数理解析研究所講究録
第2017巻 2017年 68-76

Hermite 対称空間内の全測地的複素曲線*

広島修道大学経済科学部　久保亮†

Akira KUBO
The Faculty of Economic Sciences,
Hiroshima Shudo University

1 Introduction

対称空間内の部分多様体論において, (完備連結な) 全測地的部分多様体の分類は最も基本的な問題の 1 つであり, 古くから研究されている. 例えば,

- Wolf : 階数 1 対称空間内の全測地的部分多様体の分類 ([13, 14]),
- Klein : 階数 2 対称空間内の極大全測地的部分多様体の分類 ([5, 6, 7, 8]),

などがある. しかしながら, 極大な場合に限っても, その分類は一般には難しい問題である (実際, 階数 2 対称空間の場合に極大全測地的部分多様体の分類が完成したのも最近のことである). 階数が 3 以上の対称空間に対しては, 全測地的部分多様体の分類は, 現時点では完成には程遠いと思われる.

そこで我々は「非コンパクト型」対称空間内の全測地的「曲面」の分類問題に着目した. よく知られているように, 対称空間内の全測地的部分多様体は何らかの全測地的曲面を常に含むため, 初めに全測地的曲面の分類を行うことで, その結果を元にして一般の全測地的部分多様体の分類を行うという応用が期待できる. また, 全測地的部分多様体は対称空間の双対性によって保たれることから, コンパクト・非コンパクトのいずれの場合で考えてもよいが, 非コンパクト型の場合には岩澤分解や巾零群の理論が使える (このような観点からのアプローチは, 先行研究の多くが「コンパクト型」対称空間内の「極大」全測地的部分多様体を扱っていることと非常に対照的である).

一方で, 対称空間内の全測地的部分多様体は Lie triple system と呼ばれる部分空間に対応する. $M = G/K$ を非コンパクト型対称空間とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を対応す

*RIMS 研究集会「部分多様体の微分幾何学的研究」講究録

†E-mail: akubo@shudo-u.ac.jp

る Cartan 分解とする. このとき, T_oM は $\mathfrak{p}$ と自然に同一視される (o は G/K の原点).

定義 1.1. 部分空間 $\Sigma \subset \mathfrak{p}$ が Lie triple system であるとは, $[[\Sigma, \Sigma], \Sigma] \subset \Sigma$ が成り立つこと.

定理 1.2 (cf: [1], [3]). 次の 2 つに対応が存在する:

(i) M 内の点 o を通る全測地的部分多様体 M',

(ii) $\mathfrak{p}$ 内の Lie triple system Σ.

以上より, 非コンパクト型対称空間内の非平坦全測地的曲面を分類するためには, 非可換 2 次元 Lie triple system を分類すればよい. したがって, 非平坦全測地的曲面の分類は代数的な議論に帰着される.

本稿の構成は次のとおりである. 第 2 節では, AI 型対称空間 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ 内の非平坦全測地的曲面に関して, それらが然るべき巾零行列と対応することを述べ, それを用いて $n = 3, 4$ の場合に明示的に非平坦全測地的曲面の分類を与える. 第 3 節では, 第 2 節で述べた全測地的曲面と巾零行列との対応を, 一般の非コンパクト型対称空間の場合に拡張する. さらに, 非コンパクト型対称空間内の全測地的曲面の例をいくつか紹介する. 第 4 節では, 第 3 節で述べた主結果を応用して, Hermite 対称空間内の複素全測地的曲面の分類について述べる.

本稿は主に広島大学の田丸博士氏, 奥田隆幸氏との共同研究に基づく. また, 研究集会で発表の機会を与えてくださった山田拓身氏, 発表の際に有益な助言をくださった田崎博之氏, 田中真紀子氏はこの場を借りて感謝を申し上げる.

2 AI 型対称空間内の全測地的曲面

ここでは, AI 型の非コンパクト型対称空間 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ 内の非平坦全測地的曲面に関して得られた結果を述べる. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ は 階数の $n-1$ の対称空間であり, 階数の高い対称空間の中では扱いやすく, また一般の対称空間について研究する際の雛形となる.

前節で述べたように, 非平坦全測地的曲面は $\mathfrak{p}$ 内の非可換 2 次元 Lie triple system に対応する. ここで, Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ の場合を考えると,

$$\mathfrak{k} := \mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{g} \mid {}^tX = -X\},$$
$$\mathfrak{p} := \mathrm{Sym}^0(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid {}^tX = X\}$$

とおくことで Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ が得られる. このとき, $\mathfrak{p}$ 内の 2 次元 Lie triple system はさらに然るべき巾零行列に対応する.

