数理解析研究所講究録
第2017巻 2017年 114-122

Remarks on Hodge numbers and invariant complex structures of compact nilmanifolds

島根大学・総合理工学研究科　山田拓身
Takumi Yamada
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University

1 序文

等質多様体上の複素構造については様々な研究がなされている. 旗多様体の不変複素構造は $\mathfrak{t}$-ルートを用いて代数的に分類できる ([1]). コンパクト可解多様体に関しては中村による研究が1970年代にある ([3]). 例えば複素平行化可能多様体の変形は複素平行化可能とは限らないことが中村により示されている. また特に可解多様体の特別な場合になるベキ零多様体の不変複素構造に関しては, S. M. Salamon らによる研究がある ([7]). ベキ零多様体上の不変な複素構造の変形がふたたび不変となるための十分条件が Console-Fino や Rollenske により与えられている ([2], [5]). 同じ Console-Fino の論文では, ドルボコホモロジーに関する野水型の定理, すなわち不変な複素構造を持つベキ零多様体のドルボーコホモロジー群がそのベキ零リー環のコホモロジーと一致するための十分条件を与えている. 一方, 周期の異なる複素トーラスは, 微分同相であるが双正則同値でないコンパクト複素多様体の典型例であるが, ドルボーコホモロジー群の次元では区別がつかない. コンパクトケーラー多様体はホッジ数 $h^{p,q}$ に対して, $h^{p,q}=h^{q,p}$ なる対称性がある. またミラー対称性のような2つのカラビ-ヤウ多様体間のホッジ数における対称性などが知らている.

以上のことからコンパクトベキ零多様体上の異なる複素構造をホッジ数を用いて比較することや, その上の複素構造を代数的に分類することなどに興味がでてくる. 本論文ではコンパクトベキ零多様体において第一の問いについて得られた結果を主に紹介する.

2　コンパクトベキ零複素多様体のドルボーコホモロジー群について

この節ではコンパクトベキ零複素多様体のドルボーコホモロジー群に関して知られている結果をいくつか紹介する.

N を単連結かつ連結なべき零リー群とし, $\mathfrak{n}$ をそのリー環とする. N が余コンパクト離散部分群をもつためには, 有理数体上のリー環 $\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ で $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ を満たすものが存在することが必要十分である ([4]). また, $\mathfrak{n}$ の複素構造 J は, 有理数体上のリー環 $\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ に対して, $J(\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}) \subset \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ を満たすとき, 有理複素構造と呼ばれる. 特に余コンパクト離散部分群 Γ に対応する有理数体上のリー環 $\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ に対して, $J(\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}) \subset \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ を満たすとき, Γ に対応する有理複素構造と呼ばれる. $\mathfrak{n}$ の有理複素構造 J からリー群 N に誘導される複素構造も N の有理複素構造と呼ぶことにする. $\mathfrak{n}^{\pm}$ で複素構造 J に関する $\pm\sqrt{-1}$ 固有空間をそれぞれ表すことにする.

以下, ベキ零リー群は常に単連結かつ連結を仮定する.

定理 2.1 ([6]). N を複素ベキ零リー群とし, Γ を N の余コンパクト離散部分群とする. このとき, 任意の p, q に対して,

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\Gamma\backslash N) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,q}(\mathfrak{n}^{-}) \otimes \bigwedge^{p}(\mathfrak{n}^{+})^{*} \cong H^{q}(\mathfrak{n}^{-}) \otimes \bigwedge^{p}(\mathfrak{n}^{+})^{*}$$

が成り立つ.

なお, 分解 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,q}(\mathfrak{n}^{-}) \otimes \bigwedge^{p}(\mathfrak{n}^{+})^{*}$ が主結果の証明の際に重要な役割を果たすことになる.

定理 2.2 ([2]). N をベキ零リー群, Γ を N の余コンパクト離散部分群とし, J を Γ に対応する有理複素構造とする. このとき, 任意の p, q に対して

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\Gamma\backslash N) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathfrak{n}^{\mathbb{C}})$$

が成り立つ.

