数理解析研究所講究録
第2017巻 2017年 12-32

コンパクト対称三対と半単純擬リーマン対称対の双対性およびその応用*

東京理科大学 馬場 蔵人 (Kurando Baba) †
Tokyo University of Science

概要. リーマン対称空間論において，コンパクト型リーマン対称空間 (の局所同型類) と非コンパクト型リーマン対称空間 (の局所同型類) の間には双対性が成り立つことが知られている. 本研究の目的はその一般化として可換な半単純コンパクト対称三対と半単純擬リーマン対称対の間に双対性を与えることである. さらにその応用として半単純擬リーマン対称対の分類 ([4]) の系統的な別証明および, Hermann 型作用の軌道の幾何について得られた結果を紹介する. この研究は井川 治氏 (京都工芸繊維大学)・笹木 集夢氏 (東海大学) との共同研究 ([1], [2], [3]) に基づく.

1 一般化された双対性

1.1 準備

$\mathfrak{g}_u$ を半単純コンパクトリー環とし, θ_1, θ_2 を $\mathfrak{g}_u$ 上の対合とする. このとき, 三つ組 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ は半単純コンパクト対称三対とよばれる. 半単純コンパクト対称三対の全体に次の同値関係 $\equiv$ を定める : $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \equiv (\mathfrak{g}'_u, \theta'_1, \theta'_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ リー環の同型写像 $\varphi : \mathfrak{g}_u \to \mathfrak{g}'_u$ で $\theta'_i = \varphi\theta_i\varphi^{-1}\,(i = 1, 2)$ を満たすものが存在する. また, 半単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ が $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ を満たすとき, $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ は可換な半単純コンパクト対称三対とよばれる. 同値関係 $\equiv$ の定義より, $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ が可換ならばこれと同値な半単純コンパクト対称三対も可換であることに注意する. 可換な半単純コンパクト対称三対の全体から成る集合を $\mathcal{A}$ で表す. また, コンパクト型リーマン対称対 $(\mathfrak{g}_u, \theta)$ は $(\mathfrak{g}_u, \theta, \theta)$ によって可換な半単純コンパクト対称三対と見なす.

一方, $\mathfrak{g}$ を実半単純リー環とし, σ を $\mathfrak{g}$ 上の対合とする. このとき, $(\mathfrak{g}, \sigma)$ は半単純擬リーマン対称対とよばる. 半単純擬リーマン対称対の全体に次の同値関係 $\equiv$ を定める : $(\mathfrak{g}, \sigma) \equiv (\mathfrak{g}', \sigma') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ リー環の同型写像 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ で $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ を満たすものが存在する. ここで, σ と可換な $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合が存在することが知られていることに注意する ([4]). 半単純擬リーマン対称対の全体から成る集合を $\mathcal{B}$ で表す. また, σ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合であるときは, $(\mathfrak{g}, \sigma)$ は非コンパクト型リーマン対称対を与えており, σ と可換な Cartan 対合は σ 自身である.

*RIMS 研究集会「部分多様体の微分幾何学的研究」(研究代表者 : 山田 拓海氏 (島根大学))

†E-mail: baba_kurando@ma.noda.tus.ac.jp

1.2 一般化された双対性

この節では $\mathcal{A}/_\equiv$ と $\mathcal{B}/_\equiv$ の間に一対一対応を構成する．

① 写像 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の構成： $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}_u^{-\theta_1} (\subset \mathfrak{g}_u^{\mathbb{C}})$ は θ_1, θ_2 不変な半単純リー環を与える[1]．$\sigma := \theta_2 \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ で定めたとき，$(\mathfrak{g}, \sigma)$ は半単純擬リーマン対称対となる．したがって，$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}; (\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \mapsto (\mathfrak{g}, \sigma)$ が定義された．ここで，$\theta := \theta_1 \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ は σ と可換な Cartan 対合となっていることに注意する．また，コンパクト型リーマン対称対 $(\mathfrak{g}_u, \theta) = (\mathfrak{g}_u, \theta, \theta)$ に対して $(\mathfrak{g}, \sigma) = \Phi(\mathfrak{g}, \theta, \theta)$ は非コンパクト型リーマン対称対（すなわち，σ は Cartan 対合）となる．

② 写像 $\Psi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ の構成： $\theta \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ を σ と可換な Cartan 対合とする．このとき，$\mathfrak{g}_u := \mathfrak{g}^\theta \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}^{-\theta} (\subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ は σ, θ 不変な半単純コンパクトリー環を与える．$\theta_1 := \theta, \theta_2 := \sigma \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g}_u)$ で定めると，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ は可換な半単純コンパクト対称三対となる．したがって，$\Psi = \Psi_\theta : \mathcal{B} \to \mathcal{A}; (\mathfrak{g}, \sigma) \mapsto (\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ が定義された．特に，σ が Cartan 対合のとき，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) = \Psi(\mathfrak{g}, \sigma)$ はコンパクト型リーマン対称対（すなわち，$\theta_1 = \theta_2$）となる．

③ 対応 $\mathcal{A}/_\equiv \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathcal{B}/_\equiv$ の構成： Φ が誘導する $\mathcal{A}/_\equiv$ から $\mathcal{B}/_\equiv$ への写像を $\widetilde{\Phi}$ で表す．また，Ψ が誘導する $\mathcal{B}/_\equiv$ から $\mathcal{A}/_\equiv$ への写像を $\widetilde{\Psi}$ で表す．このとき，$\widetilde{\Psi}\widetilde{\Phi} = \mathrm{id}$ および $\widetilde{\Phi}\widetilde{\Psi} = \mathrm{id}$ を得る．Ψ の構成には σ と可換な Cartan 対合 θ を用いたが，このような Cartan 対合の全体には $\mathrm{Int}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\sigma)$ 共役性が成り立つことから，$\widetilde{\Psi}$ は θ の取り方に依存しないことが示される．

以上の議論より，次の結果を得る．

定理 A (一般化された双対性). $\widetilde{\Phi}$ および $\widetilde{\Psi}$ は $\mathcal{A}/_\equiv$ と $\mathcal{B}/_\equiv$ の間に自然な一対一対応を与える．特に，これらの対応はコンパクト型リーマン対称対と非コンパクト型リーマン対称対の間に成り立つ双対性の一般化になっている．

以下において，可換な半単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と半単純擬リーマン対称対 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ に対して $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^* = \widetilde{\Phi}(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2), (\mathfrak{g}, \sigma)^* = \widetilde{\Psi}(\mathfrak{g}, \sigma)$ と表す．また，一般に $\mathfrak{g}_u^{\theta_i}$ $(i = 1, 2)$ や $\mathfrak{g}^\sigma, \mathfrak{g}^\theta$ は半単純とは限らないことに注意する．ここで，リーマン対称対に対する双対性は $\mathfrak{g}_u$ をコンパクトリー環，$\mathfrak{g}$ を実簡約リー環の場合に自然に拡張して考えることができたので次の結果を得る．（その場合の一般化された双対も同じ記号 $*$ を用いて表す．）

系 1. $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \in \mathcal{A}/_\equiv$ に対して，$(\mathfrak{g}, \sigma) = (\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$ とする．θ を σ と可換な Cartan 対合とする．このとき，$(\mathfrak{g}, \theta) = (\mathfrak{g}_u, \theta_1)^*$ および $(\mathfrak{g}^\sigma, \theta) = (\mathfrak{g}_u^{\theta_2}, \theta_1)^*$ が成り立つ．

---

[1]記号 集合 $\mathfrak{l}$ と写像 $f : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ に対して，$\mathfrak{l}^f = \{X \in \mathfrak{l} \mid f(X) = X\}$ とおく．

