

Singularities of maximal Bonnet-type surfaces in Lorentz space*

神戸大学大学院理学研究科数学専攻 緒方 勇太
Yuta Ogata
Department of Mathematics, Kobe University

1 背景

「平均曲率一定曲面 (CMC 曲面)」はシャボン玉の数学的モデルであり、CMC 曲面の構成方法の研究は古くから行われてきた。1866 年に、K. T. Weierstrass により \mathbb{R}^3 内の平均曲率一定零曲面 (極小曲面) に対して、積分型の公式が与えられた。また、 \mathbb{R}^3 内の平均曲率がゼロでない一定曲面に関しては、J. Dorfmeister と F. Pedit, H. Wu によって、行列分解などを用いた構成理論 (DPW 法 [7]) が考案された。CMC 曲面の構成方法はユークリッド空間だけでなく、リーマン空間形やセミリーマン空間形などでも研究が進んでいる。

一方、「平面的な曲率線をもつ CMC 曲面」は、有名な例を多く含んでいることが知られており、H. Wente ([23]) によって発見されたコンパクト CMC 曲面の非自明な例 (Wente トーラス Figure 1) もこのクラスに含まれている。また、「平面的な曲率線をもつ極小曲面」は A. Enneper や L. P. Eisenhart, J. C. C. Nitsche などの先行研究 ([8], [9], [16]) により、すでに分類定理が存在し、平面、Catenoid、Enneper 曲面、Bonnet 曲面に限ることが知られている。

また、近年、Leite (see [14]) によって 3 次元ローレンツ空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の「平面的な曲率線をもつ極大曲面」の分類が与えられた (see Fact 2.2)。Leite の分類によって 6 つのケースに分類されることがわかるが、特異点については当論文内では全く触れられていなかった。本論文では、「平面的な曲率線をもつ極大曲面」の特異点について解析を行うが、「極大 Bonnet 型曲面」以外のケースについては既に先行研究が存在するため、「極大 Bonnet 型曲面の特異点」を主に考える。その際、Theorem 3.1 の結果を導出することにより、「極大 Bonnet 型曲面の特異点」の完全な型判定定理を与えたことを報告する (see Theorem 3.2)。

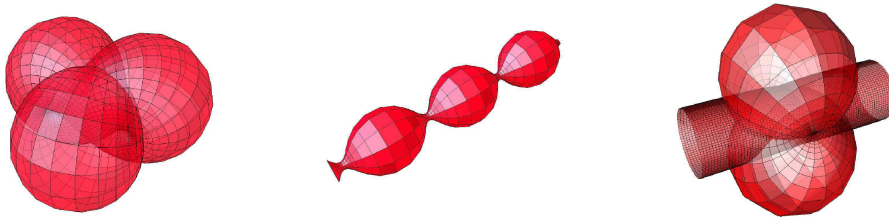


Fig. 1: Wente トーラス、Delaunay 曲面 (Unduloid)、柱面的バブルトン (left to right)

*この研究は、Joseph Cho 氏 (神戸大学) との共同研究 ([6]) と、寺本 圭佑氏 (神戸大学) との共同研究 ([17]) によるものである。

2 平面的な曲率線をもつ極大曲面

先行研究 [12] 内において、3次元ローレンツ空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的な平均曲率零曲面（極大曲面）について Weierstrass 型の表現公式が構成された。その後、[21] 内において、ある種の特異点を許容する形で一般化され、それらは「極大面」と呼ばれている：

Fact 2.1 (極大面 [21]). $\Sigma \subset (\mathbb{C}; z)$ を単連結領域とする。 g を有理型関数、 $\omega = \hat{\omega} dz$ を正則 1 次微分形式とし、 $(1 + |g|^2)^2 |\hat{\omega}|^2 \neq 0$ を満たすものとする。そのとき、

$$f = \operatorname{Re} \left[\int (-2g, 1 + g^2, i(1 - g^2)) \omega \right] \quad (2.1)$$

は、 $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の極大面を定める。また、任意の極大面は局所的にこの方法で与えることができる。

ここでは、Leite (see [14]) によって与えられた「平面的な曲率線をもつ極大曲面の分類定理」を紹介する：

Fact 2.2 ([6], [14]). $\mathbb{R}^{2,1}$ の等長変換と相似拡大の自由度を除いて、平面的な曲率線をもつ極大曲面は、以下の 6 つのケースに限る。