3　現象のモデルとなるベキ零リー群

ベキ零リー群 N として

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, z_i \in \mathbb{C} \right\}$$

を考える. 複素変数であるが実ベキ零リー群と考えて, N 上の複素座標系として,

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \quad \varphi_2 : \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (\bar{z}_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$$

を考える. このとき, N の群構造はそれぞれの複素座標系において

$$(z_1, z_2, z_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, z_3 + z_1 w_2 + w_3),$$
$$(z_1, z_2, z_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, z_3 + \bar{z}_1 w_2 + w_3)$$

と書ける. $\mathcal{S}_1 = \{(N, \varphi_1)\}$, $\mathcal{S}_2 = \{(N, \varphi_2)\}$ とする. このとき, $N_1 = (N, \mathcal{S}_1)$ と $N_2 = (N, \mathcal{S}_2)$ は実リー群としては同型であるが, 複素リー群としては同型ではない. また, $\Gamma \backslash N_1$ と $\Gamma \backslash N_2$ は複素多様体としては双正則同値ではない. ここで Γ は

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_3 \\ 0 & 1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ \mu_i \in F[\sqrt{-1}] \right\}.$$

とする. このとき, 任意の s, t に対して,

$$h^{s,t}(\Gamma \backslash N_1) = h^{t,s}(\Gamma \backslash N_2)$$

が成り立つ. 特に, 任意の r に対して,

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\Gamma \backslash N_1) = \sum_{s+t=r} h^{s,t}(\Gamma \backslash N_2)$$

が成り立つ. したがって研究の動機としてはこのようなことがいつ, またどの程度成り立つかにある. 以降の表記であるが, N_2 は

$$N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ z_i \in \mathbb{C} \right\}, \quad \varphi : \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3.$$

と書くことができる. したがって, 以下では, 座標系の明記なしで上の N_2 のような表記を用いることとする.

4 複素化されたリー環の複素構造

この節では, リー環の複素化と実制限から新たに複素構造を構成する方法を紹介する.

実数体 $\mathbb{R}$ 上のリー環 $\mathfrak{g}$ で, $\mathfrak{a}$ を部分リー環とし $\mathfrak{b}$ をイデアルとして, 分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b},$$

をもつものを考える. $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の基底を考える:

$$\mathfrak{a} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{U_1^1, \ldots, U_p^1\},$$
$$\mathfrak{b} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{V_1^1, \ldots, V_q^1\}.$$

リー環 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を考えると $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + \sqrt{-1}\mathfrak{g}$ であるから, 複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の係数体を実数体に制限した $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ は次のような基底をもつ:

$$\{U_1^1, \ldots, U_p^1, V_1^1, \ldots, V_q^1, U_1^2, \ldots, U_p^2, V_1^2, \ldots, V_q^2\},$$

ただし $U_i^2 = \sqrt{-1}U_i^1$, $V_j^2 = \sqrt{-1}V_j^1$ とする. $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ の (概) 複素構造 J を, 各 i, j に対して

$$JU_i^1 = U_i^2 \ (JU_i^2 = -U_i^1), \ JV_j^1 = V_j^2 \ (JV_j^2 = -V_j^1)$$

により定義する. このとき $(_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}), J)$ は複素リー環となる.

$_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ 上の異なる複素構造 $\tilde{J}$ を各 i, j に対して

$$\tilde{J}U_i^1 = -U_i^2 \ (\tilde{J}U_i^2 = U_i^1), \ \tilde{J}V_j^1 = V_j^2 \ (\tilde{J}V_j^2 = -V_j^1)$$

により定義する. $_{\mathbb{R}}(G^{\mathbb{C}})$ を $_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ に対応する単連結なリー群とする. このとき, 次が成り立つ:

命題 4.1 ([9]). $\tilde{J}$ は $_{\mathbb{R}}(G^{\mathbb{C}})$ 上の可積分な概複素構造である. J が有理概複素構造であるならば, $\tilde{J}$ もまた有理概複素構造である.