2 応用

2.1 半単純擬リーマン対称対の分類

半単純擬リーマン対称空間の局所同型類の分類は半単純擬リーマン対称対の分類に帰着され，Berger([4]) によってその分類が与えられた．(以下，この分類を Berger の分類とよぶことにする．) この節では，1.2 節で与えた一般化された双対性を用いてコンパクト対称三対の視点から Berger の分類の別証明を与える．我々の証明のキーコンセプトは Ikawa([11]) がルート系や重複度付き制限ルート系の拡張概念として定義した重複度付き対称三対の概念であり，この概念を用いることで可換な半単純コンパクト対称三対の分類 (2.1.1 節，図 1：Step 1 から Step 3) と定理 A の対応の記述 (2.1.2 節, 図 1：Step 4) を明示的に与えることができる．なお，我々の証明ではコンパクト対称対の分類結果およびリーマン対称対のコンパクト／非コンパクト双対性は既知とする．ここで，半単純擬リーマン対称対 $(\mathfrak{g},\sigma)$ に対する既約分解によって，半単純擬リーマン対称対の分類は既約なものを分類すれば十分であり，その中でも特に $\mathfrak{g}$ が複素構造を持たない単純リー環の場合が本質的となる．そこで以下の節では $\mathfrak{g}$ がこの場合に焦点を絞って議論する．また，この場合では $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2) := (\mathfrak{g},\sigma)^*$ に対して $\mathfrak{g}_u$ は単純コンパクトリー環になることが定理 A から示されることに注意する．

$$\begin{tikzcd}
\{(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)\} \arrow[rr, "*:1"] \arrow[d, dashed, shift left, "\text{Step 3}", "\text{定理 C}"'] & \text{Step 2} & \{(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)\}/_{\sim} \arrow[ll, dashed, shift left] \arrow[d, dashed, shift left, "\text{Step 1}", "\text{定理 B}"'] \\
\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\mid\theta_1\theta_2=\theta_2\theta_1\}/_{\equiv} \arrow[u, shift left] \arrow[rr, "*:1", "(2.1.1\text{ 節})"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{定理A}"'] \arrow[d, dashed, shift left=2, "\text{Step 4}", "\text{定理 D (2.1.2節)}"'] & & \{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\mid\theta_1\theta_2=\theta_2\theta_1\}/_{\sim} \arrow[u, shift left] \arrow[ll, dashed, shift left] \\
\{(\mathfrak{g},\sigma)\}/_{\equiv} & &
\end{tikzcd}$$

図 1: Berger の分類へのアプローチ

2.1.1 可換な半単純コンパクト対称三対の分類

この節では $\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\in\mathcal{A}\mid\mathfrak{g}_u\text{:単純}\}/_{\equiv}$ を決定する．その決定方法は，Conlon([5], [7]), Matsuki([14]) が独立に与えた（可換とは限らない）半単純コンパクト対称三対の分類と，Ikawa([11]) が導入した（抽象的な）重複度付き対称三対の分類からなる [2]．

[2] 半単純コンパクト対称三対の分類について，著者は Colon の文献 [5] を入手できなかったため Matsuki の文献 [14] を主に引用する．

重複度付き対称三対の理論. 最初に対称三対の定義を復習する.

定義 2 ([11, Definition 2.2]). $\mathfrak{a}$ を内積 $\langle , \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ 上の対称三対であるとは, 次の (1) から (6) までを満たすときをいう.

(1) $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ 上の既約ルート系
(2) Σ は $\mathfrak{a}$ 上のルート系
(3) W は (-1) 倍に関して不変な $\mathfrak{a}$ の部分集合で $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$
(4) $W \cap \Sigma \neq \emptyset$ であり, $\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid ||\alpha|| \leq \ell\}$ (ただし, $\ell := \max\{||\alpha|| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$)
(5) $\alpha \in W$, $\lambda \in \Sigma - W$ に対して,
$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{||\alpha||^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma$$
(6) $\alpha \in W$, $\lambda \in W - \Sigma$ に対して,
$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{||\alpha||^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W$$

対称三対の分類 ([11, Theorem 2.19]) により, 任意の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は次のいずれかの型になることが知られている.

- (I) 型 : $\Sigma \supset W, \Sigma \neq W$
- (II) 型 : $\Sigma \subset W, \Sigma \neq W$
- (III) 型 : $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W$
- (I') 型 : (I) 型ではないが (I) 型と [11, Definition 2.6] の意味で同値

そこで, これらの対称三対を定義 5 で述べる (IV) 型の対称三対と区別して (I) 型から (III) 型の対称三対という. ((I') 型は広い意味で (I) 型と考える.)

定義 3 ([11, Definition 2.13]). $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ 上の対称三対とする. $m, n : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が次の (1) から (4) を満たすとき m, n を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の重複度といい, $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ を重複度付き対称三対とよぶ.

(1) $m(\lambda) = m(-\lambda), n(\alpha) = n(-\alpha)$ であり, $m(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma, n(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in W$
(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W, s \in W(\Sigma)$ のとき, $m(\lambda) = m(s\lambda), n(\alpha) = n(s\alpha)$
(3) $\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda \in \tilde{\Sigma}$ のとき, $n(\lambda) + m(\lambda) = n(\sigma\lambda) + m(\sigma\lambda)$
(4) $\lambda \in \Sigma \cap W, \alpha \in W$ のとき,
$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{||\alpha||^2} \text{が偶数} \Rightarrow m(\lambda) = m(s_\alpha\lambda), \quad 2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{||\alpha||^2} \text{が奇数} \Rightarrow m(\lambda) = n(s_\alpha\lambda)$$

ただし, $W(\tilde{\Sigma})$ と $W(\Sigma)$ はそれぞれ $\tilde{\Sigma}$ と Σ のワイル群を表す.

ここで, W は $W(\Sigma)$ 不変であることが知られており, 定義 3 の条件 (2) はこのことを踏まえてることに注意する.

定義 4. $(\tilde{\Sigma}_i, \Sigma_i, W_i; m_i, n_i)$ を $\mathfrak{a}_i$ 上の重複度付き対称三対とする $(i = 1, 2)$．このとき，(I) 型から (III) 型の重複度付き対称三対全体に同値関係 $\sim$ を次で定める：$(\tilde{\Sigma}_1, \Sigma_1, W_1; m_1, n_1) \sim (\tilde{\Sigma}_2, \Sigma_2, W_2; m_2, n_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の (1) から (4) までを満たす等長線形同型写像 $f : \mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{a}_2$ および，$Y \in \Gamma := \{X \in \mathfrak{a}_1 \mid \langle \lambda, X \rangle \in (\pi/2)\mathbb{Z}\,(\lambda \in \tilde{\Sigma}_1)\}$ が存在する．

(1) $f(\tilde{\Sigma}_1) = \tilde{\Sigma}_2$
(2) $\Sigma_2 - W_2 = \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma_1 - W_1, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in W_1 - \Sigma_1, \langle \alpha, 2Y \rangle \in (\pi + 2\pi\mathbb{Z})\}$
(3) $W_2 - \Sigma_2 = \{f(\alpha) \mid \alpha \in W_1 - \Sigma_1, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma_1 - W_1, \langle \alpha, 2Y \rangle \in (\pi + 2\pi\mathbb{Z})\}$
(4) $\alpha \in \tilde{\Sigma}_1$ に対して，

$$\langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow m_1(\alpha) = m_2(f(\alpha)), n_1(\alpha) = n_2(f(\alpha)),$$
$$\langle \alpha, 2Y \rangle \in (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \Rightarrow m_1(\alpha) = n_2(f(\alpha)), n_1(\alpha) = m_2(f(\alpha))$$

次に (IV) 型の重複度付き対称三対の概念を導入する．

定義 5. $\mathfrak{a}$ を内積 $\langle , \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする．$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ が重複度付き制限ルート系 $(\tilde{\Sigma}; \tilde{m})$ を基とする $\mathfrak{a}$ 上の **(IV)** 型の重複度付き対称三対であるとは，次の (1) と (2) を満たす $\mathfrak{a}$ 上の既約ルート系 $\tilde{\Sigma}$，重複度付き制限ルート系 $(\tilde{\Sigma}; \tilde{m})$ および $Y \in \Gamma := \{X \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, X \rangle \in (\pi/2)\mathbb{Z}(\lambda \in \tilde{\Sigma})\}$ が存在するときをいう．

(1) $\Sigma = \{\lambda \in \tilde{\Sigma} \mid \langle \lambda, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\}, W = \tilde{\Sigma} - \Sigma$
(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W$ に対して，$m(\lambda) = \tilde{m}_\lambda, n(\alpha) = \tilde{m}_\alpha$

定義 5 の条件 (1) より (IV) 型の重複度付き対称三対は (I) から (III) 型の重複度付き対称三対とは異なることがわかる．

定義 6. $(\tilde{\Sigma}_i, \Sigma_i, W_i; m_i, n_i)$ を重複度付き制限ルート系 $(\tilde{\Sigma}_i; \tilde{m}_i)$ を基とする $\mathfrak{a}_i$ 上の (IV) 型の重複度付き対称三対とする $(i = 1, 2)$．このとき，(IV) 型の重複度付き対称三対全体に同値関係 $\sim$ を次で定める：$(\tilde{\Sigma}_1, \Sigma_1, W_1; m_1, n_1) \sim (\tilde{\Sigma}_2, \Sigma_2, W_2; m_2, n_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ それらの基 $(\tilde{\Sigma}_1; \tilde{m}_1)$ と $(\tilde{\Sigma}_2; \tilde{m}_2)$ が互いに同型である．