- 空間的平面 (P) $(0, 1 dz)$,
- 極大 *Enneper* 曲面 (E) $(z, 1 dz)$,
- 光的な軸をもつ極大カテナイド (C_L) $(\frac{1-z}{1+z}, -\frac{(1+z)^2}{2} dz)$ と、その同伴族,
- 時間的な軸をもつ極大カテナイド (C_T) $(e^z, e^{-z} dz)$,
- 空間的な軸をもつ極大カテナイド (C_S) $((1 - e^z)/(1 + e^z), (-1 - \cosh z) dz)$,
- 極大 *Bonnet* 型曲面 $\{(-e^z + t, -\frac{e^{-z}}{2} dz), t > 0\}$
 $(B_S: t > 1, B_L: t = 1, B_T: 0 < t < 1)$.

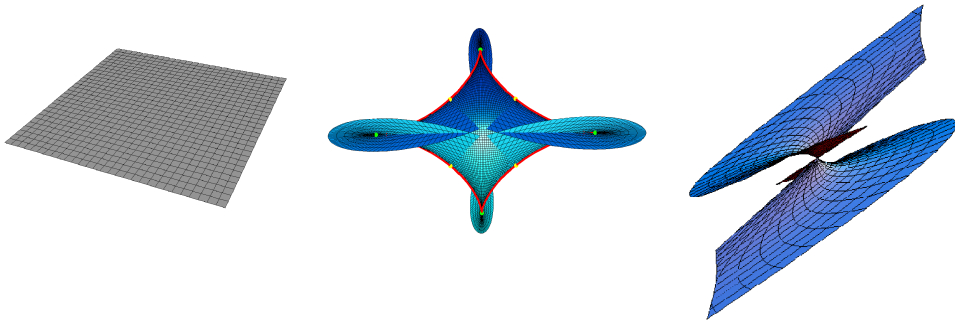


Fig. 2: 空間的平面, 極大 Enneper 曲面, 光的な軸をもつ極大カテナイド (left to right)

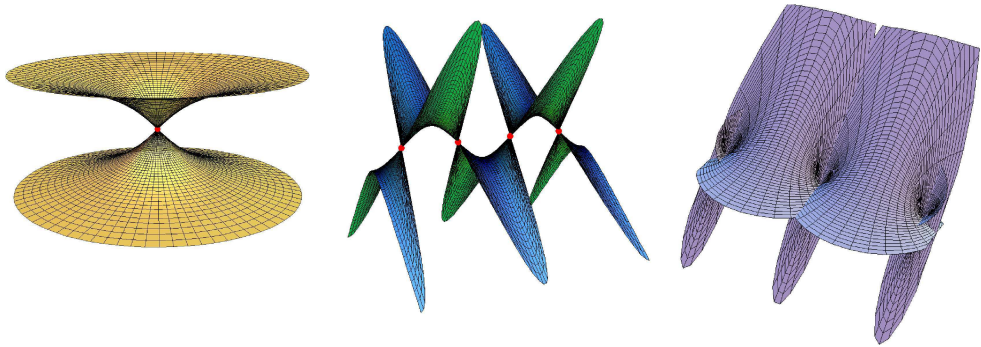


Fig. 3: 時間的な軸をもつ極大カテナイド, 空間的な軸をもつ極大カテナイド, 極大 Bonnet 型曲面 (left to right)

