数理解析研究所講究録
第2016巻 2017年 1-7

J.H.C. Whiteheadの定理の同変デファイナブル版について

川上智博
和歌山大学教育学部数学教室

1 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R,+,\cdot,<)$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,...)$ において、J.H.C. Whitehead の定理の同変デファイナブル版について考察する。順序極小構造は、実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{M}=(\mathbb{R},+,\cdot,<,\ldots)$ に限っても、[10] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブル集合・デファイナブル写像に関して、[2], [3] などに性質がまとめられている。また、[11] では、実数体 $\mathbb{R}$ の場合において、順序極小構造より一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,...)$ で考えるものとする。

2 準備

R を実閉体とする。

構造 $\mathcal{N}=(R,(f_i),(L_j),(c_k))$ とは、以下のデータで定義されるものである。

1. 集合 R を $\mathcal{N}$ の underlying set または universe という。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 03C64.

Key Words and Phrases. 順序極小構造, 実閉体, J.H.C. Whitehead の定理、デファイナブリーコンパクトデファイナブル群.

2. 関数の集合 $\{f_i | i \in I\}$、ただし $f_i : R^{n_i} \to R, n_i \geq 1$。

3. 関係の集合 $\{L_j | j \in J\}$、ただし $L_j \subset R^{m_j}, m_j \geq 1$。

4. 特別な元の集合 $\{c_k | k \in K\} \subset R$。各 c_k を定数という。

添字集合 I, J, K は、空集合でもかまわない。
f (L) が m 変数関数 (m 変数関係) とは、$f : R^m \to R$ $(L \subset R^m)$ となることである。
項とは、以下の３つの規則にしたがって得られる有限列のことである。

1. 定数は項である。

2. 変数は項である。

3. f が m 変数関数かつ $t_1, \ldots, t_m$ が項ならば、$f(t_1, \ldots, t_m)$ は項である。

論理式とは、変数、関数、関係、論理記号、括弧、コンマ、$\exists, \forall$ からなる有限列で、以下の３つの規則にしたがって得られるものである。

1. 任意の二つの項 t_1, t_2 に対して、$t_1 = t_2$ と $t_1 < t_2$ は論理式である。

2. L が m 変数関係かつ $t_1, \ldots, t_m$ が項ならば、$L(t_1, \ldots, t_m)$ は論理式である。

3. ϕ と ψ が論理式ならば、$\neg\phi$, $\phi \vee \psi$ と $\phi \wedge \psi$ は論理式である。ϕ が論理式かつ v が変数ならば、$(\exists v)\phi$ と $(\forall v)\phi$ は論理式である。

R^n の部分集合 X が $\mathcal{N}$ においてデファイナブルとは、論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ と $b_1, \ldots, b_m \in R$ が存在して、$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in R^n | \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ が $\mathcal{N}$ で成り立つ $\}$ となることである。このとき、X をデファイナブル集合という。
$\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \cdots)$ が順序極小構造 (o-minimal structure) とは、R の任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、開区間とは、$(a, b)_R = \{x \in R | a < x < b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ を表すものとする。
実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ は、順序極小構造であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。
R の位相は、開区間を開基とする位相とする。R^n の位相は、積位相とする。このとき、R^n はハウスドルフ空間となる。

実数係数 Puiseux 級数 $\mathbb{R}[X]^\wedge$、すなわち、$\sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{q}}, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{alg} = \{x \in \mathbb{R} | x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である $\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

定理 2.1. *(1)* 実閉体の標数は 0 である。

(2) 可算以上の任意の濃度 κ に対して、2^κ 個の同型でない実閉体で濃度 κ のものが存在する。

定義 2.2. $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f: X \to Y$ がデファイナブル写像とは、f のグラフ $(\subset R^n \times R^m)$ がデファイナブル集合となることである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル写像 $f : (a,b)_R \to X$ に対して、極限点 $\lim_{x \to a+0} f(x), \lim_{x \to b-0} f(x)$ が X 内に存在することである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリー連結とは、X の二つの空でないデファイナブル開集合 Y, Z で、$X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクト集合であるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクト集合とは限らない。連結デファイナブル集合は、デファイナブリー連結集合であるが、デファイナブリー連結集合は、連結集合とは限らない。たとえば、$R = \mathbb{R}_{alg}$ ならば、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | 0 \le x \le 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブリー連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

定理 2.3 ([9])**.** R^n のデファイナブル集合 X に対して、X がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