注意 1. 重複度付き対称三対は Hermann 作用の軌道幾何の研究を動機として定義された概念であり，その背景として重複度付き対称三対に対応する可換な単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ で θ_1 と θ_2 が $\mathfrak{g}_u$ の内部自己同型写像で移り合わないものを考えていた（重複度付き対称三対と可換な単純コンパクト対称三対の対応は後で議論する）．しかし，定理 A が示すように Berger の分類の別証明を与えるためには θ_1 と θ_2 が $\mathfrak{g}_u$ の内部自己同型写像で移り合う場合も含めて可換な単純コンパクト対称三対を考えていることから，対応する重複度付き対称三対の概念として (IV) 型を新たに導入することが要求される．また，[2] では対称三対の分類 ([11, Theorem 2.19]) の拡張として重複度付き対称三対および $\sim$ に関する同値類を分類している．

可換な単純コンパクト対称三対と重複度付き対称三対の対応. 可換な単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ から重複度付き対称三対の構成法を復習する．θ_1 と θ_2 の可換性から $\mathfrak{g}_u$ の θ_1, θ_2 による同時固有空間分解を得る：

$$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \oplus \mathfrak{g}_u^{-\theta_1} = \mathfrak{g}_u^{\theta_2} \oplus \mathfrak{g}_u^{-\theta_2} = (\mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2}) \oplus (\mathfrak{g}_u^{-\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{-\theta_2}) \oplus (\mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{-\theta_2}) \oplus (\mathfrak{g}_u^{-\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2}).$$

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}_u^{-\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{-\theta_2}$ 内の極大可換部分空間とする．任意の $\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)(\subset \mathfrak{g}_u^{\mathbb{C}})$ を次で定める：

$$\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}_u^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \, (H \in \mathfrak{a})\}.$$

ただし，$\langle , \rangle$ は $\mathfrak{a}$ 上の不変内積を表す．このとき，$\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)\,(\alpha \in \mathfrak{a})$ は $\theta_1\theta_2$ 不変であるから $\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)$ の $\theta_1\theta_2$ 分解 $\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha) = \mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)^{\theta_1\theta_2} \oplus \mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)^{-\theta_1\theta_2}$ を得る．このとき，次で定義される $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は $\mathfrak{a}$ 上の対称三対となる．

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma} &= \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}, \\
\Sigma &= \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)^{\theta_1\theta_2} \neq \{0\}\}, \\
W &= \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)^{-\theta_1\theta_2} \neq \{0\}\}.
\end{aligned}$$

さらに，$m, n : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を次で定めたとき，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ は $\mathfrak{a}$ 上の重複度付き対称三対となる：任意の $\alpha \in \tilde{\Sigma}$ に対して，

$$m(\alpha) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)^{\theta_1\theta_2}, \quad n(\alpha) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_u(\mathfrak{a}, \alpha)^{-\theta_1\theta_2}.$$

上記の構成法から $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1)$ は同じ重複度付き対称三対を定めるがわかる．また，半単純コンパクト対称三対の全体に次の同値関係 $\sim$ が定まる ([14, Definition 1.1])：$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}'_u, \theta'_1, \theta'_2) \overset{\text{def}}{\iff}$ リー環の同型写像 $\varphi : \mathfrak{g}_u \to \mathfrak{g}'_u$ および $\tau \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}'_u)$ で $\theta'_1 = \varphi\theta_1\varphi^{-1}, \theta'_2 = \tau(\varphi\theta_2\varphi^{-1})\tau^{-1}$ を満たすものが存在する．このとき，次の結果は [11, Theorem 4.33] の精密化に相当する．

定理 B. $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2), (\mathfrak{g}_u, \theta'_1, \theta'_2)$ を二つの可換な単純コンパクト対称三対とし，それぞれに対応する重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n), (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ で表す．このとき，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta'_1, \theta'_2)$ または $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta'_1, \theta'_2)$ となるための必要十分条件は，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n) \sim (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W'; m', n')$ となることである．

証明の概略. 必要性は [11, Theorem 4.33] の証明を精密化する．十分性は重複度付き対称三対の分類結果による． □

ここで，[1] において $\{(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{g}_u$:単純 $\}/_\sim$ の各同値類に対応する重複度付き対称三対の $\sim$ に関する同値類を決定しており，写像 $\{(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{g}_u$:単純 $\}/_\sim \to \{(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)\}/_\sim$ の像は明示的に記述できていることに注意する．また，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \equiv (\mathfrak{g}_u, \theta'_1, \theta'_2)$ ならば $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta'_1, \theta'_2)$ であるが，逆が成り立つとは限らない．

例 1. $(\mathfrak{g}_u = \mathfrak{e}_6, \theta_1, \theta_2)$ を $\mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cong \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{g}_u^{\theta_2} \cong \mathfrak{sp}(4)$ となる可換な単純コンパクト対称三対とする．このとき，$\sim$ に関する同値類 $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]$ に対応する重複度付き対称三対

は $[(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)]=[(\mathrm{I}\text{-}F_4)]$ となることが示される ([1])[3]. また，重複度付き対称三対の分類より $[(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)]=\{(\mathrm{I}\text{-}F_4),(\mathrm{I'}\text{-}F_4)\}$ を得る ([2]). よって，$[(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)]/_{\equiv}$ は二つの元からなることがわかる.

上記の例と同様な計算を $\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\in\mathcal{A}\mid\mathfrak{g}_u$:単純 $\}/_{\sim}$ のすべての同値類に対して実行することで次の結果を得る.

定理 C. すべての可換な単純コンパクト対称三対の $\equiv$ に関する同値類は重複度付き対称三対によって明示的に記述される.

定理 C の具体的な対応表については付録を参照.

2.1.2 定理 A の対応の明示的な記述

この節では定理 C を用いて定理 A の対応を明示的に記述する. まず準備として次の結果を用意する.

補題 7. $\mathfrak{g}_u,\mathfrak{g}'_u$ を単純コンパクトリー環とする. θ,θ' をそれぞれ $\mathfrak{g}_u,\mathfrak{g}'_u$ の対合とする. このとき，$\mathfrak{g}_u$ と $\mathfrak{g}'_u$ がリー環として同型であり，$\mathfrak{g}_u^{\theta}$ のあるコンパクト単純因子と $(\mathfrak{g}'_u)^{\theta'}$ のあるコンパクト単純因子がリー環として同型ならば，同型写像 $\varphi:\mathfrak{g}_u\to\mathfrak{g}'_u$ で $\theta'=\varphi\theta\varphi^{-1}$ を満たすものが存在する.

証明は単純コンパクトリー環とその上の対合の分類から次が従う. 補題 7 から例えば次のことがわかる. $\mathfrak{g}_u=\mathfrak{so}(2n)$ のとき，$\mathfrak{g}_u^{\theta}=\mathfrak{u}(n)$ となる対合 θ は存在する. $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ は同じコンパクト単純因子 $\mathfrak{su}(n)$ をもつから補題 7 より $\mathfrak{g}_u^{\theta'}=\mathfrak{su}(n)$ となる対合 θ' は存在しないことがわかる.

次の手順によって定理 A の明示的な記述が実行される.

(Step 1) 定理 C で求めた各代表元 $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ に対して，$(\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2},\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})$ を決定する. これは，$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ に対応する重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)$ で表したとき，補題 7 によって $(\Sigma;m)$ から $\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2}\subset\mathfrak{g}_u$ のあるコンパクト単純因子を読み取ることで実行される.

(Step 2) 系 1 を用いて $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{\sigma})=(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{\sigma};\mathfrak{g}^{\theta})=(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$ を決定する.

例 2 ($(\mathfrak{g}_u=\mathfrak{e}_6,\theta_1,\theta_2)^*$ ($\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cong\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2),\mathfrak{g}_u^{\theta_2}\cong\mathfrak{sp}(4)$) の決定). 例 1 より $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ に対応する重複度付き対称三対によって場合分けが必要となる.