5 主結果とその証明

記号に関しては, 前節のものを用いることとする.

各 i,j,s,t に対して

$$[U_i^1, U_j^1] = \sum_{k=1}^{p} C_{ij}^k U_k^1,\ [U_i^1, V_s^1] = \sum_{t=1}^{q} D_{is}^t V_t^1,\ [V_s^1, V_t^1] = \sum_{h=1}^{q} E_{st}^h V_h^1$$

とする. $\mathfrak{g}_0$ を $\mathfrak{g}$ から構成されるリー環で

$$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{span}\{U_1, \ldots, U_p, V_1, \ldots, V_q\}$$

において,

$$[U_i, U_j] = \sum_{k=1}^{p} C_{ij}^k U_k, \quad [U_i, V_s] = \sum_{t=1}^{q} D_{is}^t V_t \quad (i,j=1,\ldots,p, s=1,\ldots,q)$$

となり, それ以外の積は 0 となるものとする.
このとき次が成り立つ:

定理 5.1 ([10]). 任意の r に対して,

$$h^{0,r}(\mathfrak{g}_{\bar{J}}) = \dim H^r(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}).$$

系 5.2 ([12]).

$$h^{1,0}(\mathfrak{g}_J) - h^{0,1}(\mathfrak{g}_{\bar{J}}) = \dim[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + \dim[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}].$$

特に, もし $h^{1,0}(\mathfrak{g}_J) = h^{0,1}(\mathfrak{g}_{\bar{J}})$ ならば, $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は可換になる. 逆に, もし $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が可換であれば, $h^{1,0}(\mathfrak{g}_J) = h^{0,1}(\mathfrak{g}_{\bar{J}})$ となる. さらに, 任意の s について $h^{s,0}(\mathfrak{g}_J) = h^{0,s}(\mathfrak{g}_{\bar{J}})$ が成り立つ.

定理 5.3 ([10]). 任意の r に対して,

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\bar{J}}) = \dim H^r(\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{b} \times \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{a}}).$$

この定理から次が得られる:

定理 5.4.

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J) - \sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\bar{J}}) = \sum_{s+t=r} (\dim H^s(\mathfrak{g} \times \mathbb{R}^q) - \dim H^s(\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{b})) \cdot \binom{p}{t}$$

ここで $p = \dim \mathfrak{a}$, $q = \dim \mathfrak{b}$ とする.

証明. $\mathfrak{a}=\{0\}$ かつ $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}$ の場合を考えると, 定理 5.3 から,

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J)=\dim_{\mathbb{R}} H^r(\mathbb{R}^{\dim\mathfrak{g}}\times\mathfrak{g}\times\{0\})$$

となる. したがって, 再び, 定理 5.3 から,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J)-\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\bar{J}})\\
&=\dim H^r((\mathfrak{g}\times\mathbb{R}^q)\times\mathbb{R}^p)-\dim H^r((\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{b})\times\mathbb{R}^p)\\
&=\sum_{s+t=r}\dim H^s(\mathfrak{g}\times\mathbb{R}^q)\cdot\dim H^t(\mathbb{R}^p)-\sum_{s+t=r}\dim H^s(\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{b})\cdot\dim H^t(\mathbb{R}^p)\\
&=\sum_{s+t=r}(\dim H^s(\mathfrak{g}\times\mathbb{R}^q)-\dim H^s(\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{b}))\cdot\dim H^t(\mathbb{R}^p)
\end{aligned}$$

を得る. □

系 5.5.

$$\sum_{s+t=1} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J)-\sum_{s+t=1} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\bar{J}})=\dim([\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\cap[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]).$$

証明. 定理 5.4 から,

$$\sum_{s+t=1} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J)-\sum_{s+t=1} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\bar{J}})=\dim H^1(\mathfrak{g}\times\mathbb{R}^q)-\dim H^1(\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{b}),$$

