数理解析研究所講究録
第2015巻 2017年 149-155

Magnus expansions and multiple zeta values

九州大学　小谷久寿
Hisatoshi Kodani
Kyushu University

平成 28 年 9 月 30 日

1 Introduction

Ihara は 1986 年に，数論と組紐群の理論との間の類似性を見出し，特に組紐群の Artin 表現の類似とみなされる Galois 表現の数論，すなわち，有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の射影直線 $\mathbb{P}^1$ 引く $\{0,1,\infty\}$ の数論的基本群への Galois 作用の研究を創始した ([Ih1]). そこでは 1 次元被約 Gassner 表現の Galois 類似を用いて，Jacobi 和を補間する普遍的なべき級数 (伊原べき級数) が構成されている (cf.[Ih2],[KMT]). この Galois 表現の理論の de Rham バージョンが多重ゼータ値や Drinfel'd associator ([D]) の世界であるので，本稿では，上記の類似の variant である次の問題について考察することにしよう：

数論	位相幾何学
(degenerated) associators	?
多重ゼータ値	?

本稿では，Massuyeau により導入された special expansion ([Ma]) を用いて上記の類似を構成する．特に，special expansion として Kontsevich 不変量から定まるものを考えると不変量を構成する際に associator を用いることから，多重ゼータ値の位相幾何類似が多重ゼータ値を用いて表されることを具体例を交えて紹介する．

2 純組紐群の Artin 表現

2.1 Artin 表現

ここでは，純組紐群と Artin 表現と呼ばれる自由群の自己同型群への表現について復習する．詳しくは，[B] を参照せよ．

PB_n を n 本糸純組紐群とする．PB_n は $A_{ij} = A_{ji}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ で生成され関係式

$$A_{rs}A_{ij}A_{rs}^{-1} = \begin{cases} A_{ij} & (\text{if } s < i \text{ or } i < r < s < j), \\ A_{rj}^{-1}A_{ij}A_{rj} & (\text{if } s = i), \\ A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{ij}A_{sj}A_{rj} & (\text{if } i = r < s < j), \\ A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{rj}A_{sj}A_{ij}A_{sj}^{-1}A_{rj}^{-1}A_{sj}A_{rj} & (\text{if } r < i < s < j). \end{cases}$$

を満たす群であることが知られている．

備考 2.1.1. $D_n := D^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ を 2 次元穴開き円盤としたとき，純組紐群 PB_n は $\{p_1 \ldots, p_n\}$ と境界 ∂D_n を各点ごとに固定する D_n の向きを保つ自己同相写像のイソトピー類のなす群 (写像類群) と同一視できる．

備考 2.1.1 より，純組紐群 PB_n は写像類群として穴開き円盤の基本群 $\pi_1(D_n) \cong F_n$ に自然に作用する．ここで，階数 n の自由群 F_n の生成元 x_i は p_i を時計回りに囲む小さなループのイソトピー類と同一視される．したがって，準同型写像

$$\mathrm{Art} : PB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}_0(F_n)$$

を得る．ここで，$\mathrm{Aut}_0(F_n)$ は生成元 x_i をその共役に写し，境界を代表するループ $x_1 \cdots x_n$ を固定するような自己同型写像からなる $\mathrm{Aut}(F_n)$ の部分群である．

2.2 Milnor 不変量

さて，各 $L \in PB_n$ に対して，$\mathrm{Art}(L)(x_i) = y_i(L)x_iy_i(L)^{-1}$ を満たし $y_i(L)$ のアーベル化の $[x_i] \in F_n^{ab}$ の係数が 0 になるような $y_1(L), \ldots, y_n(L)$ が一意的に存在するので，$\mathrm{Art}(L)$ は組 $(y_1(L), \ldots, y_n(L))$ により決定されることに注意する．この $y_i(L)$ を L の i-th ロンジチュードと呼ぶ．[1]

$\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ を $\mathbb{Z}$ 上の n 変数形式的べき級数環としたとき，Magnus 埋入 $\theta : F_n \hookrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ を対応 $x_i \mapsto 1 + X_i$ により定めると，各 $y_i(L)$ は L を閉じて得られる絡み目の i-th ロンジチュードとみなすことができるので，

$$\theta(y_i(L)) = 1 + \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant n} \mu(i_1 \cdots i_m i) X_{i_1} \cdots X_{i_m}$$

[1] ここでは，ロンジチュードを基本群の生成元で表した語を簡略化してそう呼んでいる．

の係数 $\mu(i_1\cdots i_m i)$ により L の Milnor 不変量が定まる ([Mi1],[Mi2]). 実際は, L を閉じて得られる絡み目の Milnor 不変量を得るためにはある $\mathbb{Z}$ のイデアルで割る必要があることに注意せよ.