定理 2.1 ([2]). 狭義上三角行列 $X\ (\neq 0)$ が次の条件を満たすとする:

(C1) $[X, {}^tX] \in \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{g} \mid a_1 \geq \cdots \geq a_n\}$,

(C2) $\exists c > 0$ s.t. $[[X, {}^tX], X] = cX$.

このとき, $\Sigma_X := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{[X, {}^tX], X + {}^tX\}$ は $\mathrm{Sym}^0(n, \mathbb{R})$ 内の非可換 2 次元 Lie triple system である. 逆に $\mathrm{Sym}^0(n, \mathbb{R})$ 内の任意の非可換 2 次元 Lie triple system は共役を除いて上記の構成によって得られる.

証明 (概略). (C2) を満たす X に対して, Σ_X が $\mathrm{Sym}^0(n, \mathbb{R})$ 内の非可換 2 次元 Lie triple system であることは直接計算すればよいので, 逆を証明する.

任意に非可換 2 次元 Lie triple system $\Sigma = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{V, W\} \subset \mathrm{Sym}^0(n, \mathbb{R})$ をとる. ただし, $\{V, W\}$ は正規直交基底とする. このとき V は対称行列なので, 線型代数の一般論 (対称行列の対角化) から, 直交行列 $k \in \mathrm{O}(n)$ が存在して

$$H := kVk^{-1} \in \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{g} \mid a_1 \geq \cdots \geq a_n\}$$

が成り立つ. そこで $Y := kWk^{-1}$ とおくと, Y は対称行列なので, 対角行列 D と狭義上三角行列 X が存在して,

$$Y = X + D + {}^tX$$

が成り立つ. このとき $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H, Y\}$ が非可換 2 次元 Lie triple system であることから, $X \neq 0$ や $D = 0$ が従う. また H の条件から X が (C1), (C2) を満たすことや,

$$\Sigma \cong \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H, Y\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{[X, {}^tX], X + {}^tX\} = \Sigma_X$$

が得られる. □

上記の定理は, 1 対 1 の対応までは与えていない (実際, 少なくとも X は定数倍の自由度を許している). そこで, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ 内の全測地的曲面を分類するためには, 次の手順を踏むことになる:

(Step 1) 条件 (C1), (C2) を満たす X を分類する,

(Step 2) 得られる Lie triple system Σ_X を共役の下で分類する.

我々は $n = 3, 4$ の場合に, $\mathrm{Sym}^0(n, \mathbb{R})$ 内の非可換 2 次元 Lie triple system を明示的に分類した. 以下, $\mathfrak{p} = \mathrm{Sym}^0(n, \mathbb{R})$ 上の内積を $\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}(XY)$ で定める.

命題 2.2 ([2]). $\mathrm{Sym}^0(3, \mathbb{R})$ 内の非可換 2 次元 Lie triple system は次のいずれかと共役である:

(1) $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}\right\}$,

(2) $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}\right\}$.

また, 対応する全測地的曲面の曲率はそれぞれ -2, $-1/2$ である.

命題 2.3 ([2]). $\mathrm{Sym}^0(4,\mathbb{R})$ 内の非可換 2 次元 Lie triple system は次のいずれかと共役である:

(1) $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\right\}$,

(2) $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}\right\}$,

(3) $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & \\ 1 & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}\right\}$,

(4) $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \sqrt{3} & & \\ \sqrt{3} & & 2 & \\ & 2 & & \sqrt{3} \\ & & \sqrt{3} & \end{pmatrix}\right\}$.

また, 対応する全測地的曲面の曲率はそれぞれ -2, -1, $-1/2$, $-1/5$ である.

系 2.4. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ 内の非平坦全測地的曲面の個数は, 等長的合同を除いて,

(1) $n=3$ のとき 2 個,

(2) $n=4$ のとき 4 個.

注意 2.5. $n=3$ の場合は, Klein による階数 2 対称空間内の極大全測地的部分多様体の分類から得ることもできるが, 今回の結果はそれを用いず, 線型代数の議論だけで得られたものである. また $n=4$ $(\mathrm{rank}=3)$ の場合は, これまで知られていなかった結果と思われる.