- $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)=(\mathrm{I}\text{-}F_4)=(F_4,F_4,D_4)$ の場合：(Step 1) $(\Sigma;m)$ は (FI) 型の重複度付き制限ルート系であるので，$(\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2},\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})=(\mathfrak{f}_4,\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2))$ を得る. (Step 2) $(\mathfrak{g}_u,\mathfrak{g}_u^{\theta_1})^*=(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2))$ および $(\mathfrak{g}_u^{\theta_2},\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})^*=(\mathfrak{sp}(3,1),\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{sp}(1))$ を得る. したがって，$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*=(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{sp}(3,1))$ を得る.
- $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)=(\mathrm{I'}\text{-}F_4)=(F_4,C_4,W)$ の場合：同様な計算によって，$(\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2},\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})=(\mathfrak{sp}(4),\mathfrak{u}(4))$ および $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*=(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R}))$ を得る.

[3] 対称三対を表す記号 $(\mathrm{I}\text{-}F_4)$ 等については [11] を参照.

上記の例と同様な計算を $\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\in\mathcal{A}\mid\mathfrak{g}_u$:単純$\}/_{\equiv}$ のすべての同値類に対して実行することによって次の結果を得る.

定理 D (Bergerの分類). 単純擬リーマン対称対の同値類と可換な単純コンパクト対称三対の間の双対対応は重複度付き対称三対を用いて明示的に記述される.

定理Dの具体的な対応表については付録を参照.

注意 2. Bergerの分類の別証明は本研究以外にもアプローチ ([6], [10], [8]) が知られているが, 我々の別証明は可換な半単純コンパクト対称三対と半単純擬リーマン対称対の間の明示的な対応を与えるだけでなく, その間に介在する重複度付き対称三対も含めて明らかにしていることに優位性がある. この情報は, 実際に次の節で議論するように, 定理Aが Bergerの分類の別証明を与えるだけでなくHermann型作用の軌道幾何の研究に対しても有効であることを示している. 特にこの研究は定理Aが擬リーマン対称空間の幾何の新たな進展を与えるものとして期待できる.

2.2 Hermann型作用の軌道の幾何

G を中心有限の連結半単純非コンパクトリー群とし, σ を G の対合とする. G^σ の単位連結成分を H で表す. また, θ を σ と可換な G の Cartan 対合とし, $K=G^\theta$ とすると K は G の極大コンパクト部分群となる. このとき, $G, G/H, G/K$ はそれぞれ $\mathfrak{g}:=\mathrm{Lie}(G)$ の Killing形式から擬リーマン対称空間の構造が誘導される. 特に, G/K は非コンパクト型リーマン対称空間となる. このとき, 次の自然な作用はHermann型作用とよばれる ([12], [13]).

(a) G/K 上の H 作用 (リーマン多様体上の非コンパクト群作用)

(b) G/H 上の K 作用 (擬リーマン多様体上のコンパクト群作用)

(c) G 上の $(H\times K)$ 作用 (擬リーマン多様体上の非コンパクト群作用)

ここでは (b) $K\curvearrowright G/H$ の軌道について得られた結果を説明する. $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)=(\mathfrak{g},\sigma)^*$ とおく. このとき, 原点 eH における $T_{eH}(G/H)$ の接空間は次のように記述される:

$$T_{eH}(G/H)=\mathfrak{g}^{-\sigma}=\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{-\theta_2}\oplus\sqrt{-1}(\mathfrak{g}_u^{-\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{-\theta_2})(\subset\mathfrak{g}).$$

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}_u^{-\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{-\theta_2}$ 内の極大可換部分空間とする. 明らかに $\sqrt{-1}\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ である.

事実 8 ([9], [15]).

$$G=K(\exp(\sqrt{-1}\mathfrak{a}))H=H(\exp(\sqrt{-1}\mathfrak{a}))K.$$

上記の事実より, すべての K 軌道は $A:=\pi_H(\exp(\sqrt{-1}\mathfrak{a}))$ と交わることが示される. ただし, $\pi_H:G\to G/H$ は自然な射影を表す. したがって, 任意の K 軌道 $K(gH)$ $(g\in G)$ に対して, $g\in\exp(\sqrt{-1}\mathfrak{a})$ であると仮定しても一般性を失わない. そこで, $g=\exp\sqrt{-1}Z$ $(Z\in\mathfrak{a})$ に対して gH を通る K 軌道の接空間および法空間を以下の手順で具体的に記述しよう.

$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ に付随する $\mathfrak{a}$ 上の重複度付き制限ルート系を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ で表す．このとき，$(\Sigma; m)$ はリーマン対称対 $(\mathfrak{g}^{\sigma\theta}, \sigma)(= (\mathfrak{g}^{\sigma\theta}, \theta) = (\mathfrak{g}^{\sigma\theta}, \mathfrak{g}^{\theta} \cap \mathfrak{g}^{\sigma}))$ の重複度付き制限ルート系に一致する．任意の $\lambda \in \Sigma(\subset \mathfrak{a})$ に対して，$\mathfrak{k}_\lambda \subset \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2}$ および $\mathfrak{m}_\lambda \subset \mathfrak{g}_u^{-\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{-\theta_2}$ をそれぞれ次のように定める：

$$\mathfrak{k}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2} \mid \mathrm{ad}(A)^2 X = -\langle \lambda, A \rangle^2 X (A \in \mathfrak{a})\},$$
$$\mathfrak{m}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}_u^{-\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{-\theta_2} \mid \mathrm{ad}(A)^2 X = -\langle \lambda, A \rangle^2 X (A \in \mathfrak{a})\}.$$

このとき，$\mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2}$ および $\mathfrak{g}_u^{-\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{-\theta_2}$ はそれぞれ次のように分解される：

$$\mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2} = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{k}_\lambda, \quad \mathfrak{g}_u^{-\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{-\theta_2} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{m}_\lambda.$$

ただし，$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2} \mid [X, \mathfrak{a}] = \{0\}\}$，$\Sigma^+$ は Σ の正ルート全体とする．このとき，gH を通る K 軌道 $K(gH)$ の接空間と法空間はそれぞれ次のように分解される：

$$g_*^{-1} T_{gH}(K(gH)) = \sqrt{-1} \left(\sum_{\lambda \in \Sigma^+; \langle \lambda, Z \rangle \neq 0} \mathfrak{m}_\lambda \right) \oplus \left(\mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{-\theta_2} \right),$$
$$g_*^{-1} T_{gH}^{\perp}(K(gH)) = \sqrt{-1} \left(\mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+; \langle \lambda, Z \rangle = 0} \mathfrak{m}_\lambda \right).$$

ここで，$\mathfrak{g}$ のキリング形式は $\mathfrak{g}^{\theta} = \mathfrak{g}_u^{\theta_1}$ 上で負定値，$\mathfrak{g}^{-\theta} = \sqrt{-1}\mathfrak{g}_u^{-\theta_1}$ 上で正定値となることに注意する．以上の議論より，次の結果を得る．

命題 9. Hermann 型作用 $K \curvearrowright G/H$ に対して，次が成り立つ．

(1) すべての K 軌道は G/H 内の擬リーマン部分多様体である．

(2) 任意の $g \in G$ に対して，$\mathfrak{g}$ から誘導される $T_{gH}^{\perp} K(gH)$ 上の対称双線形形式は正定値である．

(3) A は G/H 内の平坦な全測地的部分多様体である．

(4) A はすべての K 軌道と（G/H の擬リーマン計量に関して）直交する．

参考文献

[1] K. Baba and O. Ikawa, The commutativity of compact symmetric triads and the determination of symmetric triads with multiplicities from two Satake diagmras, in preparation.

[2] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, A duality between symmetric pairs and compact symmetric triads, in preparation.

[3] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, An alternative proof for Berger's classification of semisimple pseudo-Riemannian symmetric pairs from the viewpoint of compact symmetric triads, in preparation.

[4] M. Berger, Les espaces symetriques noncompacts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **74** (1957), 85–177.

[5] L. Conlon, Classification of affine root systems and applications to the theory of symmetric spaces, Mimeographed Notes, Washington University, St. Louis, Mo. (1968)

[6] L. Conlon, Applications of affine root systems to the theory of symmetric spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 610–613.

[7] L. Conlon, Remarks on commuting involutions, Proc. Amer. Mat. Soc., **22** (1969), 255–257.

[8] M.-K. Chuah and J.-S. Huang, Double Vogan diagrams and semisimple symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **362** (2010), 1721–1750.

[9] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case. J. Funct. Anal., **30** (1978), 106–146.

[10] A. G. Helminck, Algebraic groups with a commuting pair of involutions and semisimple symmetric spaces, Adv. in Math., **71** (1988), 21–91.

[11] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan, **63** (2011), 79–136.

