数理解析研究所講究録
第2016巻 2017年 178-181

グラフに対応するトーリック多様体のコホモロジー表現 *

大阪市立大学・数学研究所 † 畑中　美帆
Miho Hatanaka
Osaka City University
Advanced Mathematical Institute

1　トーリック多様体のコホモロジー表現問題

G を連結な単純グラフ，その自己同型群を $\mathrm{Aut}(G)$ とする．$X(G)$ を G から構成されるトーリック多様体とすると，G への $\mathrm{Aut}(G)$ 作用は $X(G)$ への $\mathrm{Aut}(G)$ 作用に誘導され，コホモロジー環 $H^*(X(G))$ の $\mathrm{Aut}(G)$ 表現ができる．本講演では，このコホモロジー表現がどのような表現であるのかについて考察する．しかし，一般の単純グラフで考えることは困難であるため，グラフを完全グラフと完全グラフから辺を 1 本除いたグラフの 2 種類に特定して考える．完全グラフの場合はすでに Procesi による先行研究 ([2]) がある．

定義 1　$R(X(G);t)$ を t^i の係数を $2i$ 次のコホモロジー群 $H^{2i}(X(G))$ の $\mathrm{Aut}(G)$ 表現とする t の多項式とする．

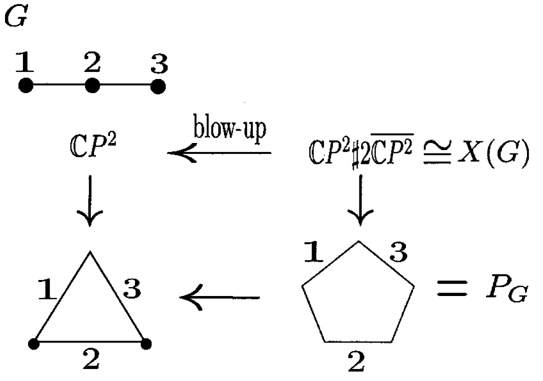
* 出典：「新しい変換群論の幾何」数理解析研究所講究録.
† 〒558-8585 大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138
(独) 日本学術振興会特別研究員 PD

2　連結単純グラフからの graph associahedron の構成方法

G からトーリック多様体 $X(G)$ は以下のように構成する．$V(G)$ を G の頂点集合とする．

$$B(G) := \{I \subset V(G) \mid G|I : \text{connected}\}$$

と定義し，*graphical building set* という．例えば G が下図の 3 頂点パスグラフの時，graphical building set $B(G)$ は $B(G) = \{1,2,3,12,23,123\}$ となる．ここで，1 は集合 $\{1\}$，12 は集合 $\{1,2\}$(他同様) を表す．次に，graph associahedron P_G を構成する．$n+1$ 頂点を持つ単純グラフ G に対して，n 単体を用意し，各 facet にグラフの頂点を対応させる．$B(G)$ の $V(G)$ 以外の集合に対応する n 単体の面を次元の小さいものからカットしてできる多面体が graph associahedron P_G である．graph associahedron は Delzant polytope になり，対応するトーリック多様体が存在する．これがグラフ G に対応するトーリック多様体 $X(G)$ であり，複素次元は n である．多面体の面をカットすることは，その上のトーリック多様体を blow-up することに対応する．下図は 3 頂点パスグラフと，その graph associahedron，その上のトーリック多様体である．$X(G)$ は $\mathbb{C}P^2$ の 2 点 blow-up である．



3　完全グラフに対応するトーリック多様体のコホモロジー表現

G が 4 頂点完全グラフ K_4 の場合，graphical building set $B(K_4)$ は以下のようになる．

Procesi は G が $n+1$ 頂点を持つ完全グラフ K_{n+1} の場合に $\mathrm{Aut}(G)$ 表現を記述した ([2]). この場合の $\mathrm{Aut}(G)$ は対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ である. G から構成される実トーリック多様体のコホモロジー環の $\mathfrak{S}_{n+1}$ 表現は Henderson により記述された ([1]). 対称群 $\mathfrak{S}_m$ の既約表現は, m 個の箱を持つヤング図形と全単射対応がある. ヤング図形 λ の i 行目の箱の数を λ_i とすると, λ を m の分割 $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ として表すことができる. λ に対応する $\mathfrak{S}_m$ の既約表現を S_λ で表す.