3 対称空間内の全測地的曲面

ここでは, 前節で述べた $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ に関する結果が, 一般の非コンパクト型対称空間 $M=G/K$ に対しても成り立つことを述べる. また, その結果から得られる全測地的曲面の例をいくつか紹介する.

まずいくつか記号を準備する. $M=G/K$ を階数 r の (既約とは限らない) 非コンパクト型対称空間とし, 引き続き $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする. 対応する Cartan 対合を $\theta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ とし, $\mathfrak{g}$ の内積を $\langle X,Y\rangle=-B(X,\theta Y)$ $(X,Y\in\mathfrak{g})$ で定義する. また $T_oM\cong\mathfrak{p}$ の内積を $\langle,\rangle|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ に正規化する.

極大可換部分空間 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ を固定し, $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間とする. 各 $\alpha\in\mathfrak{a}^*$ に対して,

$$\mathfrak{g}_\alpha:=\{X\in\mathfrak{g}\mid \mathrm{ad}(H)X=\alpha(H)X\ (\forall H\in\mathfrak{a})\}$$

とおく. $\alpha\neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha\neq 0$ のとき, α を制限ルートという. 制限ルート全体の集合を Δ, 正ルート全体の集合を Δ^+ で表す. このとき,

$$\mathfrak{n}:=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha$$

とおくと, $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の巾零 Lie 代数である. また, Δ^+ に関する単純ルート全体を $\Lambda=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ で表す. このとき, 基本 Weyl 領域を

$$\mathfrak{a}^+:=\{H\in\mathfrak{a}\mid \alpha_i(H)\geq 0\ (\forall\alpha_i\in\Lambda)\}$$

で定める.

次が本稿の主結果の 1 つである.

定理 3.1 ([9]). $X\in\mathfrak{n}\setminus\{0\}$ が次の条件を満たすとする:

(C1) $[\theta X,X]\in\mathfrak{a}^+$,

(C2) $\exists c>0$ s.t. $[[\theta X,X],X]=cX$.

このとき, $\Sigma_X:=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{[X,{}^tX],X+{}^tX\}$ は $\mathfrak{p}$ 内の非可換 2 次元 Lie triple system である. 逆に $\mathfrak{p}$ 内の任意の非可換 2 次元 Lie triple system は, 共役を除いて上記の構成によって得られる.

証明. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ の場合の議論を, 一般の制限ルート系で行えばよい. 詳細は [9] を参照. □

ここでは, 上記の定理から得られる非可換 2 次元 Lie triple system の例をいくつか紹介する. 以下, 各 $\beta\in\Delta^+$ に対して, $E_\beta\in\mathfrak{g}_\beta$ を単位ベクトルとし, ルートベクトルを H_β $(=[\theta E_\beta,E_\beta])$ で表す.

命題 3.2. $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Delta^+$ 及び $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が次の条件を満たすとする:

(0) $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j \Rightarrow \beta_i - \beta_j \notin \Delta \cup \{0\}$,

(1) $\forall \alpha \in \Lambda$, $\alpha(\sum c_i^2 H_{\beta_i}) \geq 0$,

(2) $\exists c > 0$ s.t. $\forall j \in \{1, \dots, k\}$, $\beta_j(\sum c_i^2 H_{\beta_i}) = c$.

このとき, $X := \sum c_i E_{\beta_i}$ とおくと, Σ_X は $\mathfrak{p}$ 内の任意の非可換 2 次元 Lie triple system である. さらに, 対応する全測地的曲面の断面曲率は $-c/\sum c_i^2$.

証明. 条件 (0) によって, $[\theta X, X] = \sum c_i^2 H_{\beta_i}$ が成り立つ. このとき, 条件 (1), (2) はそれぞれ定理 3.1 の条件 (C1), (C2) の言い換えである. □

例 3.3. $M = \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(4)$, $\Delta = \mathrm{A}_3$ の場合を考える. 単純ルートを $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ とする. このとき, 次の X から得られる Σ_X は非可換 2 次元 Lie triple system.

(1) $X = E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$,

(2) $X = E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{\alpha_2+\alpha_3}$,

(3) $X = \sqrt{2}E_{\alpha_1+\alpha_2} + \sqrt{2}E_{\alpha_3}$,

(4) $X = \sqrt{3}E_{\alpha_1} + 2E_{\alpha_2} + \sqrt{3}E_{\alpha_3}$.