を得る. ただし $q=\dim\mathfrak{b}$ とする. このとき,

$$\dim H^1(\mathfrak{g}\times\mathbb{R}^q)=(\dim\mathfrak{g}-\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])+\dim\mathfrak{b}.$$

を得る. 一方,

$$\begin{aligned}
\dim H^1(\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{b})&=(\dim\mathfrak{g}-\dim[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0])+(\dim\mathfrak{b}-\dim[\mathfrak{b},\mathfrak{b}])\\
&=\dim\mathfrak{g}-\dim[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]-\dim[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]+\dim\mathfrak{b}-\dim[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]
\end{aligned}$$

となる. $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\oplus([\mathfrak{a},\mathfrak{b}]+[\mathfrak{b},\mathfrak{b}])$ であるから,

$$\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\dim[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]+\dim[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]+\dim[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]-\dim([\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\cap[\mathfrak{b},\mathfrak{b}])$$

となる. ゆえに,

$$\sum_{s+t=1} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J)-\sum_{s+t=1} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\bar{J}})=\dim([\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\cap[\mathfrak{b},\mathfrak{b}])$$

となる □

定理 5.4 の系として, 次の結果が得られる.

定理 5.6 ([12]). もし $\mathfrak{b}$ が可換ならば, 任意の r に対して

$$\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J) = \sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$$

が成り立つ.

証明. $\mathfrak{b}$ が可換ならば, $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}^q = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{b}$ となる. よって, 定理 5.4 から, 主張が得られる. □

注意 5.7. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ ならば, $\sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_J) = \sum_{s+t=r} h^{s,t}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$ が成り立つ.

系 5.8. もし $h^{1,0}(\mathfrak{g}_J) = h^{0,1}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$ ならば, $h^{0,1}(\mathfrak{g}_J) = h^{1,0}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$ となる.

証明. 系 5.2 によって, $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は可換である. したがって

$$h^{1,0}(\mathfrak{g}_J) + h^{0,1}(\mathfrak{g}_J) = h^{0,1}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}}) + h^{0,1}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$$

となる. 故に, $h^{0,1}(\mathfrak{g}_J) = h^{1,0}(\mathfrak{g}_{\tilde{J}})$ である. □

6 例

例 6.1. $H_{\mathbb{R}}(n)$ を $(2n+1)$ 次元実ハイゼンベルグ群とし, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n)$ をそのリー環とする. そのとき $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n)$ は基底 $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$ で $[X_i, Y_i] = Z$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満足するものをもつ. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n)$ の部分リー環として, 各 k に対して,

$$\mathfrak{a}_k = \mathrm{span}\{X_1, \ldots, X_k\}$$
$$\mathfrak{b}_k = \mathrm{span}\{X_{k+1}, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$$

を考える. すると, $\mathfrak{b}_k$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n)$ のイデアルとなる. さらに, $\mathfrak{a}_k$ と $\mathfrak{b}_k$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n) = \mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}_k$ を満足する. したがって, 分解 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n) = \mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}_k$ に対応する有理複素構造 $\tilde{J}_k$ が構成できる. 簡単のため $\mathfrak{h}(n;k)$ で $(\mathbb{R}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(n)^{\mathbb{C}}), \tilde{J}_k)$ を意味することとする. ここで,

$$\dim([\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k] \cap [\mathfrak{b}_k, \mathfrak{b}_k]) = \begin{cases} 0 & (k = 0, n) \\ 1 & (k \neq 0, n) \end{cases}$$

であるから,

$$\sum_{p+q=1} h^{p,q}(\mathfrak{h}(n;0)) - \sum_{p+q=1} h^{p,q}(\mathfrak{h}(n;k)) = \begin{cases} 0 & (k = 0, n) \\ 1 & (k \neq 0, n) \end{cases}$$

を得る. 一方, 論文 [12] では

$$\sum_{p+q=2} h^{p,q}(\mathfrak{h}(n;0)) - \sum_{p+q=2} h^{p,q}(\mathfrak{h}(n;1)) = -1 < 0$$

が成り立つことをみた.