完全グラフ K_{n+1} に対応するトーリック多様体 $X(K_{n+1})$ を permutohedral variety, その下にある graph associahedron $P_{K_{n+1}}$ を permutohedron という. $P_{K_{n+1}}$ は n 単体の全ての面をカットしてできる多面体であり, $X(K_{n+1})$ は $\mathbb{C}P^n$ を何度か blow-up してできる;

$$\mathbb{C}P^n \xleftarrow[\text{along } X^0]{\text{blow-up}} Y_0 \xleftarrow[\text{along } X^1]{\text{blow-up}} Y_1 \leftarrow \cdots \leftarrow Y_{n-3} \xleftarrow[\text{along } X^{n-2}]{\text{blow-up}} Y_{n-2} \cong X(K_{n+1}).$$

ここで, X^i は複素 i 次元のいくつかの permutohedral variety $X(K_{i+1})$ の非交和であり, Y_i は n 単体の i 次元以下の全ての面をカットしてできる多面体の上にあるトーリック多様体である. $\mathbb{C}P^n$ と各 Y_i には対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ が作用する. よって, $\mathfrak{S}_{n+1}$ 加群として以下が成立する;

$$H^*(X(K_{n+1})) \cong H^*(\mathbb{C}P^n) \oplus \left(\bigoplus_{k=0}^{n-2} \left(H^*(X^k) \otimes H^+(\mathbb{C}P^{n-k-1})\right)\right).$$

ここで, 複素射影空間のコホモロジー群への対称群の作用は自明である. この同型を使って, Procesi は $H^*(X(K_{n+1}))$ の $\mathfrak{S}_{n+1}$ 表現を以下のように記述した;

$$\begin{aligned} R(X(K_{n+1});t) =& S_{(n+1)}(1+t+\cdots+t^n) \\ &+ \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{k+1}\times\mathfrak{S}_{n-k}}^{\mathfrak{S}_{n+1}} R(X(K_{k+1});t) \boxtimes S_{(n-k)}\right) \left(\sum_{i=1}^{n-k-1} t^i \right) \right\}. \end{aligned}$$

4 主結果

以下, G を K_{n+1} から辺 ij を除いたグラフとする. G の自己同型群は $\mathfrak{S}_{n-1}\times\mathfrak{S}_2$ である. Procesi の方法と同様にして, 表現 $R(X(G);t)$ も求めることができる. $B(G) = B(K_{n+1}) \setminus \{ij\}$ であり, これは $X(G)$ が上の X^{n-2} の連結成分が 1 つ少ない部分多様体 $X^{\tilde{n}-2}$ で blow-up してできることを意味する. よって, 以下が $\mathfrak{S}_{n-1}\times\mathfrak{S}_2$ 加群として成立する;

$$H^*(X(G)) \cong H^*(Y_{n-3}) \oplus \left(H^*(X^{\tilde{n}-2}) \otimes H^+(\mathbb{C}P^1)\right).$$

$H^+(\mathbb{C}P^1)$ への $\mathfrak{S}_{n-1}\times\mathfrak{S}_2$ 表現は自明である．この同型を使うと，$R(X(G);t)$ は以下のように表せる;

$$
\begin{aligned}
R(X(G);t) &= S_{(n-1)} \boxtimes S_{(2)}\,(1+t+\cdots+t^n)\\
&+\sum_{k=0}^{n-3}\left\{\mathrm{Res}_H^{\mathfrak{S}_{n+1}}\left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{k+1}\times\mathfrak{S}_{n-k}}^{\mathfrak{S}_{n+1}} R(X(K_{k+1});t)\boxtimes S_{(n-k)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-k-1} t^i\right)\right\}\\
&+\left\{\mathrm{Ind}_{H_1}^{H}\left(\mathrm{Res}_{H_1}^{\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_{n-1}} S_{(2)}\boxtimes R(X(K_{n-1});t)\right)\right.\\
&\quad\left.+\mathrm{Ind}_{H_2}^{H}\left(\mathrm{Res}_{H_2}^{\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_{n-1}} S_{(2)}\boxtimes R(X(K_{n-1});t)\right)\right\}t.
\end{aligned}
$$

ここで，$H=\mathfrak{S}_{n-1}\times\mathfrak{S}_2$，$H_1=\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_{n-3}\times\mathfrak{S}_2$，$H_2=\mathfrak{S}_1\times\mathfrak{S}_1\times\mathfrak{S}_1\times\mathfrak{S}_{n-2}$ である．

参考文献

[1] A. Henderson, *Rational cohomology of the real Coxeter toric variety of type A*, in Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics, and Topology, Publications of the Scuola Normale Superiore, no. 14, A. Bjrner, F. Cohen, C. De Concini, C. Procesi and M. Salvetti (eds.), Pisa, 2012, 313-326.

[2] C. Procesi, *The toric variety associated to Weyl chambers*, in Mots, Lang. Raison. Calc., Hermès, Paris, 1990, 153-161.