数理解析研究所講究録
第2019巻 2017年 53-63

代数的局所コホモロジーを用いた Limiting Tangent Spaceの計算法

鍋島克輔 *
NABESHIMA, KATSUSUKE
徳島大学大学院理工学研究部
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, TOKUSHIMA UNIVERSITY

田島慎一 †
TAJIMA, SHINICHI
筑波大学大学院数理物質系数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

Limiting tangent hyperplanes associated with hypersurface isolated singularities are considered in the context of symbolic computation. A new effective algorithm is proposed to compute the limiting tangent space of a given hypersurface. The key ingredient is the concept of the parametric local cohomology systems.

1 はじめに

本稿では，孤立特異点を持つ超曲面の場合に，パラメータ付き代数的局所コホモロジーを用いた limiting tangent space の計算法を紹介する。

Limiting tangent space は 1965 年に，H. Whitney が stratification に関する理論を構築した際に tangent cone の概念と共に導入した概念である。これは，特異多様体の特異点における接空間として理解され，特異点論における最も基本的な概念の一つである。Limiting tangent space は特異多様体に対する特性類 ([10, 21, 22])，transversality([7, 12])，や Whitney equisingularity に係る問題等で重要な役割を果たす。

70 年代から 80 年代にかけ，J-P. G. Henry, Lê Dũng Tráng, B. Teissier らにより limiting tangent space そのものの幾何的構造に関する研究がなされた ([9, 10, 11, 12, 13, 14])。最近の研究として，A. G. Flores [3] がある。

D. O'Shea は 1995 年の論文 [19] で limiting tangent space を求める方法を 3 つ与えている。これら 3 つの方法のうち，計算効率が最も良いのは先ずグレブナー基底計算により Nash blow-up を求め，その後に limiting tangent space を求めるという方法であったと報告している。O'Shea の計算法は，特異点の定義方程式の変数の個数を ℓ とすると，$\ell+1$ 個の変数を新たに導入し，合計 $2\ell+1$ 個の変数を持つイデアルを用いる方法であり，問題のサイズが少しでもが大きくなる（または，変数の数が多くなる）と，計算速度が速

*nabeshima@tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

いと言われている計算機代数システム Risa/Asir[18] や SINGULR[2] のグレブナー基底計算プログラムでも，数日経っても結果が返ってこないことがよくある。

本稿では，これら既存の方法と異なる新たな計算法を与える。提案するアルゴリズムでは，特異点の定義方程式の変数の個数を ℓ とすると，$2\ell-2$ 個の変数を計算に使用する。従って，使用する変数の個数のみを比較しても O'Shea の計算法より個数が少ない。新しい計算法の鍵となるのは，パラメトリック局所コホモロジー系の概念である [15, 16]。計算アルゴリズムは主に線形計算から構成されておりグレブナー基底計算を必要としない。このグレブナー基底計算と線形計算との計算量の差が O'Shea の方法と我々の提案法との計算効率の違いに大きく影響を及ぼす。第 4 章のベンチマークテストの結果より，新しい計算法は O'Shea の計算法よりより効率的であることがわかる。

2 パラメータ付き代数的局所コホモロジーとミルナー数

X を $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍，$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ を X の正則函数の成す層 (sheaf)，$\mathcal{O}_{\mathbf{X},\mathbf{O}}$ を $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ の原点における茎 (stalk) とする。$x=(x_1,\ldots,x_n)$ とし，f を X 上の正則函数で，超曲面 $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ は原点 O を孤立特異点として持つとする。このとき，

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{O}_{\mathbf{X},O}\Big/\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle\right)$$

を原点でのミルナー数という。

代数的局所コホモロジー類を利用することによりこのミルナー数 μ は計算可能である。

$\mathbb{C}^n$ の原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー $H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ を

$$H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) := \lim_{k\to\infty} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle^k, \mathcal{O}_X)$$

