数理解析研究所講究録
第2017巻 2017年 77-83

4 次 Cartan–Münzner 多項式と Casimir 作用素について *

大島商船高等専門学校　藤井　忍 †
Shinobu FUJII
National Institute of Technology, Oshima College

概要

Cartan–Münzner 多項式とは, 球面内の等径超曲面の定義方程式系に現れる斉次多項式のことである. 本講演では, 階数 2 の既約コンパクト型かつ古典型の Hermite 対称空間の等方表現から得られる 4 次 Cartan–Münzner 多項式が, いくつかの Lie 代数の表現の Casimir 作用素から構成できることを説明する. また, Casimir 作用素と運動量写像のノルム 2 乗との関係についても説明する.

1 4 次 Cartan–Münzner 多項式

4 次 Cartan–Münzner 多項式とは, 以下を満たす 4 次斉次多項式 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{2n}]$ のことである:

(1) $\|\mathrm{grad}\, \varphi(P)\|^2 = 16\, \|P\|^{2g-2}$,
(2) $\Delta\varphi(P) = 8c\, \|P\|^2$ (c はある定数).

ここで, $P \in \mathbb{R}^{2n}$ であり, $\|-\|$, grad, Δ はそれぞれ $\mathbb{R}^{2n}$ 上の通常の Euclid 内積から決まるノルム, 勾配, Laplace 作用素である. この多項式は球面 S^{2n-1} 内の等径超曲面を定義する等径関数 $\varphi : S^{2n-1} \to \mathbb{R}$ と関係がある. 等径超曲面の基本的性質等については尾関-高木-竹内 [11] や宮岡 [9] 等を参照していただきたい. 4 つの主曲率をもつ, 球面内の

* RIMS 研究集会「部分多様体の微分幾何学的研究」講究録用原稿.
† E-mail address: `shinofu@oshima-k.ac.jp`

等径超曲面のうち, 現在知られているものは, 以下に挙げる階数 2 の対称空間の等方表現の主軌道として得られるものと, Clifford 代数の表現から構成される OT–FKM 型等径超曲面である ([12], [2]):

(1) $\mathrm{SO}(2+n)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(n)$,
(2) $\mathrm{SU}(2+n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(n))$,
(3) $\mathrm{SO}(10)/\mathrm{U}(5)$,
(4) $\mathrm{E}_6/\mathrm{U}(1)\times\mathrm{Spin}(10)$,
(5) $\mathrm{Sp}(2+n)/\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(n)$,
(6) $\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(5)$.

このうち, (1), (2), (3), (4) が Hermite 対称空間 (の等質空間表示) である.

我々は, 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面をその性質に依らないで統一的に扱う方法を考察している. それは, 4 次 Cartan–Münzner 多項式を従来の構成法に依らずに統一的に扱う方法を考察する, と言い換えることができる. 球面内の等径超曲面の統一的な扱い方が見つかれば, その方法によって 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面の統一的分類を行うことができるのではないかと期待している. なお, 4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面の分類は最近 Chi によって完成されたようである ([1]).

統一的手法として我々はこれまで運動量写像との関係について調べてきた. こちらに関しては完全に分かったわけではないが, 部分的な結果は得られている ([3], [6], [4]). 我々の手法とは異なるが, 宮岡氏の結果も知られている ([10]).

運動量写像を用いた手法とは別に, 不変式論の観点からのアプローチも考えていた. その理由は, 既知の 4 次 Cartan–Münzner 多項式はある群作用に関する不変式だからである. このことは定義からはすぐには分からないが, 容易に確かめられる. そこで, これらの多項式を不変式論的に考えるために

(1) 4 次 Cartan–Münzner 多項式はどのような不変式か?
(2) 4 次 Cartan–Münzner 多項式 (に対応する等径超曲面) を不変式論の観点から分類できるか?

という問題を考えた. 今回は, 上記の問題の (1) に部分的解答を与えたものである. 本講演の主定理は以下である (より詳しい主定理の主張は第 3 節で述べる):

主定理 (F. [5]). G/K を階数 2 の既約コンパクト型かつ古典型 Hermite 対称空間とする. G/K の等方表現から得られる 4 次 Cartan–Münzner 多項式は, その微分表現の Casimir 作用素を用いて記述できる.

運動量写像の手法に比べ, Casimir 作用素の手法はとても代数的である. Lie 群の Hamilton 作用ではなく, Lie 代数の表現を用いてルート系によって計算できる等, Casimir 作用素を考えることのメリットは十分にあるように思われる.