また、[6] では、平面的な曲率線をもつ極大曲面が「連続変形による極大曲面の 1 変数族」になることを示した：

Theorem 2.1 ([6]). 平面的な曲率線をもつ極大曲面は、極大性と平面曲率線条件を保つ連続変形により「極大曲面の 1 変数族」になる。

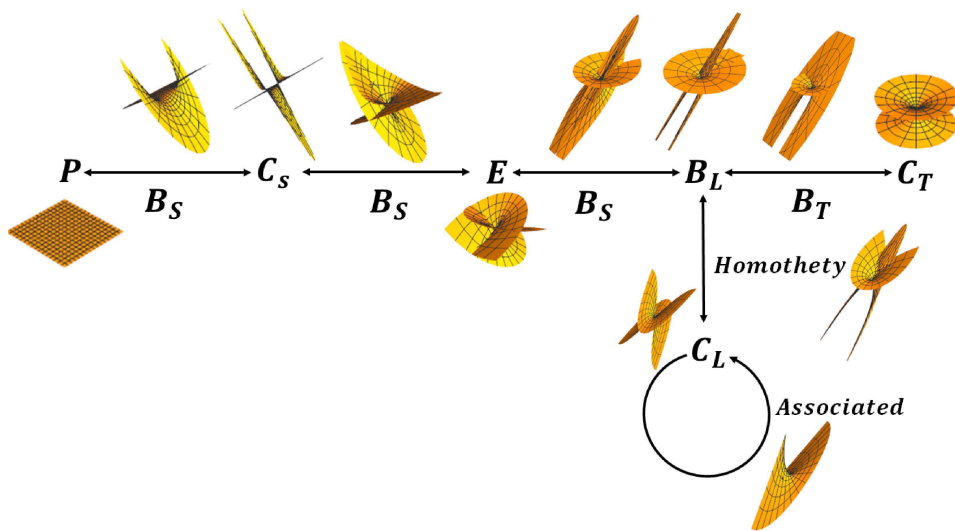


Fig. 4: 平面的な曲率線をもつ極大曲面と、その連続変形

3 極大 Bonnet 型曲面の特異点

先行研究 [21] 内では、極大面に対し、カスプ的曲面とツバメの尾の Weierstrass データによる判定法が与えられた。一方で [10] 内では、極大面がジェネリックにフロントルの特異点をもつことが示され、カスプ的交叉帽子の Weierstrass データによる判定法が与えられた。

Fact 3.1 ([10], [21]). $\Sigma \subset (\mathbb{C}; z)$ を単連結領域とする。 $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ を Weierstrass データ (g, ω) によって与えられる極大面とし、 p を f の特異点とする。

- (1) f : カスプ辺 at $p \iff \operatorname{Re}[\varphi] \neq 0$ and $\operatorname{Im}[\varphi] \neq 0$ at p .
- (2) f : ツバメの尾 at $p \iff \operatorname{Re}[\varphi] \neq 0, \operatorname{Im}[\varphi] = 0$ and $\operatorname{Re}[\phi] \neq 0$ at p .
- (3) f : カスプ的交叉帽子 at $p \iff \operatorname{Re}[\varphi] = 0, \operatorname{Im}[\varphi] \neq 0$ and $\operatorname{Im}[\phi] \neq 0$ at p .

ただし、

$$\varphi := \frac{g_z}{g^2 \hat{\omega}}, \quad \phi := \frac{g}{g_z} \left(\frac{g_z}{g^2 \hat{\omega}} \right)_z.$$

	$\operatorname{Re}[\varphi]$	$\operatorname{Im}[\varphi]$	$\operatorname{Re}[\phi]$	$\operatorname{Im}[\phi]$
カスプ辺 (CE)	$\neq 0$	$\neq 0$	\times	\times
ツバメの尾 (SW)	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	\times
カスプ的交叉帽子 (CCR)	$= 0$	$\neq 0$	\times	$\neq 0$

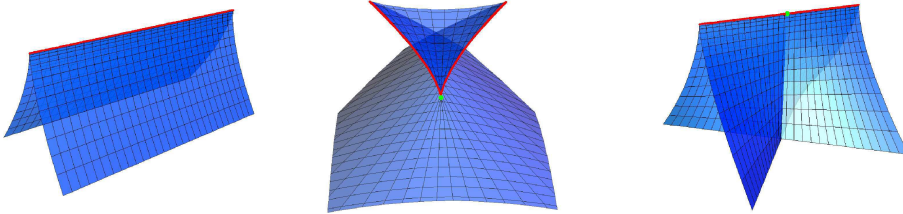


Fig. 5: カスプ辺、ツバメの尾、カスプ的交叉帽子

Remark 3.1. Fact 3.1等を用いることで、Leite の分類結果のうち、「極大 Bonnet 型曲面」以外の 5 つのケースは既に「特異点の型」が特定されている (see [10], [21], [13], etc):