で定める。$H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ の元は開集合対 $(X, X-\{O\})$ に対する標準的な相対被覆が定める相対 Čech コホモロジーの要素として表現できることが知られているので，記号 $\sum c_\lambda[\ \frac{1}{x^{\lambda+1}}\ ]$ を用いて $H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ に属す代数的局所コホモロジー類を表す。このとき，x^κ と $[\ \frac{1}{x^{\lambda+1}}\ ]$ の積は相対 Čech コホモロジー群の定義より，次で与えられる

$$x^\kappa[\ \frac{1}{x^{\lambda+1}}\ ] = \begin{cases} [\ \frac{1}{x^{\lambda+1-\kappa}}\ ] & \lambda_i \geq \kappa_i, i=1,\ldots,n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ただし，$\kappa=(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)\in\mathbb{N}^n$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{N}^n$, $\lambda+1-\kappa=(\lambda_1+1-\kappa_1,\ldots,\lambda_n+1-\kappa_n)$ である。原点 O に孤立特異点を持つ多項式 $f\in\mathbb{C}[x]$ に対し，そのヤコビイデアル $J=\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle$ によって annihilate される代数的局所コホモロジー類のなす集合 H_J を

$$H_J := \left\{\psi\in H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)\ \middle|\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\psi = 0\right\}$$

で定める。この H_J は Grothendieck local duality theorem [5, 6] により有限次元ベクトル空間となり，次元は f の原点でのミルナー数と一致する（i.e., $\mu=\dim_{\mathbb{C}}(H_J)$）。

このベクトル空間 H_J の基底を計算するアルゴリズムは論文 [20] により紹介されており，f がパラメータを持つ場合にもパラメータ付きの H_J の基底を求めるアルゴリズムが [15, 16] で紹介され計算機代数システム Risa/Asir[18] に実装されている。