コンパクト集合、連結集合の連続写像のよる像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

命題 2.4. $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合、$f : X \to Y$ をデファイナブル写像とする。X がデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* ならば、$f(X)$ はデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* である。

例 2.5. *(1)* $\mathcal{N} = (\mathbb{R}_{alg}, +, \cdot, <)$ とする。$f : \mathbb{R}_{alg} \to \mathbb{R}_{alg}, f(x) = 2^x$ は定義されない *([12])*。

(2) $\mathcal{N}=(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ とする。$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。また、正弦関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\sin x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。

3 J.H.C. Whiteheadの定理

$G\subset R^n$ がデファイナブル群とは、G が群であって、デファイナブル集合であり、群演算 $G\times G\to G, G\to G$ がデファイナブル写像となることである。$G\subset GL(n,R)$ とならないデファイナブル群が存在することが知られている。

G をデファイナブル群とする。デファイナブル G 集合とは、デファイナブル集合 X と G 作用 $\phi:G\times X\to X$ からなる組 (X,ϕ) であって、ϕ がデファイナブル写像となるものである。ここでは、(X,ϕ) と書く代わりに X と書く。

$X\subset R^n, Z\subset R^m$ をデファイナブル集合とし、$f:X\to Z$ をデファイナブル写像とする。f がデファイナブル同相写像とは、デファイナブル写像 $h:Z\to X$ が存在して、$f\circ h=id_Z$ かつ $h\circ f=id_X$ となることである。

X,Z をデファイナブル G 集合とする。デファイナブル写像 $f:X\to Z$ がデファイナブル G 写像とは、f が G 写像となることである。デファイナブル G 写像 $f:X\to Z$ がデファイナブル G 同相写像とは、デファイナブル G 写像 $h:Z\to X$ が存在して、$f\circ h=id_Z$ かつ $h\circ f=id_X$ となることである。

デファイナブル G 写像 $f,h:X\to Y$ がデファイナブリー G ホモトピックとは、デファイナブル G 写像 $H\times[0,1]_R\to Y$ が存在して、任意の $x\in X$ に対して $H(x,0)=f(x), H(x,1)=h(x)$ となることである。ただし、$[0,1]_R=\{x\in R|0\leq x\leq 1\}$ とする。デファイナブル G 写像 $f:X\to Y$ がデファイナブル G ホモトピー同値写像とは、デファイナブル G 写像 $h:Y\to X$ が存在して、$f\circ h$ と id_Y がデファイナブリー G ホモトピックかつ $h\circ f$ と id_X デファイナブリー G ホモトピックになることである。

J.H.C. Whitehead は、CW 複体間の弱ホモトピー同値写像は、ホモトピー同値写像であることを証明した ([13])。その同変版が松本 ([8]) によって証明された。そのデファイナブル版が Baro と Otero([1]) によって証明された。

定理 3.1 (デファイナブル商空間の存在 ([2])). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群、X をデファイナブル G 集合とする。このとき、X/G はデファイナブル集合として存在して、射影 $\pi:X\to X/G$ は、全射デファイナブリー固有デファイナブル写像である。

定理 3.1 より、H がデファイナブリーコンパクトデファイナブル群 G のデファイナブル部分群ならば、G/H はデフィナブル集合で、標準的な G 作

用 $G \times G/H \to G/H, (g, g'H) \mapsto gg'H$ によって、G/H はデフィナブル G 集合となる。

デファイナブル G CW 複体の定義と結果を思い出そう ([6], [4])。

定義 3.2 ([6]). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。

(1) デファイナブル G CW 複体とは、有限 G CW 複体 $\{X, \{c_i | i \in I\}\}$ であって、以下の *3* 条件を満たすものである。

(a) X の実現 $|X|$ はデファイナブル G 集合である。

(b) 各開 G セル c_i の特性写像 $f_{c_i} : G/H_{c_i} \times \Delta \to \overline{c_i}$ はデファイナブル G 写像であり、 $f_{c_i}|G/H \times Int\,\Delta : G/H \times Int\,\Delta \to c_i$ はデファイナブル G 同相写像である。ただし H_{c_i} は G のデファイナブル部分群, Δ は標準的閉単体, $\overline{c_i}$ は c_i の X における閉包、$Int\,\Delta$ は Δ の内部を表すとする。