空間的平面：特異点なし、極大 Enneper 曲面：カスプ辺とツバメの尾とカスプ的交叉帽子、
 光的な軸をもつ極大カテナイドとその同伴族：錘状特異点と折り目特異点とカスプ辺、
 時間的な軸をもつ極大カテナイド：錘状特異点、空間的な軸をもつ極大カテナイド：錘状特異点。

Remark 3.1より、以下では「極大 Bonnet 型曲面」のみを考え、特異点の型判定を考える。まず、極大 Bonnet 型曲面の Weierstrass データは、

$$g(z) = -e^z + t, \quad \hat{\omega}(z) dz = -\frac{e^{-z}}{2} dz$$

ただし、 $t > 0$ は定数。また、極大 Bonnet 型曲面は周期的な曲面になるとわかるので、定義域を $\{u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi)\}$ に制限する (ただし、 $z = u + iv$ とおいた)。このとき、Fact 3.1を適用すると、以下の“不完全な”結果が得られる：

Lemma 3.1. $f^t(u, v)$ を Weierstrass データ $\left(-e^z + t, -\frac{e^{-z}}{2} dz\right)$ で与えられる極大 Bonnet 型曲面とする。定義域 $\{u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi)\}$ に制限した極大 Bonnet 型曲面の特異点は、以下の表の点を除いて「カスプ辺」になる：

	# of ツバメの尾	# of カスプ的交叉帽子	# of 不明な特異点
$0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$	2	0	0
$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$	2	0	2
$\frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1$	2	4	0
$t = 1$	1	2	0
$1 < t$	4	4	0

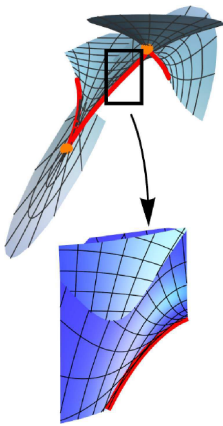


Fig. 6: $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$

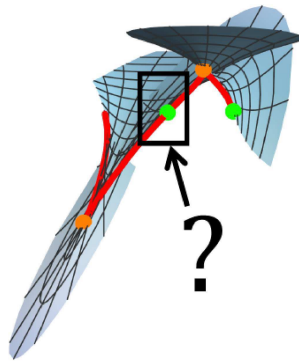


Fig. 7: $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

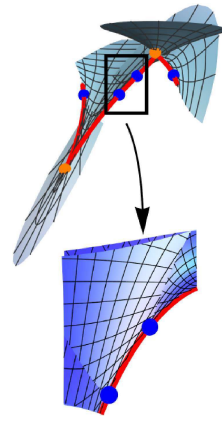


Fig. 8: $\frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1$

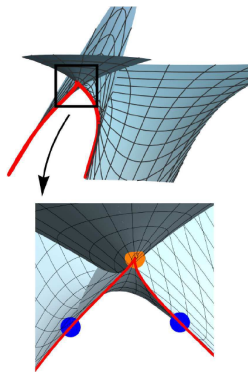


Fig. 9: $t = 1$

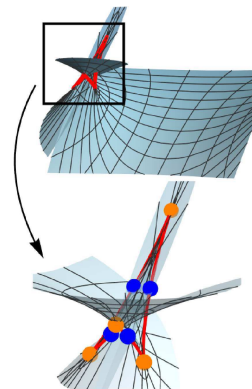


Fig. 10: $1 < t$

Lemma 3.1では、既存の判定法 Fact 3.1を適用して、特異点の型判定を試みたが、 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ において判定不能になる点が2点存在してしまい、不完全な結果になってしまう。この課題の解決のため、寺本氏との共同研究による「カスプの蝶々」と「カスプ的 S_1^- 特異点」の Weierstrass データによる判定法を述べる：

Theorem 3.1 ([17]). $\Sigma \subset (\mathbb{C}; z)$ を単連結領域とする。 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ を Weierstrass データ (g, ω) によって与えられる極大面とし、 p を f の特異点とする。

(1) f : カスプ的蝶々 at $p \iff \operatorname{Re}[\varphi] \neq 0, \operatorname{Im}[\varphi] = 0, \operatorname{Re}[\phi] = 0$ and $\operatorname{Im}[\Phi] \neq 0$ at p .