2 Casimir 元と Casimir 作用素

本節では, Casimir 元と Casimir 作用素の定義とその性質について簡単にまとめる. 詳細なことは Lie 代数の表現論の教科書, たとえば Knapp [8] や伊勢–竹内 [7] 等を参照していただきたい.

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数, $B_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式とする.

定義 2.1. $\{X_i\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし, $\{X_i^*\}$ を $\mathfrak{g}$ の $B_{\mathfrak{g}}$–双対基底とする. つまり,

$$B_{\mathfrak{g}}(X_i, X_j^*) = \delta_{i,j} \tag{2.1}$$

が成り立つとする. このとき, 以下で定義される $C_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}$ の **Casimir 元** という:

$$C_{\mathfrak{g}} := \sum_i X_i X_i^*. \tag{2.2}$$

注意 2.2.

(1) $C_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の基底と $B_{\mathfrak{g}}$–双対基底の取り方に依らずに一意に決まる,

(2) $C_{\mathfrak{g}} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ である. ここで, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数を表す,

(3) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $[C_{\mathfrak{g}}, X] = 0$ が成り立つ.

ここからは, 上述の設定に加えて $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ について考える.

$\mathfrak{g}$ 上の対称二次形式 $\beta_\sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ を以下で定義する:

$$\beta_{\mathfrak{g}}(X, Y) := \mathrm{Tr}\,(\sigma(X)\sigma(Y)) \quad \text{for} \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{2.3}$$

この β_σ を σ に付随する trace form という. 随伴表現 ad に付随する trace form β_σ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式である. また, G を $\mathfrak{g}$ を Lie 代数にもつ連結 Lie 群とするとき, β_σ は $\mathrm{Ad}(G)$–不変であることは容易に確認できる.

σ の核を $\mathfrak{n}$ で表し, その B_σ–双対な部分空間を $\mathfrak{n}^*$ と表すことにする. このとき, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}^*$ ともに $\mathfrak{g}$ の半単純イデアルゆえ $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^*$ が成り立ち, また, $\sigma_{\mathfrak{n}^*}$ は $\mathfrak{n}^*$ 上非退化であることがすぐにわかる.

定義 2.3. $\{X_i\}$ を $\mathfrak{n}^*$ の基底とし, $\{X_i^*\}$ を $\mathfrak{n}^*$ の β_σ–双対基底とする. つまり,

$$\beta_\sigma(X_i, X_j^*) = \delta_{i,j} \tag{2.4}$$

が成り立つとする. このとき, 以下で定義される $C_\sigma \in \mathfrak{gl}(V)$ を **表現 σ に付随する $\mathfrak{g}$ の Casimir 作用素** という:

$$C_\sigma := \sum_i \sigma(X_i)\sigma(X_i^*). \tag{2.5}$$

注意 2.4.

(1) C_σ は $\mathfrak{n}^*$ の基底と β_σ-双対基底の取り方に依らずに一意に決まる,

(2) $C_\sigma \in \mathcal{U}(\sigma(\mathfrak{g}))$ である,

(3) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $[C_\sigma, \sigma(X)] = 0$ が成り立つ.

3 主定理とその証明の概略

本節では, 主定理の詳細な主張を与える.

G/K を階数 2 の既約コンパクト型対称空間とし, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ で表す. $\mathfrak{p}$ 上の内積を $\langle X, Y\rangle := -B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$ で定義し, シンプレクティック形式を $\omega(X, Y) := \langle J(X), Y\rangle$ で定義する. ここで, J は $\mathfrak{p}$ 上の複素構造である. G/K の等方表現は Hamilton 作用であり (cf. [6]), したがって, その微分表現は Lie 代数のシンプレクティック表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{sp}(\mathfrak{p}, \omega)$ を誘導する. $\mathfrak{sp}(\mathfrak{p}, \omega)$ は $\mathfrak{p}$ 上の対称変換全体のなす Poisson 代数 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{p})$ と同型であり, $\mathrm{Sym}(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ 上の実二次形式全体のなす Poisson 代数 $\mathscr{O}(\mathfrak{p})_2$ と同型なので, 以下の可換図式を考えることができる:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{k} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, hook] & \mathfrak{sp}(\mathfrak{p}, \omega) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Sym}(\mathfrak{p}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & \mathscr{O}(\mathfrak{p})_2 \arrow[d, hook] \\
\mathcal{U}(\mathfrak{k}) \arrow[r] & \mathcal{U}(\mathfrak{sp}(\mathfrak{p}, \omega)) \arrow[r] & \mathcal{U}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{p})) \arrow[r] & \mathcal{U}(\mathscr{O}(\mathfrak{p})_2)
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

我々が考えている 4 次 Cartan–Münzner 多項式 F は $\mathcal{U}(\mathscr{O}(\mathfrak{p})_2)$ の元である.