3 Malcev 完備化と special expansions

この節では, 自由群の Malcev 完備化と Massuyeau により導入された special expansion について復習する.

3.1 Malcev 完備化

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする. $\mathbb{K}[F_n]$ を自由群 F_n の $\mathbb{K}$ 上の群環とし, $\epsilon:\mathbb{K}[F_n]\to\mathbb{K}$ を添加写像とする. $I:=\mathrm{Ker}\epsilon$ を添加イデアルとする. $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$ を $\mathbb{K}[F_n]$ の I-進完備化とする. このとき, $\mathbb{K}[F_n]$ 上の余積は $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$ 上の余積 Δ を誘導し, $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$ は Hopf 代数となる. I 進完備化 $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$ は $\widehat{I}_j:=\varprojlim_{k\geqslant j} I^j/I^k$ $(j\geqslant 0)$ によりフィルトレーションが入ることに注意する.

$\mathsf{M}(F_n)$ を $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$ の群的な元からなる部分群とし, $\mathfrak{m}(F_n)$ を $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$ の Lie 的な元からなる Lie 代数とする. $\mathsf{M}(F_n)$ と $\mathfrak{m}(F_n)$ にはフィルトレーションが誘導され, また, exp と log により $\mathsf{M}(F_n)$ と $\mathfrak{m}(F_n)$ の間には 1 対 1 の対応があることに注意する.

3.2 Special expansions

F_n を $x_1,\ldots,x_n$ で生成される階数 n の自由群とする. このとき, $H:=F_n^{\mathrm{ab}}\otimes\mathbb{K}$ と記す. $i=1,\ldots,n$ に対して, $X_i:=[x_i]\otimes_{\mathbb{Z}}1\in H$ とおく. $T(H)$ を H のテンソル代数とし, $\widehat{T}(H)$ をその次数に関する完備化とする, すなわち, $T(H):=\bigoplus_{k\geqslant 0}H^{\otimes k}$, $\widehat{T}(H):=\prod_{k\geqslant 0}H^{\otimes k}$ とする. このとき, $\widehat{T}(H)$ は $\mathbb{K}$ 上の n 変数形式的べき級数環 $\mathbb{K}\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ と同一視されることに注意する. $\mathfrak{L}(H)$ を H で生成される次数付き自由 Lie 代数の次数に関する完備化とする. このとき, special expansion は次で定義される.

Definition 3.2.1. ([Ma]) 同型写像 $\theta:\widehat{\mathbb{K}[F_n]}\xrightarrow{\sim}\widehat{T}(H)$ が次の条件 (1) と (2) を満たすとき, **special expansion** と呼ぶ:
(1) $i=1,\ldots,n$ に対して, ある $U_i\in\exp(\mathfrak{L}(H))$ が存在して $\theta(x_i)=U_i\exp(X_i)U_i^{-1}$ と書ける.
(2) $\theta(x_1\cdots x_n)=\exp(X_1+\cdots+X_n)$

備考 3.2.2. $\theta:\widehat{\mathbb{K}[F_n]}\xrightarrow{\sim}\widehat{T}(H)$ を special expansion としたとき, θ を $\mathfrak{m}(F_n)$ に制限することにより, フィルトレーションを保つ完備 Lie 代数の同型

$$\theta:\mathfrak{m}(F_n)\xrightarrow{\sim}\mathfrak{L}(H)$$

を得，$\mathsf{M}(F_n)$ に制限することにより，フィルトレーションを保つ群同型

$$\theta : \mathsf{M}(F_n) \xrightarrow{\sim} \exp(\mathfrak{L}(H))$$

を得る．

備考 3.2.3. 純組紐群 PB_{n+1} の半直積分解 $PB_{n+1} = F_n \rtimes PB_n$ を通して，PB_{n+1} の Kontsevich 不変量 Z を自由部分群 F_n に制限することにより，special expansion θ^Z を構成できることが知られている．このようにして定まる special expansion は Drinfel'd associator により記述される (cf. [HM],[AET],[Ma]).