(2) f : カスプ的 S_1^- 特異点 at $p \iff \operatorname{Re}[\varphi] = 0, \operatorname{Im}[\varphi] \neq 0, \operatorname{Im}[\phi] = 0$ and $\operatorname{Re}[\Phi] \neq 0$ at p .

ただし、

$$\varphi := \frac{g_z}{g^2 \tilde{\omega}}, \quad \phi := \frac{g}{g_z} \left(\frac{g_z}{g^2 \tilde{\omega}} \right)_z, \quad \Phi := \frac{g}{g_z} \left\{ \frac{g}{g_z} \left(\frac{g_z}{g^2 \tilde{\omega}} \right)_z \right\}_z. \quad (3.1)$$

さらに、Weierstrass データを (g, ω) から $(g, i\omega)$ に取り換える操作で、カスプ的蝶々とカスプ的 S_1^- 特異点は互いに移りあう。すなわち、ある極大面上のカスプ的蝶々とその共役極大面上のカスプ的 S_1^- 特異点は互いに対応し、双対性が存在する。

	$\operatorname{Re}[\varphi]$	$\operatorname{Im}[\varphi]$	$\operatorname{Re}[\phi]$	$\operatorname{Im}[\phi]$	$\operatorname{Re}[\Phi]$	$\operatorname{Im}[\Phi]$
カスプ的蝶々	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	\times	\times	$\neq 0$
カスプ的 S_1^- 特異点	$= 0$	$\neq 0$	\times	$= 0$	$\neq 0$	\times

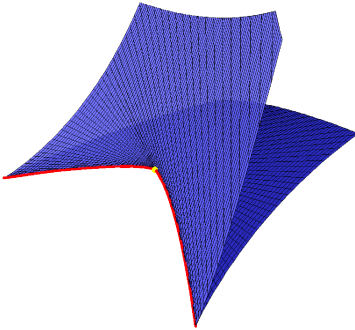


Fig. 11: カスプ的蝶々

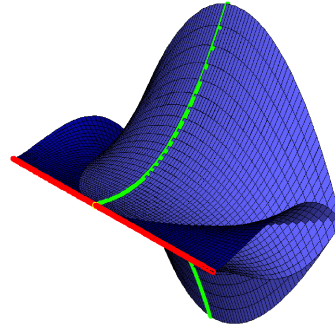
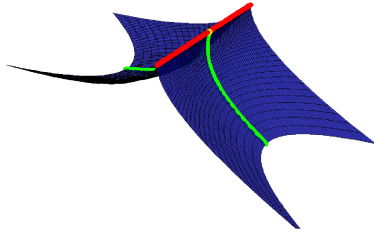


Fig. 12: カスプ的 S_1^- 特異点

上の定理の証明より、以下の系を得る：

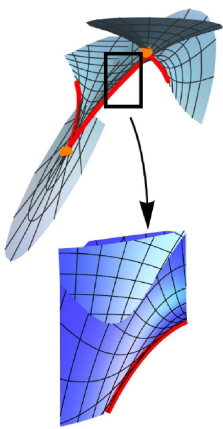
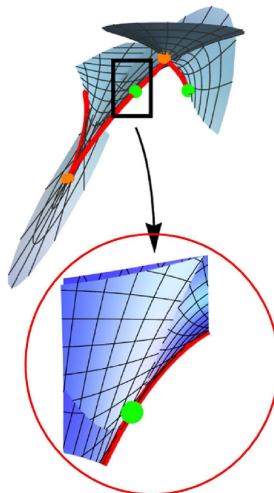
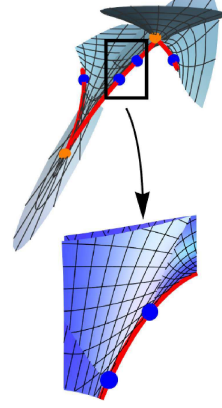
Corollary 3.1 ([17]). カスプ的 S_1^+ 特異点をもつ $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の極大面は存在しない。