このとき, 次が主定理の詳細な主張である:

定理 3.1 (F. [5]). G/K を階数 2 の既約コンパクト型かつ古典型の Hermite 対称空間, すなわち次のいずれかとする:

$$\mathrm{O}(2+n)/\,\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(n), \quad \mathrm{U}(2+n)/\,\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(n), \quad \mathrm{SO}(10)/\,\mathrm{U}(5).$$

このとき, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ であって,

$$a\, \widetilde{C_{\mathrm{ad}|_{\mathfrak{o}(2)}}} + b\, \widetilde{C_{\mathrm{ad}|_{\mathfrak{k}'}}} \tag{3.2}$$

がそれぞれの等方表現から得られる 4 次 Cartan–Münzner 多項式に一致するものが存在する．ただし，$\mathfrak{k}'$ は $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(2) \oplus \mathfrak{k}'$ を満たす $\mathfrak{k}$ の部分 Lie 代数である．また，$\widetilde{C_\sigma}$ はシンプレクティック表現 σ に付随する Casimir 作用素 C_σ の $\mathcal{U}(\mathscr{O}(\mathfrak{p})_2)$ における像を表す．

注意 3.2.

(1) 定理 3.1 で得た Cartan–Münzner 多項式は，尾関–竹内 [13], F. [3], F. –田丸 [6], 宮岡 [10] で計算されているものと本質的には同じものである (違いは $\mathfrak{k}^*$ 上の K-不変内積の取り方と計算方法である),

(2) 等質等径超曲面に対応する Cartan–Münzner 多項式のいくつかは運動量写像の重み付きノルム 2 乗としても表せる ([3], [6], [4])．しかし，$\mathrm{Sp}(2+n)/\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(n)$ は Hermite 対称空間ではなく，その等方表現は Hamilton 作用ではない．論文 [5] では，作用する群を等方部分群 $\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(n)$ ではなく，その部分群 $\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(n)$ に制限すると上手くいったのだが，その理由が分からなかった．しかし，Casimir 作用素を計算してみるとその理由を説明できる気がする．実際，$\mathrm{Sp}(n)$–作用は Hamilton 的で，$\widetilde{C_{\mathrm{ad}|_{\mathfrak{sp}(n)}}} \neq 0$ が成り立つ．一方，$\mathrm{Sp}(2)$–作用は Hamilton 作用ではない．四元数を表す際の $\mathbf{j}$ を使って，$\mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{u}(2) \oplus \mathrm{Sym}_2(\mathbb{C})\mathbf{j}$ と分解すると，$C_{\mathrm{ad}|_{\mathfrak{u}(2)}}$, $C_{\mathrm{ad}|_{\mathrm{Sym}_2(\mathbb{C})\mathbf{j}}}$ ともに 0 ではないが，$\widetilde{C_{\mathrm{ad}|_{\mathfrak{u}(2)}}} \neq 0$, $\widetilde{C_{\mathrm{ad}|_{\mathrm{Sym}_2(\mathbb{C})\mathbf{j}}}} = 0$ が成り立つ．このことから，Casimir 作用素の $\mathcal{U}(\mathscr{O}(\mathfrak{p})_2)$ での像が 0 にならない部分 Lie 代数は $\mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{sp}(n)$ であり，したがって対応する Lie 群は $\mathrm{U}(2)\times\mathrm{Sp}(n) \simeq \mathrm{SO}(2)\times\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(n)$ である．これは [5] で考えた部分群である．

4 運動量写像のノルム 2 乗と Casimir 作用素

本節では運動量写像のノルム 2 乗と Casimir 作用素の関係について述べる．

定義 4.1. $2n$ 次元 C^∞–多様体 M と，M 上の微分 2–形式 ω で，$d\omega = 0$ かつ $\omega^{\wedge n} \neq 0$ なるものの組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体**といい，ω を M の**シンプレクティック形式**という．

定義 4.2. Lie 群 K のシンプレクティック多様体 (M, ω) への作用が **Hamilton 的**であるとは，以下を満たすことをいう:

(1) K–作用はシンプレクティック形式 ω を保つ,

(2) 運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ が存在する．

ただし，$\mathfrak{k}^*$ は K の Lie 代数 $\mathfrak{k}$ の線型空間としての双対空間である．ここで写像 $\mu : M \to$

$\mathfrak{k}^*$ が運動量写像であるとは,

(1) $(d\mu)_P(Q)(\xi) = \omega_P(\widetilde{\xi}_P, Q)$ for $P \in M$, $Q \in T_P M$, $\xi \in \mathfrak{k}$,

(2) $\mu(a.P) = a.\mu(P)$ for $P \in M$, $a \in K$

を満たすときをいう. ここで $\widetilde{\xi}$ は以下で定義される M 上のベクトル場である:

$$M \ni P \overset{\widetilde{\xi}}{\longmapsto} \frac{d}{dt}\exp(t\xi).P\Big|_{t=0} \in T_P M.$$

運動量写像の性質 (b) は, 運動量写像は K–同変写像であることを意味する.

一般に, 運動量写像の計算は簡単ではないが, シンプレクティック線型空間への線型 Hamilton 作用の場合は, 以下の命題が知られている:

命題 4.3. Lie 群 K がシンプレクティック線型空間 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ に線型かつ Hamilton 的に作用しているとき, 以下で定義される写像 $\mu : \mathbb{R}^{2n} \to \mathfrak{k}^*$, $x \mapsto \mu_x$ は K–作用の運動量写像である:

$$\mu_x(\xi) := \frac{1}{2}\omega(\xi.x, x) \quad \text{for} \quad \xi \in \mathfrak{k}. \tag{4.1}$$

ここで, K の Lie 代数 $\mathfrak{k}$ の $\mathbb{R}^{2n}$ への作用は K–作用の微分である.

以下では, $\mathfrak{k}$ を半単純 Lie 代数とし, K を $\mathfrak{k}$ を Lie 代数にもつ連結 Lie 群とする. K はシンプレクティック線型空間 (V, ω) に線型かつ Hamilton 的に作用しているとし, その微分表現を $\sigma : \mathfrak{k} \to \mathfrak{sp}(V, \omega)$ で表す. また, $\mathfrak{k}$ 上の内積 $\langle -, - \rangle_\sigma$ を $\langle X, Y \rangle_\sigma := -\beta_\sigma(X, Y)$ によって定義する.

命題 4.4 (F. [5]). 上記の設定の下, $\|\mu(P)\|_\sigma^2 = \widetilde{C_\sigma} \in \mathcal{U}(\mathscr{O}(V)_2)$ が成り立つ. ただし, $\|-\|_\sigma$ は $\langle -, - \rangle_\sigma$ から定まるノルムである.

参考文献

[1] Chi, Q.-S., "Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, IV". Preprint, arXiv:1605.00976 (2016).

[2] Ferus, D., Karcher, H. and Münzner, H. F., "Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen", *Math. Z.*, **177** (1981), 479–502.

[3] Fujii, S., "Homogeneous isoparametric hypersurfaces in spheres with four distinct principal curvatures and moment maps", *Tohoku Math. J.*, **62** (2010), 191–213.

[4] ———, "Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres—Grassmannian cases", in preparation.

[5] ———, "Quartic Cartan–Münzner polynomials and Casimir operators—Classical Hermitian cases", in preparation.

[6] Fujii, S. and Tamaru, H., "Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres—Hermitian cases", *Transform. Groups*, Vol. **20** (2015), 417–436.

[7] 伊勢 幹夫, 竹内 勝, リー群論, 岩波書店, 1992.

[8] Knapp, A. W., *Representation Theory of Semisimple Groups*, Princeton Landmarks in Math. , Princeton Univ. Press, 2001.

[9] 宮岡 礼子, "等径超曲面再訪", 数学 **53** (2001), 18–33.

[10] R. Miyaoka, "Moment maps of the spin action and the Cartan-Münzner polynomials of degree four", *Math. Ann.*, **355** (2013), 1067–1084.

[11] 尾関 英樹, 高木 亮一, 竹内 勝, "等径超曲面について", 数学 **30** (1978), 23–32.

[12] Ozeki, H. and Takeuchi, M., "On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I", *Tôhoku Math. J.* **27** (1975), 515–559.

[13] ———, "On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II", *Tôhoku Math. J.* **28** (1976), 7–55.