[12] N. Koike, Complex hyperpolar actions with a totally geodesic orbit, Osaka J. Math., **44** (2007), 491–503.

[13] N. Koike, Hermann type actions on a pseudo-Riemannian symmetric space, Tsukuba J. Math., **34** (2010), 132–172.

[14] T. Matsuki, Classification of two involutions on compact semisimple Lie groups and root systems, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.

[15] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces, Canad. J. Math., **31** (1979), 157–180.

付録：定理Cと定理Dの対応表

(i) $\theta_1 \not\sim \theta_2$ の場合

表 1: Bergerの分類 ($\mathfrak{g}_u$：単純)

$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) = (\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1)^*$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{sp}(4))$	(I-F_4)	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{sp}(3,1))$
		$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{su}^*(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$
	(I'-F_4)	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}))$
		$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sl}(6, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{sp}(4))$	(II-BC_2)	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{sp}(2,2))$
		$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{so}(5,5) \oplus \mathbb{R})$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{sp}(4))$	(III-A_2)	$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{sp}(1,3))$
		$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{f}_{4(4)})$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	(I-BC_2-B_2; basic)	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{su}(1,5) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$
		$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{so}^*(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$
	(I-BC_2-B_2; non-basic)	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{su}(2,4) \oplus \mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{so}(6,4) \oplus \mathfrak{so}(2))$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{f}_4)$	(III-BC_1)	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{f}_{4(4)})$
		$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{su}^*(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{f}_4)$	(III-BC_1)	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{f}_{4(-20)})$
		$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{so}(1,9) \oplus \mathbb{R})$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{su}(8))$	(I-F_4)	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{su}(6,2))$
		$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{so}^*(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$
	(I'-F_4)	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{su}(4,4))$
		$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{so}(6,6) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{su}(8))$	(I-C_3)	$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{su}(6,2))$
		$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{e}_{6(2)} \oplus \mathfrak{so}(2))$
	(I'-C_3)	$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{su}^*(8))$
		$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{e}_{6(6)} \oplus \mathbb{R})$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{u}(1))$	(I-BC_2-B_2; basic)	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{e}_{6(-14)} \oplus \mathfrak{so}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{so}(10,2) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$
	(I-BC_2-B_2; non-basic)	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{e}_{6(2)} \oplus \mathfrak{so}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{so}^*(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(16))$	(I-F_4)	$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{so}(12,4))$
		$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{e}_{7(-5)} \oplus \mathfrak{su}(2))$
	(I'-F_4)	$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{so}^*(16))$
		$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{e}_{7(7)} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9), \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3))$	(III-BC_1)	$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{sp}(1,2) \oplus \mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{so}(4,5))$

*重複度付き対称三対が "basic", "non-basic" である定義は [1] を参照

表 1: (続き)

$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) = (\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$ / $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1)^*$	Remark
$(\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q), \mathfrak{so}(r) \oplus \mathfrak{so}(s))$ $(s < q \leq p < r)$	(I-B_s; basic)	$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{so}(s) \oplus \mathfrak{so}(p, q-s))$	
		$(\mathfrak{so}(r,s), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(s, q-s))$	
	(I-B_s; non-basic)	$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{so}(s) \oplus \mathfrak{so}(q, p-s))$	
		$(\mathfrak{so}(r,s), \mathfrak{so}(q) \oplus \mathfrak{so}(s, q-s))$	
	(I'-B_s; $*$)	$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{so}(k, s-k) \oplus \mathfrak{so}(q-k, p-s+k))$	$\Sigma \cong B_k \oplus B_{s-k}$
		$(\mathfrak{so}(r,s), \mathfrak{so}(s-k, p-s+k) \oplus \mathfrak{so}(k, q-k))$	
	(I'-B_s; $*$)	$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{so}(k, s-k) \oplus \mathfrak{so}(p-k, q-s+k))$	
		$(\mathfrak{so}(r,s), \mathfrak{so}(s-k, q-s+k) \oplus \mathfrak{so}(k, p-k))$	
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{su}(r) \oplus \mathfrak{su}(s) \oplus \mathfrak{so}(2))$ $(s < q \leq p < r)$	(I-BC_s-A_1^s; basic)	$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}(s) \oplus \mathfrak{su}(p, q-s) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{su}(r,s), \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(s, q-s) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	(I-BC_s-A_1^s; non-basic)	$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}(s) \oplus \mathfrak{su}(q, p-s) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{su}(r,s), \mathfrak{su}(q) \oplus \mathfrak{su}(s, q-s) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	(I'-BC_s-A_1^s; $*$)	$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}(k, s-k) \oplus \mathfrak{su}(q-k, p-s+k) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$\Sigma \cong BC_k \oplus BC_{s-k}$
		$(\mathfrak{su}(r,s), \mathfrak{su}(s-k, p-s+k) \oplus \mathfrak{su}(k, q-k) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	(I'-BC_s-A_1^s; $*$)	$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}(k, s-k) \oplus \mathfrak{su}(p-k, q-s+k) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{su}(r,s), \mathfrak{su}(s-k, q-s+k) \oplus \mathfrak{su}(k, p-k) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q), \mathfrak{sp}(r) \oplus \mathfrak{sp}(s))$ $(s < q \leq p < r)$	(I-B_s-A_1^s; basic)	$(\mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sp}(s) \oplus \mathfrak{sp}(p, q-s))$	
		$(\mathfrak{sp}(r,s), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(s, q-s))$	
	(I-B_s-A_1^s; non-basic)	$(\mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sp}(s) \oplus \mathfrak{sp}(q, p-s))$	
		$(\mathfrak{sp}(r,s), \mathfrak{sp}(q) \oplus \mathfrak{sp}(s, q-s))$	
	(I'-B_s-A_1^s; $*$)	$(\mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sp}(k, s-k) \oplus \mathfrak{sp}(q-k, p-s+k))$	$\Sigma \cong BC_k \oplus BC_{s-k}$
		$(\mathfrak{sp}(r,s), \mathfrak{sp}(s-k, p-s+k) \oplus \mathfrak{sp}(k, q-k))$	
	(I'-B_s-A_1^s; $*$)	$(\mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sp}(k, s-k) \oplus \mathfrak{sp}(p-k, q-s+k))$	
		$(\mathfrak{sp}(r,s), \mathfrak{sp}(s-k, q-s+k) \oplus \mathfrak{sp}(k, p-k))$	

表 1: (続き)

$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) = (\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$ / $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1)^*$	Remark
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus \mathfrak{so}(2))$	(I-C_p)	$(\mathfrak{sl}(2p, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$n = 2p$
		$(\mathfrak{su}(p,p), \mathfrak{so}^*(2p))$	
	(I'-C_p)	$(\mathfrak{sl}(2p, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R})$	
		$(\mathfrak{su}(p,p), \mathfrak{so}(p,p))$	
	(II-BC_p)	$(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(n-p, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R})$	$n > 2p$
		$(\mathfrak{su}(p, n-p), \mathfrak{so}(p, n-p))$	
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q))$	(III-C_p; basic)	$(\mathfrak{sp}(2p, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(p, \mathbb{C}))$	$n = 2p$
		$(\mathfrak{sp}(p,p), \mathfrak{su}^*(2p) \oplus \mathbb{R})$	
	(III-C_p; non-basic)	$(\mathfrak{sp}(2p, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sp}(p, \mathbb{R}))$	
		$(\mathfrak{sp}(p,p), \mathfrak{su}(p,p) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	(III-BC_p)	$(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sp}(n-p, \mathbb{R}))$	$n > 2p$
		$(\mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{su}(p, n-p) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
$(\mathfrak{so}(2n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q))$	(I-$C_{p/2}$)	$(\mathfrak{so}^*(2p), \mathfrak{so}^*(p) \oplus \mathfrak{so}^*(p))$	$n = p = q$
		$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{su}(p/2, p/2) \oplus \mathfrak{so}(2))$	p: even
	(I'-$C_{p/2}$)	$(\mathfrak{so}^*(2p), \mathfrak{so}(p, \mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R})$	
	(I-$BC_{p/2}$-$B_{p/2}$)	$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}^*(p) \oplus \mathfrak{so}^*(2n-p))$	$n > 2p$
		$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{su}(p/2, n-p/2) \oplus \mathfrak{so}(2))$	p: even
	(II-$BC_{(p-1)/2}$)	$(\mathfrak{so}^*(2p), \mathfrak{so}(p, \mathbb{C}))$	$n = p = q$
		$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R})$	p: odd
$(\mathfrak{su}(2n), \mathfrak{sp}(n), \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus \mathfrak{so}(2))$	(III-$C_{p/2}$; basic)	$(\mathfrak{su}^*(2p), \mathfrak{su}^*(p) \oplus \mathfrak{su}^*(p) \oplus \mathbb{R})$	$n = p = q$
		$(\mathfrak{su}(p,p), \mathfrak{sp}(p/2, p/2))$	p: even
	(III-$C_{p/2}$; non-basic)	$(\mathfrak{su}^*(2p), \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{su}(p,p), \mathfrak{sp}(p, \mathbb{R}))$	
	(I-$BC_{p/2}$-$B_{p/2}$)	$(\mathfrak{su}^*(2n), \mathfrak{su}^*(p) \oplus \mathfrak{su}^*(2n-p/2))$	$n > 2p$
		$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{sp}(p/2, n-p/2))$	p: even
	(II-$BC_{(p-1)/2}$)	$(\mathfrak{su}^*(2p), \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$n = p = q$
		$(\mathfrak{su}(p,p), \mathfrak{sp}(p, \mathbb{R}))$	p: odd
$(\mathfrak{so}(4n), \mathfrak{u}(2n), \mathfrak{u}(2n)')$	(I-BC_{n-1}-A_1^{n-1})	$(\mathfrak{so}^*(4n), \mathfrak{su}(2n-1, 1) \oplus \mathfrak{so}(2))$	self-dual
	(I'-BC_{n-1}-A_1^{n-1})	$(\mathfrak{so}^*(4n), \mathfrak{su}(2s+1, n-2s-1) \oplus \mathfrak{so}(2))$	self-dual $1 \leq s \leq n-1$