注意 3.4. 上記の X から得られる Lie triple system は, 命題 2.3 で挙げた例にそれぞれ対応している.

例 3.5. $M = G_2^2/\mathrm{SO}(4)$, $\Delta = \mathrm{G}_2$ の場合を考える. 単純ルートを $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ($|\alpha_1| < |\alpha_2|$) とする. このとき, 次の X から得られる Σ_X は非可換 2 次元 Lie triple system.

(1) $X = E_{3\alpha_2+2\alpha_2}$,

(2) $X = \sqrt{3}E_{2\alpha_1+\alpha_2}$,

(3) $X = \sqrt{2}E_{\alpha_2} + \sqrt{2}E_{3\alpha_1+\alpha_2}$,

(4) $X = \sqrt{3}E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{3\alpha_1+\alpha_2}$,

(5) $X = 3\sqrt{2}E_{\alpha_1} + \sqrt{10}E_{\alpha_2}$.

例 3.6. $M = (\mathbb{R}\mathrm{H}^2)^r$, $\Delta = (\mathrm{A}_1)^r$ の場合を考える. 単純ルートを $\Lambda = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ とする. このとき, 各 $k \in \{1, \dots, r\}$ に対して, $X = E_{\alpha_1} + \cdots + E_{\alpha_k}$ から得られる Σ_X は非可換 2 次元 Lie triple system である. さらに, 対応する全測地的曲面の曲率はすべて異なる.

4 Hermite 対称空間内の全測地的複素曲線

ここでは既約 Hemite 対称空間内の全測地的複素曲線, すなわち, 複素構造で保たれる全測地的実曲面の分類について述べる. 自然に, 全測地的複素曲線の分類問題は「J-不変な実 2 次元 Lie triple system」の分類に帰着される.

まず必要な記号を準備する. $M = G/K$ を階数 r の非コンパクト型既約 Hermite 対称空間とし, M の複素構造を J で表す. このとき, $J = \mathrm{ad}(Z)|_{\mathfrak{p}}$ を満たす $Z \in C(\mathfrak{k})$ が符号を除いて一意に存在する (以下, Z を固定する). また, M の制限ルート系 Δ は

$$\mathrm{C}_r := \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq r\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq r\},$$
$$\mathrm{BC}_r := \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq r\} \cup \{\pm\varepsilon_i, \pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq r\}$$

のいずれかである. このとき, $\{2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_r\}$ に関して, 次が成り立つことが知られている:

- $\{2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_r\}$ は strongly orthogonal であり, 各ルートの長さは等しい.
- 各 $2\varepsilon_i$ の重複度は 1, すなわち, $\dim \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i} = 1$.
- $J\mathfrak{a} = \bigoplus(1-\theta)\mathfrak{g}_{2\varepsilon_i}$.

よって, 次が容易に従う.

命題 4.1. $\mathfrak{a} \oplus (\bigoplus(1-\theta)\mathfrak{g}_{2\varepsilon_i})$ は J-不変な実 $2r$ 次元の Lie triple sysytem であり, 対応する全測地的部分多様体は $(\mathbb{C}\mathrm{H}^1)^r$.

注意 4.2. ここで, 上記の正則はめ込み $\varphi : (\mathbb{C}\mathrm{H}^1)^r \to M$ を **Hermann map** と呼ぶ ([12]). また $(\mathbb{C}\mathrm{H}^1)^r$ は [10] では Helgason product と呼ばれている.

よって M 内の全測地的複素曲線を分類するためには, $(\mathbb{C}\mathrm{H}^1)^r$ 内の全測地的複素曲線を分類すればよく, したがって, $\mathfrak{a} \oplus (\bigoplus(1-\theta)\mathfrak{g}_{2\varepsilon_i})$ 内の J-不変な実 2 次元 Lie triple system の分類問題に帰着される.

ここで $JH_{2\varepsilon_i} \in (1-\theta)\mathfrak{g}_{2\varepsilon_i}$ が成り立つので, $JH_{2\varepsilon_i} = C(1-\theta)E_i$ (ただし $C > 0$) を満たす単位ベクトル $E_i \in \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i}$ をとる. 次が本稿の主結果 (全測地的複素曲線の分類) である.