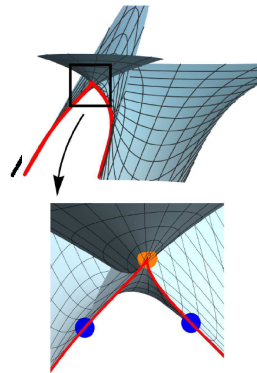
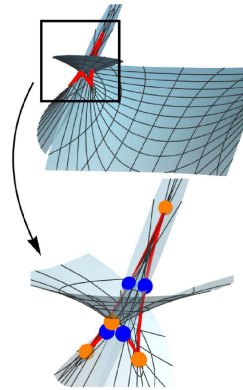
Fig. 13: カスプ的 S_1^+ 特異点

Theorem 3.1の判定法を適用することで、以下の主定理を得る。

Theorem 3.2. $f^t(u, v)$ を Weierstrass データ $\left(-e^z + t, -\frac{e^{-z}}{2} dz\right)$ で与えられる極大 Bonnet 型曲面とする。定義域 $\{u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi)\}$ に制限した極大 Bonnet 型曲面の特異点は、以下の表の点を除いて「カस्प辺」になる：

	# of ツバメの尾	# of カスプ的交叉帽子	# of カスプ的 S_1^- 特異点
$0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$	2	0	0
$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$	2	0	2
$\frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1$	2	4	0
$t = 1$	1	2	0
$1 < t$	4	4	0

Fig. 14: $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ Fig. 15: $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Fig. 16: $\frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1$

Fig. 17: $t = 1$ Fig. 18: $1 < t$

Bibliography

- [1] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, J. Reine Angew. Math. **374** (1987).
- [2] W. Barthel, R. Volkmer, and I. Haubitz, *Thomsenche Minimalflächen - analytisch und anschaulich*, Resultate Math. **3**(2), 129-154 (1980)
- [3] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie II: Affine Differentialgeometrie*, Springer, Berlin, 1923.
- [4] O. Bonnet, *Observations sur les surfaces minima*, C. R. Acad. Sci. Paris **41**, 1057-1068 (1855).
- [5] J. Cho and Y. Ogata, *Deformation of minimal surfaces with planar curvature lines*, J. Geom., DOI:10.10007/s00022-016-0352-0.
- [6] J. Cho and Y. Ogata, *Deformation and singularities of maximal surfaces with planar curvature lines*, submitted.
- [7] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6**(4) (1998), 633-668.
- [8] L. P. Eisenhart, *A Treatise on Differential Geometry on Curves and Surfaces*, Ginn and Company, Boston, 1909.
- [9] A. Enneper, *Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien*. Abh. Königl. Ges. Wissensch. Göttingen **23** (1878) and **24** (1880).

- [10] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259**, no. 4, 827-848 (2008).
- [11] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92-127.
- [12] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space \mathbb{L}^3* , Tokyo J. Math. **6** (2), 297-309 (1983).
- [13] O. Kobayashi, *Maximal surfaces with coneline singularities*, J. Math. Soc. Japan **36**, no. 4, 609-617 (1984).
- [14] M. L. Leite, *Surfaces with planar lines of curvature and orthogonal systems of cycles*, J. Math. Anal. Appl. **421**, no. 2, 1254-1273 (2015).
- [15] F. Manhart, *Bonnet-Thomsen surfaces in Minkowski geometry*, J. Geom. **106**, no. 1, 47-61 (2015).
- [16] J. C. C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces*, Cambridge University Press., vol. 1, (1989).
- [17] Y. Ogata and K. Teramoto, *Duality between cuspidal butterflies and cuspidal S_1^- singularities on maxfaces*, submitted.
- [18] K. Saji, *Criteria for cuspidal S_k singularities and its applications*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **4** (2010), 67-81.
- [19] H. Schaal, *Die Ennepersche Minimalfläche als Grenzfall der Minimalfläche von G. Thomsen*, Arch. Math. (Basel) **24** (1973), 320-322.
- [20] G. Thomsen, *Über affine Geometrie XXXIX*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **2** (1923), no. 1, 71-73.
- [21] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (1), 13-40 (2006).
- [22] R. Walter, *Explicit examples of the H-problem of Heinz Hopf*, Geom. Dedicata **23**, 187-213 (1987).
- [23] H. C. Wente, *Counterexample to a conjecture of a H. Hopf*, Pacific J. Math., **121**, no. 1, 193-243 (1986).