例 6.2. 実べキ零リー環 $\mathfrak{n}(n)$ を

$$\mathrm{span}\{\mathrm{X_{ij}}\}_{\mathrm{1 \leq i < j \leq n}}$$

で各 i, j, k, h に対して $[X_{ij}, X_{kh}] = \delta_{jk} X_{ih}$ を満足するものとする. また $N(n)$ を対応する単連結なべキ零リー群とする. 例えば, $n = 5$ の場合

$$N(5) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ 0 & 0 & 1 & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. $\mathfrak{n}(n)$ の部分リー環として, 各 k に対して,

$$\mathfrak{a}_k = \mathrm{span}\{X_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq k}$$
$$\mathfrak{b}_k = \mathrm{span}\{X_{ij}\}_{1 \leq i < j, k+1 \leq j \leq n}$$

と定義する (さらに $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_n = \{0\}$ とする). このとき, $\mathfrak{b}_k$ は $\mathfrak{n}(n)$ のイデアルであり, また $\mathfrak{n}(n) = \mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}_k$ がなりたつ. したがって分解 $\mathfrak{n}(n) = \mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}_k$ に対応して有理複素構造 $\tilde{J}_k$ を考えることができる. 簡単のため $\mathfrak{n}(n;k) = ({}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n}(n;k)^{\mathbb{C}}), \tilde{J}_k)$ とおく. ここで $\mathfrak{n}(n;1)$ は複素リー環であることを注意しておく. 直接計算により,

$$\dim([\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k] \cap [\mathfrak{b}_k, \mathfrak{b}_k]) = \begin{cases} (k-1) \cdot (n-k-1) & (1 \leq k \leq n-1) \\ 0 & (k = n) \end{cases}$$

となることがわかる. したがって,

$$\sum_{p+q=1} h^{p,q}(\mathfrak{n}(n;1)) - \sum_{p+q=1} h^{p,q}(\mathfrak{n}(n;k)) = \begin{cases} (k-1)(n-k-1) & (1 \leq k \leq n-1) \\ 0 & (k = n) \end{cases}$$

となる.

参考文献

[1] D. V. Alekseevsky: *Flag manifolds*, 11th Yugoslav Geometrical Seminar (Divičbare, 1996), Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd. (N. S.) 6 (14) (1997), 3–35.

[2] S. Console and A. Fino: *Dolbeault cohomology of compact nilmanifolds*, Transform. Groups **6** (2001), 111–124.

[3] I. Nakamura, *Complex parallelisable manifolds and their small deformations*, J. Differential Geom. **10** (1975), 85–112.

[4] M. S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. ix+227 pp.

[5] S. Rollenske, *Lie-algebra Dolbeault-cohomology and small deformations of nilmanifolds*, J. Lond. Math. Soc. **79** (2009), 346–362.

[6] Y. Sakane, *On compact complex parallelisable solvmanifolds*, Osaka J. Math. **13** (1976), 187–212.

[7] S. M. Salamon, *Complex structures on nilpotent Lie algebras*, J. Pure. Appl. Algebra **157** (2001), 311–333.

[8] T. Yamada, *Complex structures and non-degenerate closed 2-forms of compact real parallelizable nilmanifolds*, to appear in Osaka J. Math.

[9] T. Yamada, *Duality of Hodge numbers of compact complex nilmanifolds*, Complex manifolds **2** (2015), 168–177.

[10] T. Yamada, *Hodge numbers and invariant complex structures of compact complex nilmanifolds*, Complex manifolds **3** (2016), 193–206.

[11] T. Yamada, *Remarks on Hodge numbers and invariant complex structures of compact nilmanifolds*, preprint.

[12] T. Yamada, *Invariant complex structures and Hodge numbers of compact nilmanifolds*, preprint.