例 1. x, y を変数とし，a を $\mathbb{C}$ 上のパラメータとする。この時，$f = x^3 + ax^2y^3 + y^9 + xy^7$ のヤコビイデアル J によって *annihilate* される代数的局所コホモロジー類のなす集合 H_J の基底は，実装されたプログラムにより次のように出力される。この出力において，y^(-j)*x^(-i) は $\left[\frac{1}{x^iy^j} \right]$ を意味する。

```
[388] p_cohomo(x^3+a*x^2*y^3+x*y^7,[a],[x,y],1,1);
[[a],[1]]
[y^(-8)*x^(-1)-1/3*y^(-1)*x^(-3),y^(-9)*x^(-1)-9/7*y^(-7)*x^(-2)-1/3*y^(-2)*x^(-3),y^(-10)*x^(-1)-9/7*y^(-8
)*x^(-2)-1/3*y^(-3)*x^(-3)+3/7*y^(-1)*x^(-4)][y^(-1)*x^(-1),y^(-2)*x^(-1),y^(-1)*x^(-2),y^(-3)*x^(-1),y^(-2
)*x^(-2),y^(-4)*x^(-1),y^(-3)*x^(-2),y^(-5)*x^(-1),y^(-4)*x^(-2),y^(-6)*x^(-1),y^(-5)*x^(-2),y^(-7)*x^(-1),
y^(-6)*x^(-2)]
No. of coho. is 3+13

[[1331*a^3+10584],[1]]
[y^(-4)*x^(-2)-2/3*a*y^(-1)*x^(-3),y^(-5)*x^(-2)-2/3*a*y^(-2)*x^(-3),y^(-8)*x^(-1)-1/3*y^(-1)*x^(-3),a^2*y^
(-9)*x^(-1)+9/2*y^(-6)*x^(-2)+(-1/3*a^2*y^(-2)-3*a*y^(-3))*x^(-3),a^2*y^(-10)*x^(-1)+(-1667/672*a*y^(-6)+9/
2*y^(-7))*x^(-2)+(1331/1008*a^2*y^(-3)-3*a*y^(-4))*x^(-3)+2*a^2*y^(-1)*x^(-4),a^2*y^(-11)*x^(-1)+(2218777/2
032128*a^2*y^(-6)-1667/672*a*y^(-7)+9/2*y^(-8))*x^(-2)+(-2218777/3048192*a^3*y^(-3)+1331/1008*a^2*y^(-4)-3*
a*y^(-5))*x^(-3)+(11/2*y^(-1)+2*a^2*y^(-2))*x^(-4)][y^(-1)*x^(-1),y^(-2)*x^(-1),y^(-1)*x^(-2),y^(-3)*x^(-1)
,y^(-2)*x^(-2),y^(-4)*x^(-1),y^(-3)*x^(-2),y^(-5)*x^(-1),y^(-6)*x^(-1),y^(-7)*x^(-1)
No. of coho. is 6+10

[[4*a^3+27],[1]]
[y^(-4)*x^(-2)-2/3*a*y^(-1)*x^(-3),y^(-5)*x^(-2)-2/3*a*y^(-2)*x^(-3),y^(-8)*x^(-1)-1/3*y^(-1)*x^(-3),a^2*y^
(-9)*x^(-1)+9/2*y^(-6)*x^(-2)+(-1/3*a^2*y^(-2)-3*a*y^(-3))*x^(-3),a^4*y^(-10)*x^(-1)+((-1/2*a^3+63/4)*y^(-6
)+9/2*a^2*y^(-7))*x^(-2)+(-21/2*a*y^(-3)-3*a^3*y^(-4))*x^(-3)+2*a^4*y^(-1)*x^(-4),a^6*y^(-11)*x^(-1)+((-7/4
*a^3+441/8)*y^(-6)+(-1/2*a^5+63/4*a^2)*y^(-7)+9/2*a^4*y^(-8))*x^(-2)+((7/6*a^4-147/4*a)*y^(-3)-21/2*a^3*y^(
-4)-3*a^5*y^(-5))*x^(-3)+(11/2*a^4*y^(-1)+2*a^6*y^(-2))*x^(-4),a^6*y^(-12)*x^(-1)+(833/162*a^4*y^(-6)+(-7/4
*a^3+441/8)*y^(-7)+(-1/2*a^5+63/4*a^2)*y^(-8)+9/2*a^4*y^(-9))*x^(-2)+(-833/2403*a^5*y^(-3)+(7/6*a^4-147/4*a
)*y^(-4)-21/2*a^3*y^(-5)-3*a^5*y^(-6))*x^(-3)+((-11/18*a^5+77/4*a^2)*y^(-1)+11/2*a^4*y^(-2)-27/2*a^3*y^(-3)
)*x^(-4)][y^(-1)*x^(-1),y^(-2)*x^(-1),y^(-1)*x^(-2),y^(-3)*x^(-1),y^(-2)*x^(-2),y^(-4)*x^(-1),y^(-3)*x^(-2)
,y^(-5)*x^(-1),y^(-6)*x^(-1),y^(-7)*x^(-1)]
No. of coho. is 7+10

[[-2*a^3+63],[1]]
[y^(-4)*x^(-2)-2/3*a*y^(-1)*x^(-3),y^(-5)*x^(-2)-2/3*a*y^(-2)*x^(-3),y^(-8)*x^(-1)-1/3*y^(-1)*x^(-3),a^2*y^
(-9)*x^(-1)+9/2*y^(-6)*x^(-2)+(-1/3*a^2*y^(-2)-3*a*y^(-3))*x^(-3),a^4*y^(-10)*x^(-1)+((-1/2*a^3+63/4)*y^(-6
)+9/2*a^2*y^(-7))*x^(-2)+(-21/2*a*y^(-3)-3*a^3*y^(-4))*x^(-3)+2*a^4*y^(-1)*x^(-4),a^2*y^(-11)*x^(-1)+9/2*y^
(-8)*x^(-2)+(-1/3*a^2*y^(-4)-3*a*y^(-5))*x^(-3)+(11/2*y^(-1)+2*a^2*y^(-2))*x^(-4)][y^(-1)*x^(-1),y^(-2)*x^(
-1),y^(-1)*x^(-2),y^(-3)*x^(-1),y^(-2)*x^(-2),y^(-4)*x^(-1),y^(-3)*x^(-2),y^(-5)*x^(-1),y^(-6)*x^(-1),y^(-7
)*x^(-1)]
No. of coho. is 6+10

[[0],[-10648*a^10+178866*a^7+4359663*a^4+18003384*a]]
[y^(-4)*x^(-2)-2/3*a*y^(-1)*x^(-3),y^(-5)*x^(-2)-2/3*a*y^(-2)*x^(-3),y^(-8)*x^(-1)-1/3*y^(-1)*x^(-3),a^2*y^
(-9)*x^(-1)+9/2*y^(-6)*x^(-2)+(-1/3*a^2*y^(-2)-3*a*y^(-3))*x^(-3),a^4*y^(-10)*x^(-1)+((-1/2*a^3+63/4)*y^(-6
)+9/2*a^2*y^(-7))*x^(-2)+(-21/2*a*y^(-3)-3*a^3*y^(-4))*x^(-3)+2*a^4*y^(-1)*x^(-4),a^6*y^(-11)*x^(-1)+((-7/4
*a^3+441/8)*y^(-6)+(-1/2*a^5+63/4*a^2)*y^(-7)+9/2*a^4*y^(-8))*x^(-2)+((7/6*a^4-147/4*a)*y^(-3)-21/2*a^3*y^(
-4)-3*a^5*y^(-5))*x^(-3)+(11/2*a^4*y^(-1)+2*a^6*y^(-2))*x^(-4)][y^(-1)*x^(-1),y^(-2)*x^(-1),y^(-1)*x^(-2),y
^(-3)*x^(-1),y^(-2)*x^(-2),y^(-4)*x^(-1),y^(-3)*x^(-2),y^(-5)*x^(-1),y^(-6)*x^(-1),y^(-7)*x^(-1)]
No. of coho. is 6+10
```