定理 4.3 ([9]). 各 $k \in \{1, \ldots, r\}$ に対して, $X := E_1 + \cdots + E_k$ とおくと, $\Sigma_X := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{[\theta X, X], (1-\theta)X\}$ は $\mathfrak{p}$ 内の J-不変な実 2 次元 Lie triple system である. 逆に $\mathfrak{p}$ 内の J-不変な実 2 次元 Lie triple system は, 共役を除いてこの構成によって得られる.

証明 (概略). 各 $X = E_1 + \cdots + E_k$ に対して, Σ_X が J-不変な実 2 次元 Lie triple system であることは直接計算すればよい (Lie triple system になることは既に例 3.6 で見ている) ので, 逆を証明する.

任意に Σ を $\mathfrak{p}$ 内の J-不変な実 2 次元 Lie triple system をとる. 定理 3.1 より, 条件 (C1), (C2) を満たす $X \in \mathfrak{n}$ が存在して, $\Sigma \cong \Sigma_X$ が成り立つ. また上記の議論から, $X \in \bigoplus \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i}$ が成り立つ. 以上の条件を踏まえると, ある k が存在して, $X = E_1 + \cdots + E_k$ (の定数倍) が得られる. □

注意 4.4. $X = E_1 + \cdots + E_k$ に対応する全測地的複素曲線は次で与えられる: 各 k に対して, ι_k を

$$\iota_k : \mathbb{C}\mathrm{H}^1 \to (\mathbb{C}\mathrm{H}^1)^r : z \mapsto (\underbrace{z, \ldots, z}_{k}, \underbrace{o, \ldots, o}_{r-k}),$$

で定めたとき, $\varphi \circ \iota_k(\mathbb{C}\mathrm{H}^1)$ (ここで, o は M の原点, $\varphi : (\mathbb{C}\mathrm{H}^1)^r \to M$ は Hermann map である).

各 $k \in \{1, \ldots, r\}$ に対して, $X := E_1 + \cdots + E_k$ から得られる全測地的複素曲線の曲率は互いに異なるので, 次が従う.

系 4.5 ([9]). 階数 r の既約 Hermite 対称空間内の全測地的複素曲線は, 共役を除いてちょうど r 個存在する.

注意 4.6. Ihara, Satake によって, 各 Hermite 対称空間に対して, 極大全測地的複素部分多様体は分類されている ([4, 11, 12]). したがって, 全測地的複素曲線を分類する上で, それぞれの Hermite 対称空間に対して極大全測地的複素部分多様体の系列を順に調べるという方法をとることもできる. しかし今回の我々の結果は, そのような方針ではなく, 定理 3.1 を応用することで, Hermite 対称空間の分類によらない統一的な証明を与えたというものである.

参考文献

[1] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and holonomy* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2003).

[2] T. Fujimaru, A. Kubo, H. Tamaru, *On totally geodesic surfaces in symmetric spaces of type AI*, In: Real and Complex Submanifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **106** (2014), 211–227.

[3] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).

[4] S. Ihara, *Holomorphic imbeddings of symmetric domains*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 261–302.

[5] S. Klein, *Totally geodesic submanifolds of the complex quadric*, Differential Geom. Appl. **26** (2008), 79–96.

[6] S. Klein, *Totally geodesic submanifolds of the complex and the quaternionic 2-Grassmannians*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 4927–4967.

[7] S. Klein, *Reconstructing the geometric structure of a Riemannian symmetric space from its Satake diagram*, Geom. Dedicata **138** (2009), 25–50.

[8] S. Klein, *Totally geodesic submanifolds of the exceptional Riemannian symmetric spaces of rank 2*, Osaka J. Math. **47** (2010), 1077–1157.

[9] A. Kubo, T. Okuda, H. Tamaru, *Classification of totally geodesic complex curves in Hermitian symmetric spaces*, in preparation.

[10] T. Nagano, M. S. Tanaka, *The involutions of compact symmetric spaces, V* Tokyo. J. Math. **23** no. 2 (2000), 403–416.

[11] I. Satake, *Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space,* Amer. J. Math. **87** (1965), 425–461.

[12] I. Satake, *A note on holomorphic imbeddings and compactification of symmetric domains*, Amer. J. Math. **90** (1968), 231–247.

[13] J. A. Wolf, *Geodesic spheres in Grassmann manifolds*, Illinois J. Math. **7** (1963), 425–446.

[14] J. A. Wolf, *Elliptic spaces in Grassmann manifolds*, Illinois J. Math. **7** (1963), 447–462.