(c) 各 c_i に対して、$\overline{c_i} - c_i$ は開 G セルの有限和である。

(2) X, Y をデファイナブル G CW 複体とする。胞体 G 写像 $f : X \to Y$ がデファイナブルとは、$f : |X| \to |Y|$ がデファイナブルであることである。

G と各標準的閉単体はデファイナブリーコンパクトなので、デファイナブル G CW 複体はデファイナブリーコンパクトである。

G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。群準同型写像 $f : G \to O_n(R)$ が表現とは、f がデファイナブルであることである。ただし $O_n(R)$ は R の n 次直交群とする。G の表現空間とは、G の表現から誘導された直交作用をもつ R^n のことである。

定理 3.3 ([4]). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。X を G 表現空間の G 不変デファイナブル部分集合とし、Y を X のデファイナブル閉 G 部分集合とする。このとき、G の表現空間 Ξ 内のデファイナブル G CW 複体 Z と Z の G CW 部分複体 W とデファイナブル G 写像 $f : X \to Z$ が存在して、 以下の条件を満たす。

1. f は X と Y を Z と W の開 G セルを除いて得られる G 不変デファイナブル部分集合 Z_1 と W_1 の上にデファイナブリー G 同相的に写す。

2. 射影 $p : Z \to Z/G$ はデファイナブル胞体写像である。

3. 軌道空間 Z/G は $p(Z_1)$ と $p(W_1)$ を分割する有限単体複体である。

4. Z の各開 G セル c に対して、$p|\overline{c} : \overline{c} \to p(\overline{c})$ はデファイナブル切断 $s : p|(\overline{c}) \to \overline{c}$ をもつ。ただし $\overline{c}$ は Z における c の閉包を表すとする。

さらに、X がデファイナブリーコンパクトならば、$Z = f(X)$ かつ $W = f(Y)$ が成り立つ。

系 3.4. G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。X を G の表現空間の G 不変デファイナブリーコンパクトデファイナブル部分集合とする。このとき、X はデファイナブル G CW 複体である。

G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。X をデファイナブル G 集合、Y を X のデフィナブル G 部分集合とする。組 (X,Y) がデファイナブル G ホモトピー拡張性をもつとは、デファイナブル G 写像 $f : X \to Z$ とデファイナブル G ホモトピー $F : Y \times [0,1]_R \to Z$ で、各 $y \in Y$ に対して $F(y,0) = f(y)$ となるとき、デファイナブル G ホモトピー $H : X \times [0,1]_R \to Z$ が存在して、各 $x \in X$ に対して $H(x,0) = f(x)$ かつ $H|Y \times [0,1]_R = F$ となることである。

定理 3.5 ([7])**.** G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。X をデファイナブル G 集合、Y を X のデファイナブル閉 G 部分集合とすると、(X,Y) はデファイナブル G ホモトピー拡張性をもつ。

通常のホモトピー群と同様にデファイナブルホモトピー群を考えることができる ([1])。

以下の結果を得た。

定理 3.6 ([5])**.** G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とし、$\phi : (X,A) \to (Y,B)$ をデファイナブル G CW 複体対の間のデファイナブル G 写像とする。X^H, A^H と B^H が空でなく、誘導写像 $\phi_* : \pi_n(X^H) \to \pi_n(Y^H)$ と $\phi_* : \pi_n(A^H) \to \pi_n(B^H)$ が、$1 \le n \le \max(\dim X, \dim Y)$ と X と Y に現れるアイソトロピー群 H に対して、全単射ならば、$\phi : (X,A) \to (Y,B)$ はデファイナブル G ホモトピー同値写像である。

References

[1] E. Baro and M. Otero, *On o-minimal homotopy groups*, Q. J. Math. **61** (2010), 275–289.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[4] T. Kawakami, *A definable strong G retract of a definable G set in a real closed field*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **61** (2011), 7–11.

[5] T. Kawakami, *An equivariant definable version of a theorem of J.H.C. Whitehead*, preprint.

[6] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **54** (2004), 1–15.

[7] T. Kawakami, *Definable G homotopy extensions*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **64** (2014), 9–11.

[8] T. Matumoto, *On G-CW complexes and a theorem of J. H. C. Whitehead*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **18** (1971), 363–374.

[9] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.

[10] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.

[11] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.

[12] R. Wencel, *Weakly o-minimal expansions of ordered fields of finite transcendence degree*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 109–116.

[13] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I*, Bull. Amer. Math. Soc. **55**, (1949), 213–245.