ベクトル空間 H_J の基底の形は，項順序とパラメータの値によって変化する。実装されたプログラムは，全次数辞書式項順序でベクトル空間 H_J の基底の計算計算を行う。

上の出力は，パラメータ a のとる各値によった，H_J の基底の形を出力している。基底の要素の個数が，ミルナー数となるのでパラメータ付きミルナー数は表 *1* のようになる。

表 *1* より，パラメータ a が $\mathbb{V}(4a^3 + 27)$ に属するとき，ミルナー数が他と違うことがわかる。本稿では，$\mathbb{V}(F)$ を多項式の集合 F の共通ゼロ点とする。すなわち，$g_1, g_2, \ldots, g_s \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_m]$ としたとき，$\mathbb{V}(g_1, \ldots, g_r) = \{c \in \mathbb{C}^m | g_1(c) = g_2(c) = \cdots = g_r(c) = 0\}$ である。

(注意) この例ではパラメータ a がどのような値であっても，孤立特異点を持つが，一般にはパラメータの

strata	ミルナー数
$\mathbb{C}\setminus\mathbb{V}(4a^3+27)$	16
$\mathbb{V}(4a^3+27)$	17

表 1: $x^3+ax^2y^3+y^9+xy^7$ のミルナー数

値によって特異点が孤立してないような場合も多く存在する。そのとき，我々のプログラムは孤立特異点を持たないパラメータの条件を出力する。

3 Limiting tangent space と O'Shea の計算法

ここでは，孤立特異点を持つ超曲面の limiting tangent space の定義と，O'Shea の計算法 [19] を紹介する。

X を $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍，正則函数 $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ が定める超曲面 $S=\{x\in\mathbb{C}^n|f(x)=0\}$ は，原点を孤立特異点として持つとする。

Non-singular な点 $x\in S-\{O\}$ に対し，そこでの超曲面 S の接空間 $T(S,x)$ を対応させる写像を，法線ベクトルを利用して与える。

$$\mathrm{grad}(f): x\to\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]\in\check{\mathbb{P}}^{n-1}$$

ただし，[ ] は同値類をとる写像 [ ]: $\mathbb{C}^n-\{O\}\to\check{\mathbb{P}}^{n-1}$ を表す。写像 $\mathrm{grad}(f)$ のグラフ $\mathrm{graph}(\mathrm{grad}(f))\subset S\times\check{\mathbb{P}}^{n-1}$ の閉包を $\overline{\mathrm{graph}(\mathrm{grad}(f))}$ で表す。第一成分への射影 $S\times\mathbb{P}^{n-1}\to S$ の定義域を制限することで，Nash blow-up

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{graph}(\mathrm{grad}(f))} \arrow[rr] \arrow[dr, "\nu"'] & & S\times\check{\mathbb{P}}^{n-1} \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

を得る。この写像 ν の原点 O 上の fiber $\nu^{-1}(O)$ の第二成分を $K(S,O)$ で表す。この $K(S,O)\subset\check{\mathbb{P}}^{n-1}$ を超曲面 S の **limiting tangent space** と呼ぶ。この limiting tangent space の先行研究として論文 [8, 11, 12, 17, 25, 26] などがある。一般に，超曲面 S の limiting tangent space は，S の tangent cone より多くの情報を有していることが知られている。

Limiting tangent space を計算する方法として次の O'Shea の計算法が知られている。

定理 2 (O'Shea[19]). イデアルを $A=\left\langle f,p_1-u\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,p_n-u\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle\subset\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,u,p_1,\dots,p_n]$ とする。このとき, *limiting tangent space* $K(S,O)$ のイデアル $\mathbb{I}(K(S,O))$ は

$$\mathbb{I}(K(S,O))=\sqrt{(A\cap\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_n])/\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$$