表 2: Berger の分類 $((\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)=(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u},\tilde\theta,\tilde\theta\theta_{\sigma_0}),\ \tilde\theta(x,y)=(y,x),\theta_{\sigma_0}(x,y)=(\sigma_0x,\sigma_0y)\,(x,y\in\mathfrak{u},\sigma_0\in\mathrm{Inv}(\mathfrak{u}))$：外部)

$(\mathfrak{u},\mathfrak{u}^{\sigma_0})$	$(\tilde\Sigma,\Sigma,W;m,n)$	$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$ / $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_1\theta_2)^*$ / $(\mathfrak{g}_u,\theta_1\theta_2,\theta_2)^*$	Remark
$(\mathfrak{su}(2m),\mathfrak{so}(2m))$	(I'-C_m)	$(\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{C}),\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{R}))$	$m\geq 2$
		$(\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{C}),\mathfrak{so}(2m,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{R}))$	
$(\mathfrak{su}(2m+1),\mathfrak{so}(2m+1))$	(II-BC_m)	$(\mathfrak{sl}(2m+1,\mathbb{C}),\mathfrak{sl}(2m+1,\mathbb{R}))$	$m\geq 1$
		$(\mathfrak{sl}(2m+1,\mathbb{C}),\mathfrak{so}(2m+1,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{sl}(2m+1,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2m+1,\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(2m+1,\mathbb{R}))$	
$(\mathfrak{su}(2m),\mathfrak{sp}(m))$	(I-C_m)	$(\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{C}),\mathfrak{su}^*(2m))$	
		$(\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(m,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{su}^*(2m)\oplus\mathfrak{su}^*(2m),\mathfrak{su}^*(2m))$	
$(\mathfrak{so}(2m+2n+2),\mathfrak{so}(2m+1)\oplus\mathfrak{so}(2n+1))$	(I'-B_{m+n})	$(\mathfrak{so}(2m+2n+2,\mathbb{C}),\mathfrak{so}(2m+1,2n+1))$	
		$(\mathfrak{so}(2m+2n+2,\mathbb{C}),\mathfrak{so}(2m+1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}(2m+1,2n+1)\oplus\mathfrak{so}(2m+1,2n+1),\mathfrak{so}(2m+1,2n+1))$	
$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{sp}(4))$	(I'-F_4)	$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{6(6)})$	
		$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{e}_{6(6)}\oplus\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{e}_{6(6)})$	
$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{f}_4)$	(I-F_4)	$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{6(-26)})$	
		$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}})$	
		$(\mathfrak{e}_{6(-24)}\oplus\mathfrak{e}_{6(-24)},\mathfrak{e}_{6(-24)})$	

(ii) $\theta_1 \sim \theta_2$ の場合

表 3: Berger の分類 $((\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u,\theta,\theta)$, $(\mathfrak{g}_u,\theta)$：単純コンパクトリーマン対称対)

$(\mathfrak{g}_u,\theta)=(\mathfrak{g}_u,\mathfrak{g}_u^\theta)$	$(\tilde\Sigma,\Sigma,W;m,n)$	$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_1\theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u,\theta_1\theta_2,\theta_2)^*$
$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{sp}(4))$	$(E_6,E_6,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{sp}(4))$
		$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{e}_{6(6)})$
		$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{sp}(4))$
	$(E_6,D_5,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{sp}(2,2))$
		$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{so}(5,5)\oplus\mathbb{R})$
		$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{sp}(2,2))$
	$(E_6,A_1\oplus A_5,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R}))$
		$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(6,\mathbb{R}))$
		$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R}))$
$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2))$	$(F_4,F_4,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{e}_{6(2)})$
		$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2))$
	$(F_4,A_1\oplus C_3,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{su}(3,3)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$
	$(F_4,B_4,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{su}(4,2)\oplus\mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{so}(6,4)\oplus\mathfrak{so}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{su}(4,2)\oplus\mathfrak{su}(2))$
$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{so}(10)\oplus\mathfrak{u}(1))$	$(BC_2,BC_2,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{so}(10)\oplus\mathfrak{u}(1))$
		$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{e}_{6(-14)})$
		$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{so}(10)\oplus\mathfrak{u}(1))$
	$(BC_2,A_1\oplus BC_1,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{so}^*(10)\oplus\mathfrak{so}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{su}(5,1))$
		$(\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{so}^*(10)\oplus\mathfrak{so}(2))$
	$(BC_2,B_2,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{so}(8,2)\oplus\mathfrak{so}(2))$
$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{f}_4)$	$(A_2,A_2,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{f}_4)$
		$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{e}_{6(-26)})$
		$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{f}_4)$
	$(A_2,A_1,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{f}_{4(-20)})$
		$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{so}(9,1)\oplus\mathbb{R})$
		$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{f}_{4(-20)})$
$(\mathfrak{e}_7,\mathfrak{su}(8))$	$(E_7,E_7,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{su}(8))$
		$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{e}_{7(7)})$
		$(\mathfrak{e}_7,\mathfrak{su}(8))$
	$(E_7,A_1\oplus D_6,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{su}(4,4))$
		$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{so}(6,6))$
		$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{su}(4,4))$
	$(E_7,A_7,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{sl}(8,\mathbb{R}))$
	$(E_7,E_6,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{su}^*(8))$
		$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{e}_{6(6)}\oplus\mathbb{R})$
		$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{su}^*(8))$
$(\mathfrak{e}_7,\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2))$	$(F_4,F_4,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{e}_{7(-5)})$
		$(\mathfrak{e}_7,\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2))$
	$(F_4,A_1\oplus C_3,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{so}^*(12)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$
	$(F_4,B_4,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{so}(8,4)\oplus\mathfrak{su}(2))$

