alpha, l_\alpha + 1, \dots, r_\alpha\}$,
- $c_\alpha \in \{l_\alpha, l_\alpha + 1, \dots, r_\alpha\}$,
- $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_m$.

$P(R)$ は，この演算によって群になることが知られている．この群演算によって多重ゼータ値の antipodes を定義することができる．$\mathcal{Z}'$ を Motivic な多重ゼータ値で生成される環とし，$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'/\zeta(2)\mathcal{Z}'$ と置く．$F = (F_0, F_1, F_2, \dots) \in P(\mathcal{Z})$ を

$$F_d(x_0, \dots, x_d) := \sum_{k_1, \dots, k_d > 0} \zeta(k_1, \dots, k_d)(x_0 - x_1)^{k_1 - 1} \cdots (x_0 - x_d)^{k_d - 1}$$

で定める．収束の問題等を気にしなければ，形式的には

$$F_d(x_0, \dots, x_d) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} (x_0 - x_1 - m_1)^{-1} \cdots (x_0 - x_d - m_d)^{k_d - 1}$$

とかける．$*$ に関する F の逆元を $F^S \in P(\mathcal{Z})$ とする．このとき F^S の係数を多重ゼータ値の antipodes と呼び $\zeta^S(k_1, \dots, k_d)$ で表す．つまり $F^S = (F_0^S, F_1^S, F_2^S, F_2^S, \dots)$ とすると $\zeta^S(k_1, \dots, k_d)$ は

$$F_d^S = \sum_{k_1, \dots, k_d > 0} \zeta^S(k_1, \dots, k_d)(x_0 - x_1)^{k_1 - 1} \cdots (x_0 - x_d)^{k_d - 1}$$

で定義される．このとき環準同型 $\sigma : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ で任意の $k_1, \dots, k_d$ に対して $\sigma(\zeta(k_1, \dots, k_d)) = \zeta^S(k_1, \dots, k_d)$ となるものが存在することが知られている．

3. Evaluation map

この節では，第 1 節で導入した対象と第 2 節で導入した対象を結びつける，ある仮想的な写像について説明する．ただし，この仮想的な写像についてはまだ数学的に満足の行く定式化が出来ていない．そのため，第 3.3 節の内容は数学的に非常に曖昧である．

3.1. $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}^{d+1}$ を diagonal part $(1,\dots,1)\mathbb{Z}$ で割って得られる加群を M_d で表す．木 t に対して $U_t \subset M_d$ を

$$U_t := \{(m_0,\dots,m_d) \mid (i,j)\in E(t) \Rightarrow m_i < m_j\}$$

で定義する．M_d 上の $\mathbb{Z}$-値関数全体のなす加群を $\mathrm{Map}(M_d,\mathbb{Z})$ で表す．準同型 $\Phi : \tilde{T}_d \to \mathrm{Map}(M_d,\mathbb{Z})$ を $\Phi(\sum n_t t) \doteq \sum n_t \mathbf{1}_{U_t}$ で定義する．また，群環 $\mathbb{Z}[M_d]$ の $\mathrm{Map}(M_d,\mathbb{Z})$ への作用を

$$([a]f)(y) = f(y-a) \quad (a\in M_d, f\in \mathrm{Map}(M_d), y\in M_d)$$

で定義し，

$$R = \{f\in \mathrm{Map}(M_d,\mathbb{Z}) \mid \exists\alpha\in\mathbb{Z}[M_d]\setminus\{0\},\ \alpha f = 0\}$$

とおき，さらに $\overline{\mathrm{Map}}(M_d,\mathbb{Z}) = \mathrm{Map}(M_d,\mathbb{Z})/R$ と置く．このとき次が成立する．

$$\Phi(R_d) \subset R. \tag{3.1}$$

3.2. 準同型写像 $D : \tilde{T}_d \to \mathbb{Q}(x_1-x_0, x_2-x_0,\dots,x_d-x_0)$ を

$$D(\sum n_t t) = \sum n_t \prod_{(i,j)\in E(t)} \frac{1}{x_j - x_i}$$

で定める．部分分数分解

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} = 0$$

より

$$D(R_d) = 0 \tag{3.2}$$

が成立する．

3.3. $\mathcal{P}'$ を formal period の環とし，$\mathcal{P} = \mathcal{P}'/\pi\mathcal{P}'$ と置く．いま，数学的な正当化は出来ないが，準同型写像 $\mathrm{ev} : \tilde{T}_d\otimes\tilde{T}_d \to \mathcal{P}[[x_1-x_0,\dots,x_d-x_0]]$ を

$$\mathrm{ev}_d(t_a\otimes t_b) = \text{"}\sum_{(m_0,\dots,m_d)\in M_d} \Phi(t_a)(m_0,\dots,m_d)\cdot D(t_b)(x_0+m_0,\dots,x_d+m_d)\text{"}$$

で定める．このとき，関係式 (3.1)(3.2) より

$$\mathrm{ev}_d(R_d\otimes\tilde{T}_d + \tilde{T}_d\otimes R_d) = 0,$$

すなわち $\mathrm{ev}_d : T_d\otimes T_d \to \mathcal{P}[[x_1-x_0,\dots,x_d-x_0]]$ が well-defined となることが期待される．また F_d の形式的な和表示

$$F_d(x_0,\dots,x_d) := \sum_{0<m_1<\dots<m_d} (x_0-x_1-m_1)^{-1}\cdots(x_0-x_d-m_d)^{k_d-1}$$

から

$$F_d = \mathrm{ev}_d(t_{L,d}\otimes t_{F,d})$$

となることが期待される．

$$\mathrm{ev} = (\mathrm{ev}_0,\mathrm{ev}_1,\mathrm{ev}_2,\dots) : G \to P(\mathcal{P})$$

と置く．Goncharov 積の定義と，G 上の二項演算の定義から ev は群準同型となることが期待される．よって定理 1 より

$$\mathrm{ev}((-1)^d t_{F,d}\otimes t_{L,d}) = F_d^S \tag{3.3}$$

となる事が期待される．ev 及び antipoded な多重ゼータ値の定義を用いて (3.3) を書き換えると

$$\sum_{(m_0,\ldots,m_d)\in M_d}\prod_{i=0}^{d-1}\frac{1}{(x_{i+1}+m_{i+1}-x_i-m_i)} = \sum_{k_1,\ldots,k_d=1}^{\infty}\zeta^S(k_1,\ldots,k_d)\prod_{i=1}^{d}(x_i-x_0)^{k_i-1} \tag{3.4}$$

となる．式 (3.3) もしくは (3.4) の左辺は今のところ数学的にナンセンスな式であるが，何かしら意味を与える方法が存在するのではないかと，筆者は期待している．

REFERENCES

[gon] Goncharov, A. B.: *Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry.* Duke Math. J. 128, No. 2, 209–284 (2005).