である。ここで，$\sqrt{I}$ はイデアル I の根基イデアルを表す。

この定理より，limiting tangent space はグレブナー基底を用いると計算することが可能であることがわかる。

O'Shea の計算法

1. イデアル $A = \left\langle f, p_1 - u\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, p_n - u\frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n]$ のグレブナー基底 G を u を消去する項順序で計算する。
2. G の $x_1, \ldots, x_n$ にゼロを代入して得られてた集合を F とする。
3. $\sqrt{\langle F \rangle}$ が $K(S, O)$ を定義する方程式系である。

例 3. 原点 O に孤立特異点を定める $f = x^2z + y^3 + z^4 + yz^3 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ により定義された超曲面 S の limiting tangent space $K(S, O)$ を O'Shea の計算法により求める。

1. 新たな変数 u, p_1, p_2, p_3 を導入し，イデアル $A = \langle p_1 - u\frac{\partial f}{\partial x}, p_2 - u\frac{\partial f}{\partial y}, p_3 - u\frac{\partial f}{\partial z} \rangle$ を構成する。
2. $u \gg \{p_1, p_2, p_3, x, y, z\}$ となる項順序で A のグレブナー基底 G を計算し，その後集合 $G_1 = G \cap \mathbb{C}[p_1, p_2, p_3, x, y, z]$ を得る。この例では，ブロック項順序を用い $[p_1, p_2, p_3, x, y, z]$ の順番で全次数逆辞書式で計算した。（出力 G, G_1 は大きすぎるのでここでは記さない。）

   この G_1 の多項式たちの変数 x, y, z に 0（ゼロ）を代入したものは次の G_2 となる。

```
[243045684*p3^4*p1^8+(-36006768*p3^3*p2^3+171460800*p3^4*p2^2-232043616*p3^5*p2+11
2021056*p3^6)*p1^6+(-25401600*p3^3*p2^5-15591744*p3^4*p2^4+86280768*p3^5*p2^3)*p1^
4+(7402752*p3^3*p2^7-25318656*p3^4*p2^6)*p1^2+1492992*p3^3*p2^9,(-46294416*p3^4*p2
+30005640*p3^5)*p1^6+(6858432*p3^3*p2^4+4046112*p3^4*p2^3-14859936*p3^5*p2^2)*p1^4
+(-1257984*p3^3*p2^6+3881088*p3^4*p2^5)*p1^2-248832*p3^3*p2^8,-34720812*p3^4*p1^6+
(5143824*p3^3*p2^3+4327344*p3^4*p2^2-6286896*p3^5*p2)*p1^4+(-641088*p3^3*p2^5+1771
200*p3^4*p2^4)*p1^2-124416*p3^3*p2^7,(-775656*p3^4*p2+571536*p3^5)*p1^4+(114912*p3
^3*p2^4-14688*p3^4*p2^3)*p1^2-10368*p3^3*p2^6,183708*p3^4*p1^4+(-27216*p3^3*p2^3-1
1664*p3^4*p2^2)*p1^2+1728*p3^3*p2^5,-2916*p3^4*p1^2+432*p3^3*p2^3]
```

3. G_2 は冗長なものが多く含まれるので，G_2 の簡約グレブナー基底を計算すると

$$\left\{ p_3^4 p_1^2 - \frac{4}{27} p_3^3 p_2^3 \right\}$$

   となる。ここで，$p_3^4 p_1^2 - \frac{4}{27}p_3^3 p_2^3 = p_3^3(p_3 p_1^2 - \frac{4}{27}p_2^3)$ であるので，根基イデアルの生成元はすぐに計算でき，求める $\mathbb{I}(K(S, O))$ は $\langle p_3(p_3 p_1^2 - \frac{4}{27}p_2^3) \rangle$ となる。

(注意) ちなみに，$p_3 p_1^2 - \frac{4}{27}p_2^3 = 0$ は tangent cone $x^2z + y^3$ の limiting tangent space であるので，S の limiting tangent space はより多くの情報を持つことがこの具体例からもわかる。

4 Teissier の結果

原点 O を通る超平面を，法線ベクトル $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ を用いて

$$H_p = \{x \in \mathbb{C}^n \mid p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 0\}$$