4 純組紐群の special Artin 表現と special Milnor value

4.1 Special Artin 表現

この節では，special expansion を通して，純組紐群の完備次数付き自由 Lie 代数の自己同型群への表現を構成する．

任意の $\psi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ は完備 Hopf 代数 $\widehat{\mathbb{K}[F_n]}$ の自己同型 $\widehat{\psi}$ を誘導する．これを $\mathsf{M}(F_n)$ に制限することにより同型写像 $\mathsf{M}(\psi) : \mathsf{M}(F_n) \to \mathsf{M}(F_n)$ を得る．Artin 表現 Art と M を合成することにより準同型

$$\mathsf{M}(\mathrm{Art}) : PB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{M}(F_n)); \quad L \mapsto \mathsf{M}(\mathrm{Art}(L))$$

を得る．

$\theta : \widehat{\mathbb{K}[F_n]} \xrightarrow{\sim} \widehat{T}(H)$ を special expansion としたとき，備考 3.2.2 に注意すると，任意の $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathsf{M}(F_n))$ に対して自己同型 $\theta^*(\psi) := \theta \circ \psi \circ \theta^{-1} \in \mathrm{Aut}(\exp(\mathfrak{L}(H)))$ が定まる．したがって，準同型

$$\mathrm{Art}^\theta : PB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(\exp(\mathfrak{L}(H))); \quad L \mapsto \theta^*(\mathsf{M}(\mathrm{Art}(L)))$$

を得る．このとき，次が成り立つ．

Proposition 4.1.1. ([K]) θ を special expansion とする．任意の $L \in PB_n$ に対して，

$$\mathrm{Art}^\theta(L)(\exp(X_i)) = (U_i^{-1}\theta(y_i(L))U_i)\exp(X_i)(U_i^{-1}\theta(y_i(L))U_i)^{-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$
$$\mathrm{Art}^\theta(L)(\exp(X_1 + \cdots + X_n)) = \exp(X_1 + \cdots + X_n)$$

が成り立つ．ここで，$y_i(L)$ は i-th ロンジチュードであり，$U_i \in \exp(\mathfrak{L}(H))$ は $\theta(x_i) = U_i \exp(X_i) U_i^{-1}$ で与えられる．

したがって，$L \in PB_n$ に対して，$\mathrm{Art}^\theta(L)(\exp(X_i)) = \exp(Y_i(L))\exp(X_i)\exp(Y_i(L))^{-1}$ とおくと，$\mathrm{Art}^\theta(L)$ は n 個のべき級数の組 $(Y_1(L), \ldots, Y_n(L))$ により決定される．

4.2 Special Milnor value

この節では，前節で構成した special Artin 表現を用いて，associator との類似を見る．associator については [F2] を参照せよ．

$GRT_1(\mathbb{K})$ を degenerated associator のなす群とする．このとき，$(0,U) \in GRT_1(\mathbb{K})$ を自己同型写像 $\psi_{(0,U)}(\exp(X_1)) = \exp(X_1), \psi_{(0,U)}(\exp(X_2)) = U^{-1}\exp(X_2)U$ に対応させることにより，$GRT_1(\mathbb{K})$ は $\mathrm{Aut}(\exp(\mathfrak{L}(H))$ $(n=2)$ の部分群とみなすことができる．ここで，適切に基底を取り替えることにより，$\mathrm{Aut}(\exp(\mathfrak{L}(H)))$ の special automorphism[2] のなす群の部分群に写すことができる．

したがって，$\mathrm{Art}^\theta(PB_n)$ を $GRT_1(\mathbb{K})$ の類似とみなし，$\exp(Y_i(L))$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ を associator の類似とみなそう．θ^Z を備考 3.2.3 における Drinfel'd associator Φ を用いて構成される special expansion としたとき，$L \in PB_n$ に対して

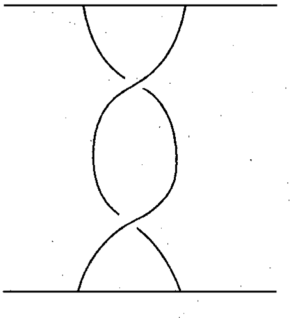
$$\exp(Y_i(L)) = 1 + \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant n} \mu^\Phi(i_1 \cdots i_m i) X_{i_1} \cdots X_{i_m}$$

の係数 $\mu^\Phi(i_1 \cdots i_m i)$ を多重指標 $(i_1 \cdots i_m i)$ と Φ に関する L の **special Milnor value** と呼ぶことにする．ただし，これは実質的には L の Kontsevich 不変量の係数を求めていることと同値であることに注意する．また，基底と q 構造の取り方にも依存していることにも注意する．

KZ 方程式から定まる Drinfel'd associator Φ_{KZ} の係数が多重ゼータ値であることより ([LM],[F1])，本稿では $L \in PB_n$ と多重指標 I に対して $\mu^\Phi(I)$ を多重ゼータ値の位相幾何類似とみなそう．[3]