$(\mathfrak{g}_u,\theta)=(\mathfrak{g}_u,\mathfrak{g}_u^\theta)$	$(\tilde\Sigma,\Sigma,W;m,n)$	$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_1\theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u,\theta_1\theta_2,\theta_2)^*$
$(\mathfrak{e}_7,\mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{u}(1))$	$(C_3,C_3,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{so}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_{7(-25)})$
		$(\mathfrak{e}_7,\mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{so}(2))$
	$(C_3,C_1\oplus C_2,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_{6(-14)}\oplus\mathfrak{so}(2))$
	$(C_3,A_2,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_{6(-26)}\oplus\mathbb{R})$
$(\mathfrak{e}_8,\mathfrak{so}(16))$	$(E_8,E_8,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{so}(16))$
		$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{e}_{8(8)})$
		$(\mathfrak{e}_8,\mathfrak{so}(16))$
	$(E_8,D_8,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{so}(8,8))$
	$(E_8,A_1\oplus A_7,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{so}^*(16))$
$(\mathfrak{e}_8,\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2))$	$(F_4,F_4,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{e}_{8(-24)})$
		$(\mathfrak{e}_8,\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2))$
	$(F_4,A_1\oplus C_3,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{e}_{7(-25)}\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$
	$(F_4,B_4,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{e}_{7(-5)}\oplus\mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{so}(12,4))$
		$(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{e}_{7(-5)}\oplus\mathfrak{su}(2))$
$(\mathfrak{f}_4,\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{sp}(3))$	$(F_4,F_4,\emptyset)$	$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{sp}(3))$
		$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{f}_{4(4)})$
		$(\mathfrak{f}_4,\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{sp}(3))$
	$(F_4,A_1\oplus C_3,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{sp}(3,\mathbb{R}))$
	$(F_4,B_4,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{sp}(2,1)\oplus\mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{so}(5,4))$
		$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{sp}(2,1)\oplus\mathfrak{su}(2))$
$(\mathfrak{f}_4,\mathfrak{so}(9))$	$(BC_1,BC_1,\emptyset)$	$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{so}(9))$
		$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{f}_{4(-20)})$
		$(\mathfrak{f}_4,\mathfrak{so}(9))$
	$(BC_1,B_1,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{so}(8,1))$
$(\mathfrak{g}_2,\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2))$	$(G_2,G_2,\emptyset)$	$(\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2))$
		$(\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{g}_{2(2)})$
		$(\mathfrak{g}_2,\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2))$
	$(G_2,A_1\oplus A_1,\tilde\Sigma-\Sigma)$	$(\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$

表 3: (続き)

$(\mathfrak{g}_u,\theta)=(\mathfrak{g}_u,\mathfrak{g}_u^\theta)$	$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)$	$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$ $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_1\theta_2)^*$ $(\mathfrak{g}_u,\theta_1\theta_2,\theta_2)^*$	Remark
$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{so}(n))$	$(A_{n-1},A_{n-1},\emptyset)$	$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{so}(n))$	
		$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}))$	
		$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{so}(n))$	
	$(A_{n-1},A_{i-1}\oplus A_{n-i-1},\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{so}(i,n-i))$	$1\leq i\leq n-1$
		$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(i,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(n-i,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R})$	
		$(\mathfrak{su}(i,n-i),\mathfrak{so}(i,n-i))$	
$(\mathfrak{su}(2n),\mathfrak{sp}(n))$	$(A_{n-1},A_{n-1},\emptyset)$	$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{sp}(n))$	
		$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{su}^*(2n))$	
		$(\mathfrak{su}(2n),\mathfrak{sp}(n))$	
	$(A_{n-1},A_{i-1}\oplus A_{n-i-1},\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{sp}(i,n-i))$	$1\leq i\leq n-1$
		$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{su}^*(2i)\oplus\mathfrak{su}^*(2(n-i))\oplus\mathbb{R})$	
		$(\mathfrak{su}(i,n-i),\mathfrak{sp}(i,n-i))$	
$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(q)))$	$(C_p,C_p,\emptyset)$	$(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(p)))$	$n=2p$
		$(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{su}(p,p))$	
		$(\mathfrak{su}(2p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(p)))$	
	$(C_p,C_{p-i}\oplus C_i,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p-i,i)\oplus\mathfrak{u}(i,p-i)))$	
		$(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p-i,p-i)\oplus\mathfrak{u}(i,i)))$	
		$(\mathfrak{su}(2(p-i),2i),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p-i,i)\oplus\mathfrak{u}(i,p-i)))$	
	$(C_p,A_{p-1},\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2))$	
	$(BC_p,BC_p,\emptyset)$	$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(n-p)))$	$n>2p$
		$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{su}(p,n-p))$	
		$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(n-p)))$	
	$(BC_p,BC_{p-i}\oplus C_i,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{su}(p-i,i)\oplus\mathfrak{su}(i,p-i)\oplus\mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{su}(p-i,p-i)\oplus\mathfrak{su}(i,i)\oplus\mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{su}(n-2i,2i),\mathfrak{su}(p-i,i)\oplus\mathfrak{su}(i,p-i)\oplus\mathfrak{so}(2))$	

表 3: (続き)

$(\mathfrak{g}_u, \theta) = (\mathfrak{g}_u, \mathfrak{g}_u^\theta)$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$ $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_1\theta_2)^*$ $(\mathfrak{g}_u, \theta_1\theta_2, \theta_2)^*$	Remark
$(\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(n-p))$	$(D_p, D_p, \emptyset)$	$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(p))$	$n = 2p$
		$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{so}(p,p))$	
		$(\mathfrak{so}(2p), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(p))$	
	$(D_p, D_{p-i} \oplus D_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{so}(p-i,i) \oplus \mathfrak{so}(i,p-i))$	
		$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{so}(p-i,p-i) \oplus \mathfrak{so}(i,i))$	
		$(\mathfrak{so}(2i, 2(p-i)), \mathfrak{so}(p-i,i) \oplus \mathfrak{so}(i,p-i))$	
	$(D_p, A_{p-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{so}(p,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{R})$	
		$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{sl}(p,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R})$	
		$(\mathfrak{so}^*(2p), \mathfrak{so}(p,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{R})$	
	$(D_p, D_{p-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{so}(p-1,1) \oplus \mathfrak{so}(1,p-1))$	
		$(\mathfrak{so}(p,p), \mathfrak{so}(p-1,p-1) \oplus \mathfrak{so}(1,1))$	
		$(\mathfrak{so}(2(p-1),2), \mathfrak{so}(p-1,1) \oplus \mathfrak{so}(1,p-1))$	
	$(B_p, B_p, \emptyset)$	$(\mathfrak{so}(p,n-p), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(n-p))$	$n > 2p$
		$(\mathfrak{so}(p,n-p), \mathfrak{so}(p,n-p))$	
		$(\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(n-p))$	
	$(B_p, B_{p-i} \oplus D_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(p,n-p), \mathfrak{so}(p-i,i) \oplus \mathfrak{so}(i,n-p-i))$	
		$(\mathfrak{so}(p,n-p), \mathfrak{so}(p-i,n-p-i) \oplus \mathfrak{so}(i,i))$	
		$(\mathfrak{so}(n-2i,2i), \mathfrak{so}(p-i,i) \oplus \mathfrak{so}(i,n-p-i))$	
	$(B_p, B_{p-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(p,n-p), \mathfrak{so}(p-1,1) \oplus \mathfrak{so}(1,n-p-1))$	
		$(\mathfrak{so}(p,n-p), \mathfrak{so}(p-1,n-p-1) \oplus \mathfrak{so}(1,1))$	
		$(\mathfrak{so}(n-2,2), \mathfrak{so}(p-1,1) \oplus \mathfrak{so}(1,n-p-1))$	
$(\mathfrak{so}(2n), \mathfrak{u}(n))$	$(C_{n/2}, C_{n/2}, \emptyset)$	$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{u}(n))$	n: even
		$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2n))$	
		$(\mathfrak{so}(2n), \mathfrak{u}(n))$	
	$(C_{n/2}, C_{n/2-i} \oplus C_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{su}(n-2i,2i) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2n-4i) \oplus \mathfrak{so}^*(4i))$	
		$(\mathfrak{so}(2n-4i,4i), \mathfrak{su}(n-2i,2i) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	$(C_{n/2}, A_{n/2-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{su}^*(n) \oplus \mathbb{R})$	
	$(BC_{(n-1)/2}, BC_{(n-1)/2}, \emptyset)$	$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{u}(n))$	n: odd
	$(BC_{(n-1)/2}, BC_{(n-1)/2-i} \oplus C_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{su}(n-2i,2i) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2n-4i) \oplus \mathfrak{so}^*(4i))$	
		$(\mathfrak{so}(2n-4i,4i), \mathfrak{su}(n-2i,2i) \oplus \mathfrak{so}(2))$	

表 3: (続き)