で表し，正則函数 f を超平面 H_p に制限して得られる函数を $f|_{H_p}$ で表す。函数 $f|_{H_p}$ が原点を孤立特異点として持つ場合，そのミルナー数を $\mu^{(n-1)}(f|_{H_p})$ で表す。このとき，ミルナー数 $\mu^{(n-1)}(f|_{H_p})$ は一般に，$[p] \in \check{\mathbb{P}}^{n-1}$ に依存するが，最小値

$$\min_{[p]\in\check{\mathbb{P}}^{(n-1)}} \mu(f|_{H_p})$$

が存在する。この最小値を B. Teissier に従って，$\mu^{(n-1)}(f)$ で表す。

B.Tessier により次の Limiting tangent space と $\mu(f|_{H_p})$ の関係が知られている。

定理 4 (Tessier[23, 24]). 射影空間 $\check{\mathbb{P}}^{n-1}$ の部分集合 $U = \{[p] \in \check{\mathbb{P}}^{n-1} | \mu^{(n-1)}(f|_{H_p}) = \mu^{(n-1)}(f)\}$ は，Zarisky open, dense である。更に，U の補集合が S の limiting tanget space である。すなわち，

$$K(S,O) = \check{\mathbb{P}}^{n-1} - U$$

である。

第2章で見たように，ベクトル空間 H_J の基底はパラメータ付きで計算可能であるので，$\{p_1,\ldots,p_n\}$ をパラメータと見ることにより $\mu(f|_{H_p})$ の計算は可能である。したがって，パラメータ付き代数的局所コホモロジーを計算することにより limiting tangent space は計算可能となる。詳しい計算法は次章で述べる。

5 Limiting tangent space の新しい計算法

ここではパラメータ付き代数的局所コホモロジーを利用した limiting tangent space の計算法について述べる。

まず，例 3 で見た $f(x,y,z) = x^2z + y^3 + z^4 + yz^3 \in \mathbb{C}[x,y,z]$ を考える。点 $[p_1,p_2,p_3] \in \check{\mathbb{P}}^2$ を法線とする超平面 $p_1x + p_2y + p_3z = 0$ により正則函数 f を制限しミルナー数を求める。

(1) $p_1 \neq 0$ のとき，超平面を $x = -\frac{p_2}{p_1}y - \frac{p_3}{p_1}$ と表すことができる。ここで，$s_2 = -\frac{p_2}{p_1}$，$s_3 = -\frac{p_3}{p_1}$ と置くと超平面は $x = s_2y + s_3z$ と表すことができる。このとき，s_1，s_2 をパラメータとし，$h_{(s_2,s_3)}(y,z) = f(s_2y + s_3z, y, z)$ のミルナー数をパラメータ付き代数的局所コホモロジーを利用し計算する (i.e., $\mu(f|_{H_P})$ を求める)。このとき，$h_{(s_2,s_3)}(y,z)$ のミルナー数 μ は次の表 2 になる。

strata	μ
$\mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(s_2s_3(4s_2^3 - 27s_3))$, $\mathbb{V}(s_2)\backslash\mathbb{V}(s_2,s_3)$	4
$\mathbb{V}(s_3)\backslash\mathbb{V}(s_2,s_3)$, $\mathbb{V}(4s_2^3 - 27s_3)\backslash\mathbb{V}(4s_3^3 - s_3, s_2 - 3s_3)$	5
$\mathbb{V}(4s_3^3 - s_3, s_2 - 3s_3)\backslash\mathbb{V}(s_2,s_3)$, $\mathbb{V}(s_2,s_3)$	6

表 2: $h_{(s_2,s_3)}(y,z)$ のミルナー数

表 2 の stratum $\mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(s_2s_3(4s_2^3 - 27s_3))$ は Zarisky open で dense であるので，この stratum 上でのミルナー数が $\mu^{(2)}(f)$ となる。よって，$\mu^{(2)}(f) = 4$ となる。ちなみに，4 は得られたミルナー数の中で最小であり，定義からも $\mu^{(2)}(f) = 4$ であることが分かる。

この計算法では，x,y,z の 3 変数から y,z の 2 変数，また，条件 $p_1 \neq 0$ を考えることによりパラメータ p_1,p_2,p_3 の 3 個から，s_2,s_3 の 2 個に減らすことができる。逆に，O'Shea の方法は新しい変数 u を導入しかつ x,y,z の 3 変数と p_1,p_2,p_3 の 3 変数が必要となり合計 7 変数が必要になる。変数の個

数の違いから見ても代数的局所コホモロジーを用いる方法は有用であると考えられる。(計算機実験の結果を後ほど見る。)