最後に，この $\mu^\Phi(I)$ を $\Phi = \Phi_{\mathrm{KZ}}$ の場合の具体的な純組紐に対する計算例を紹介する．

例 4.2.1. $L_H \in PB_n$ を以下の純組紐とする：



[2]ここでは，$\varphi \in \mathrm{Aut}(\exp(\mathfrak{L}(H)))$ が $\varphi(\exp(X_i)) = U_i \exp(X_i) U_i^{-1} (1 \leqslant i \leqslant n)$, $\varphi(\exp(X_1 + \cdots + X_n)) = \exp(X_1 + \cdots + X_n)$ を満たすとき special automorphism と呼んでいる．ここで，$U_i \in \exp(\mathfrak{L}(H))$

[3]ただし，実際は Φ_{KZ} は $GRT_1(\mathbb{C})$ の元ではないことに注意しておく．

このとき，ロンジチュードは $y_1(L_H)=x_1x_2x_1^{-1}$，$y_2(L_H)=x_1$ で与えられ，Φ_{KZ} から定まる special expansion θ^Z は生成元 x_1,x_2 に対して，

$$\theta^Z(x_1)=(\Phi_{\mathrm{KZ}}(-X_1-X_2,X_2)^{-1}\exp(-\frac{1}{2}X_2)\Phi_{\mathrm{KZ}}(-X_1-X_2,X_2))\exp(X_1)$$
$$\cdot(\Phi_{\mathrm{KZ}}(-X_1-X_2,X_2)^{-1}\exp(-\frac{1}{2}X_2)\Phi_{\mathrm{KZ}}(-X_1-X_2,X_2))^{-1}$$
$$\theta^Z(x_2)=\Phi_{\mathrm{KZ}}(-X_1-X_2,X_2)^{-1}\exp(X_2)\Phi_{\mathrm{KZ}}(-X_1-X_2,X_2)$$

と計算されるので[4]

$$\begin{aligned}Y_1(L_H)=&X_2+[X_1,X_2]+\frac{1}{2}[X_1,[X_1,X_2]]+\frac{\zeta(2)}{2(2\pi i)^2}[[[X_1,X_2],X_2],X_2]\\&+\frac{\zeta(2)}{(2\pi i)^2}[[[X_1,X_2],X_2],X_1]+\frac{1}{6}[X_1,[X_1,[X_1,X_2]]]\\&+\frac{\zeta(2)}{2(2\pi i)^2}[[[X_1,X_2],X_2],X_2]-\frac{\zeta(3)}{(2\pi i)^3}[[X_1,[X_1,X_2]],X_2]+(\text{次数 5 以上の項}),\\Y_2(L_H)=&X_1-\frac{1}{2}[X_2,X_1]+\frac{1}{8}[X_2,[X_2,X_1]]+\frac{\zeta(2)}{(2\pi i)^2}[[X_1,X_2],X_1]\\&-\frac{\zeta(3)}{(2\pi i)^3}[[X_1,[X_1,X_2]],X_1]+(\text{次数 5 以上の項})\end{aligned}$$

を得る．

このように，純組紐の special Milnor value は多重ゼータ値を用いて表示されることがわかる．

参考文献

[AET] A. Alekseev, B. Enriquez, C. Torossian, *Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **112** (2010), 143–189.

[B] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of Mathematics Studies, **82**. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[D] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Algebra i Analiz **1** (1989) 114–148 (in Russian), English translation in Leningrad Math. J. **1** (1990) 1419–1457.

[F1] H. Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Vol **39**. no 4. (2003). 695–720.

[4]ここで，Kontsevich 不変量は純組紐の上下に左寄せの q 構造 $(\cdots((++)+)\cdots)$ を入れて定義していることに注意する．

[F2] 古庄英和著; 小谷久寿, 新甫洋史記述, 結び目と Grothendieck-Teihmüller 群, MI lecture note series, vol. **68**, 2016.

[HM] N. Habegger, G. Masbaum, *The Kontsevich integral and Milnor's invariants*, Topology 39 (2000), no. **6**, 1253–1289.

[Ih1] Y. Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 1, 43–106.

[Ih2] Y. Ihara, *Arithmetic analogues of braid groups and Galois representations*, Braids (Santa Cruz, CA, 1986), 245–257, Contemp. Math., **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[K] H. Kodani, *Group-like expansions and invariants of string links*, arXiv:1604.03213.

[KMT] H. Kodani, M. Morishita, Y. Terashima, *Arithmetic topology in Ihara theory*, arXiv:1608.07926, 2016.

[LM] T. T. Q. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J., **142** (1996), 39–65.

[Ma] G. Massuyeau, *Formal descriptions of Turaev's loop operations*, arXiv:1511.03974.

[Mi1] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59**, 1954, 177–195.

[Mi2] J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957, 280–306.

[Q] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. (2), **90**, 205–295, 1969.