$(\mathfrak{g}_u, \theta) = (\mathfrak{g}_u, \mathfrak{g}_u^\theta)$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$	Remark
		$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_1\theta_2)^*$	
		$(\mathfrak{g}_u, \theta_1\theta_2, \theta_2)^*$	
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n))$	$(C_n, C_n, \emptyset)$	$(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{u}(n))$	
		$(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}))$	
		$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n))$	
	$(C_n, C_{n-i} \oplus C_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{su}(n-i, i) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
		$(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(n-i, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sp}(i, \mathbb{R}))$	
		$(\mathfrak{sp}(n-i, i), \mathfrak{su}(n-i, i) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	$(C_n, A_{n-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R})$	
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(n-p))$	$(C_p, C_p, \emptyset)$	$(\mathfrak{sp}(p, p), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(p))$	$n = 2p$
		$(\mathfrak{sp}(p, p), \mathfrak{sp}(p, p))$	
		$(\mathfrak{sp}(2p), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(p))$	
	$(C_p, C_{p-i} \oplus C_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{sp}(p, p), \mathfrak{sp}(p-i, i) \oplus \mathfrak{sp}(i, p-i))$	
		$(\mathfrak{sp}(p, p), \mathfrak{sp}(p-i, p-i) \oplus \mathfrak{sp}(i, i))$	
		$(\mathfrak{sp}(2(p-i), 2i), \mathfrak{sp}(p-i, i) \oplus \mathfrak{sp}(i, p-i))$	
	$(C_p, A_{p-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{sp}(p, p), \mathfrak{sp}(p, \mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{sp}(p, p), \mathfrak{su}^*(2p) \oplus \mathbb{R})$	
		$(\mathfrak{sp}(2p, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(p, \mathbb{C}))$	
	$(BC_p, BC_p, \emptyset)$	$(\mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(n-p))$	$n > 2p$
		$(\mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{sp}(p, n-p))$	
		$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(n-p))$	
	$(BC_p, BC_{p-i} \oplus BC_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{sp}(p-i, i) \oplus \mathfrak{sp}(i, n-p-i))$	
		$(\mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{sp}(p-i, p-i) \oplus \mathfrak{sp}(i, i))$	
		$(\mathfrak{sp}(n-2i, 2i), \mathfrak{sp}(p-i, i) \oplus \mathfrak{sp}(i, n-p-i))$	

表 4: Berger の分類 $((\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u},\tilde{\theta},\tilde{\theta})$, $\mathfrak{u}$：単純, $\tilde{\theta}(x,y)=(y,x)\,(x,y\in\mathfrak{u}))$

$\mathfrak{u}$	$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)$	$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_1\theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u,\theta_1\theta_2,\theta_2)^*$
$\mathfrak{e}_6$	$(E_6,E_6,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_6)$
		$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}})$
		$(\mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{e}_6,\mathfrak{e}_6)$
	$(E_6,D_5,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{6(-14)})$
		$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{so}(10,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2,\mathbb{C}))$
		$(\mathfrak{e}_{6(-14)}\oplus\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{e}_{6(-14)})$
	$(E_6,A_1\oplus A_5,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{6(2)})$
		$(\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}},\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C}))$
		$(\mathfrak{e}_{6(2)}\oplus\mathfrak{e}_{6(2)},\mathfrak{e}_{6(2)})$
$\mathfrak{e}_7$	$(E_7,E_7,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_7)$
		$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}})$
		$(\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{e}_7,\mathfrak{e}_7)$
	$(E_7,A_1\oplus D_6,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{7(-5)})$
		$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(12,\mathbb{C}))$
		$(\mathfrak{e}_{7(-5)}\oplus\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{e}_{7(-5)})$
	$(E_7,A_7,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{7(7)})$
		$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}))$
		$(\mathfrak{e}_{7(7)}\oplus\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{e}_{7(7)})$
	$(E_7,E_6,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{7(-25)})$
		$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}\oplus\mathbb{C})$
		$(\mathfrak{e}_{7(-25)}\oplus\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_{7(-25)})$
$\mathfrak{e}_8$	$(E_8,E_8,\emptyset)$	$(\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_8)$
		$(\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}})$
		$(\mathfrak{e}_8\oplus\mathfrak{e}_8,\mathfrak{e}_8)$
	$(E_8,D_8,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{8(8)})$
		$(\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}},\mathfrak{so}(16,\mathbb{C}))$
		$(\mathfrak{e}_{8(8)}\oplus\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{e}_{8(8)})$
	$(E_8,A_1\oplus E_7,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}},\mathfrak{e}_{8(-24)})$
		$(\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}},\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}})$
		$(\mathfrak{e}_{8(-24)}\oplus\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{e}_{8(-24)})$

$\mathfrak{u}$	$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)$	$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_1\theta_2)^*$
		$(\mathfrak{g}_u,\theta_1\theta_2,\theta_2)^*$
$\mathfrak{f}_4$	$(F_4,F_4,\emptyset)$	$(\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}},\mathfrak{f}_4)$
		$(\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}},\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}})$
		$(\mathfrak{f}_4\oplus\mathfrak{f}_4,\mathfrak{f}_4)$
	$(F_4,A_1\oplus C_3,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}},\mathfrak{f}_{4(4)})$
		$(\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}},\mathfrak{sp}(3,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$
		$(\mathfrak{f}_{4(4)}\oplus\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{f}_{4(4)})$
	$(F_4,B_4,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}},\mathfrak{f}_{4(-20)})$
		$(\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}},\mathfrak{so}(9,\mathbb{C}))$
		$(\mathfrak{f}_{4(-20)}\oplus\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{f}_{4(-20)})$
$\mathfrak{g}_2$	$(G_2,G_2,\emptyset)$	$(\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}_2)$
		$(\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}})$
		$(\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2)$
	$(G_2,A_1\oplus A_1,\tilde{\Sigma}-\Sigma)$	$(\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}_{2(2)})$
		$(\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}},\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$
		$(\mathfrak{g}_{2(2)}\oplus\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{g}_{2(2)})$

表 4: (続き)

$\mathfrak{u}$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$	Remark
		$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_1\theta_2)^*$	
		$(\mathfrak{g}_u, \theta_1\theta_2, \theta_2)^*$	
$\mathfrak{su}(n)$	$(A_{n-1}, A_{n-1}, \emptyset)$	$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{su}(n))$	
		$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{su}(n) \oplus \mathfrak{su}(n), \mathfrak{su}(n))$	
	$(A_{n-1}, A_{i-1} \oplus A_{n-i-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{su}(i, n-i))$	$1 \leq i \leq n-1$
		$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(i,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(n-i,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C})$	
		$(\mathfrak{su}(i, n-i) \oplus \mathfrak{su}(i, n-i), \mathfrak{su}(i, n-i))$	
$\mathfrak{so}(2n+1)$	$(B_n, B_n, \emptyset)$	$(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n+1))$	
		$(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}(2n+1) \oplus \mathfrak{so}(2n+1), \mathfrak{so}(2n+1))$	
	$(B_n, B_{n-i} \oplus D_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2(n-i)+1, 2i))$	$1 \leq i \leq n$
		$(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2(n-i)+1,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2i,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}(2(n-i)+1, 2i) \oplus \mathfrak{so}(2(n-i)+1, 2i), \mathfrak{so}(2(n-i)+1, 2i))$	
	$(B_n, B_{n-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2(n-1)+1, 2))$	
		$(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2(n-1)+1,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}(2(n-1)+1, 2) \oplus \mathfrak{so}(2(n-1)+1, 2), \mathfrak{so}(2(n-1)+1, 2))$	

表 4: (続き)

$\mathfrak{u}$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$ / $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_1\theta_2)^*$ / $(\mathfrak{g}_u, \theta_1\theta_2, \theta_2)^*$	Remark
$\mathfrak{sp}(n)$	$(C_n, C_n, \emptyset)$	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n))$	
		$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(n))$	
	$(C_n, C_{n-i} \oplus C_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n-i,i))$	$1 \leq i \leq n$
		$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n-i,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(i,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{sp}(n-i,i) \oplus \mathfrak{sp}(n-i,i), \mathfrak{sp}(n-i,i))$	
	$(C_n, A_{n-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}))$	
		$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}))$	
$\mathfrak{so}(2n)$	$(D_n, D_n, \emptyset)$	$(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n))$	
		$(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}(2n) \oplus \mathfrak{so}(2n), \mathfrak{so}(2n))$	
	$(D_n, D_{n-i} \oplus D_i, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2(n-i),2i))$	$1 \leq i \leq n$
		$(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2(n-i),\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}(2(n-i),2i) \oplus \mathfrak{so}(2(n-i),2i), \mathfrak{so}(2(n-i),2i))$	
	$(D_n, A_{n-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}^*(2n))$	
		$(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}^*(2n) \oplus \mathfrak{so}^*(2n), \mathfrak{so}^*(2n))$	
	$(D_n, D_{n-1}, \tilde{\Sigma} - \Sigma)$	$(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2(n-1),2))$	
		$(\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2(n-1),\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2,\mathbb{C}))$	
		$(\mathfrak{so}(2(n-1),2) \oplus \mathfrak{so}(2(n-1),2), \mathfrak{so}(2(n-1),2))$	