定理 4 より，limiting tangent space は $\{[p] \in \check{\mathbb{P}}^2 | \mu^{(2)}(f|_{H_p}) = 4\}$ の補集合なので，ミルナー数 4 以外の strata が limiting tangent space の部分集合となる。ミルナー数 4 以外の strata の和集合は

$$\begin{aligned}&(\mathbb{V}(s_3)\backslash \mathbb{V}(s_2, s_3)) \cup \big(\mathbb{V}(4s_2^3 - 27s_3)\backslash \mathbb{V}(4s_3^3 - s_3, s_2 - 3s_3)\big)\\ &\cup \big(\mathbb{V}(4s_3^3 - s_3, s_2 - 3s_3)\backslash \mathbb{V}(s_2, s_3)\big) \cup \mathbb{V}(s_2, s_3) = \mathbb{V}(s_3(4s_2^3 - 27s_3)).\end{aligned}$$

である。

ここでは $p_1 \neq 0$ かつ $s_2 = -\frac{p_2}{p_1}$，$s_3 = -\frac{p_3}{p_1}$ の場合であるので，strata の表現を p_1, p_2, p_3 で表すと

$$\mathbb{V}(p_3(4p_2^3 - 27p_1^2p_3))\backslash \mathbb{V}(p_1)$$

となる。

(2) 次に $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ のときを考える。すなわち，超平面 $y = -\frac{p_3}{p_2}z$ での制約である。このとき，$t_3 = -\frac{p_3}{p_1}$ とおくと，超平面は $y = t_3z$ と表される。t_3 をパラメータとし，$h_{(t_3)}(x, z) = f(x, t_3z, z)$ のミルナー数を計算する。このとき，$h_{(t_3)}(x, z)$ のミルナー数 μ は表 3 になる。

stratum	μ
$\mathbb{C}\backslash \mathbb{V}(t_3^2 + t_3), \mathbb{V}(t_3 + 1)$	4
$\mathbb{V}(t_3)$	5

表 3: $h_{(t_3)}(x, z)$ のミルナー数

(1) より $\mu^{(2)}(f) = 4$ であるので，$\mathbb{V}(t_3)$ が limiting tanget space の一部となる。$t_3 = -\frac{p_3}{p_1}$ であり，$p_1 = 0$，$p_2 \neq 0$ であるので，strata の表現を p_1, p_2, p_3 で表すと

$$\mathbb{V}(p_1, p_3)\backslash \mathbb{V}(p_1, p_2, p_3)$$

となる。

(3) $p_1 = 0, p_2 = 0$, $p_3 \neq 0$ のときを考える。すなわち，$z = 0$ のときである。$f(x, y, 0) = y^3$ のミルナー数は ∞ である。よって，$\mathbb{V}(p_1, p_2)\backslash \mathbb{V}(p_1, p_2, p_3)$ を得る。

(4) 以上 (1), (2), (3) より $\mu^{(2)}(f) = 4$ 以外の集合は

$$\begin{aligned}&(\mathbb{V}(p_3(4p_2^3 - 27p_1^2p_3))\backslash \mathbb{V}(p_1)) \cup (\mathbb{V}(p_1, p_3)\backslash \mathbb{V}(p_2)) \cup (\mathbb{V}(p_1, p_2)\backslash \mathbb{V}(p_3))\\ &= \mathbb{V}(p_3(4p_2^3 - 27p_1^2p_3))\backslash \mathbb{V}(p_1, p_2, p_3)\end{aligned}$$

となる。射影空間上で考えているので $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ のときは除外してよいので（このときは，$f|_{H_p}$ を考えないので補集合に加えてよい），以上より，limiting tangent space は

$$\mathbb{V}(p_3(4p_2^3 - 27p_1^2p_3))$$

となる。

上で見た新しい計算法をアルゴリズムとしてまとめると次のようになる。これが，本稿での主結果となる。

<u>新しい計算法</u>
入力:$f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$：原点に孤立特異点を持つ。$(S = \{x \in X | f(x) = 0\})$
出力:$K(S, O)$: S の limiting tangent space
BEGIN
$K(S, O) \leftarrow \emptyset$;　$P \leftarrow \{0\}$;
for each $i = 1$ **to** n
　$h \leftarrow f$ の x_i に $s_{i+1}x_{i+1} + \cdots + s_n x_n$ を代入 (ただし，$s_{i+1}, \ldots, s_n$ はパラメータ); $(\star)$
　$\mathcal{PLC} \leftarrow h$ の原点でのパラメータ付きミルナー数を求める;
　　if $i = 1$ **then**
　　　$\mu \leftarrow \mathcal{PLC}$ での open, dense な strata に対応するミルナー数（$\mu^{(n-1)}(f)$ の決定）;
　　end -if
　$\mathbb{A}_i \leftarrow \mu$ となる strata $s_\ell = -\frac{p_\ell}{p_i}$ で $p_1, \ldots, p_n$ の式に戻し，$\mathbb{V}(P) \setminus \mathbb{V}(p_i)$ の共通部分をとる。その後，
　　　それらすべての和集合をとる;
　$P \leftarrow P \cup \{p_i\}$;
　$K(S, O) \leftarrow K(S, O) \cup \mathbb{A}_i$;
end-for
return $K(S, O) \cup \mathbb{V}(P)$;
END

パラメータ付き代数的局所コホモロジー計算において，定義多項式の多くの項にパラメータが存在すると計算量はもちろん大きくなる。なるだけ効率的に計算するには $(\star)$（または，i の選択）の手順で，次数が一番小さい変数に代入するような変数の選び方をすればよい。

次に，O'Shea の計算法と代数的局所コホモロジーを利用した新しい計算法の計算速度を比較する。表の O'Shea の計算法の時間は最後の根基イデアルの計算はせず，各変数に 0 を代入した時点までの計算時間である。この時使用した項順序は $u \gg \{x_1, \ldots, x_n\} \gg \{p_1, \ldots, p_n\}$ となるブロック項順序で，各ブロックは全次数逆辞書式項順序である。グレブナー基底計算は計算機代数システム Risa/Asir の組み込み関数（gr）を使用した。新しい計算法は同じ計算機代数システム Risa/Asir 上に実装し比較した。表の計算時間の単位は CPU 秒である。使用した計算機は [OS: Windows7, CPU: Intel Core i7-5930K 3.50 GHZ,RAM: 64 GB] であり，ベンチマークに使用した問題は 吉永-鈴木の論文 [27] と，V.I. Arnold, et al. の本 [1] にある分類表から選んだ合わせて 16 個の 3 変数多項式である。(x, y, z は変数である。)
次の 1〜11 の多項式は 吉永-鈴木の論文 [1] から選び，12〜16 は V.I. Arnold, et al. の本 [1] から選んだ。

1: $x^3 + y^2z + xz^3 + z^5$ (Q_{11}),
2: $x^2z + yz^2 + y^5 + y^3z$ (S_{14}),
3: $x^2z + yz^2 + y^5 + y^3z + z^3$ (S_{14} の μ-constant な変形),
4: $x^3 + xz^2 + y^5$ (U_{16}),
5: $x^3 + xz^2 + y^5 + y^2z^2 + y^3z^2$ (U_{16} の μ-constant な変形),
6: $x^3 + yz^2 + y^8$ (Q_{18}),
7: $x^3 + yz^2 + y^8 + xy^6$ (Q_{18} の μ-constant な変形),
8: $x^3 + yz^2 + xy^5$ (Q_{17}),
9: $x^3 + yz^2 + xy^5 + y^8 + y^9$ (Q_{17} の μ-constant な変形),

10: $x^2z + yz^2 + xy^4$ (S_{16}),
11: $x^2z + yz^2 + xy^4 + y^6 + z^3$ (S_{16} の μ-constant な変形)
12: $x^3 + y^3 + z^3 + xyz$ (P_8),
13: $x^2z + yz^2 + x^2y^2 + y^7 + y^8$ ($S_{1,2}$),
14: $x^3 + xz^2 + xy^3 + y^3z + y^4z$ ($U_{1,0}$),
15: $x^3 + xz^2 + xy^3 + y^2z^2 + y^3z^2$ ($U_{1,1}$),
16: $x^3 + xz^2 + xy^3 + y^4z + y^5z$ ($U_{1,2}$),

超平面を $p_1x + p_2y + p_3z = 0$ としたときの limiting tangent space と計算時間を表したものが表 4 である。表で >2h は計算時間に 2 時間以上を要することを意味する。

問題	O'Shea の計算法	新しい計算法	Limiting tangent space
1	0.6084	0.0156	$p_3(4p_1^3 - 27p_2^2p_3) = 0$
2	0.0624	0.0312	$p_2(p_1^2 + 4p_2p_3) = 0$
3	1.061	1.108	$p_2(p_1^2 - 4p_2^2 + 4p_2p_3) = 0$
4	0.0156	0.0156	$p_2 = 0$
5	5.897	0.0156	$p_2 = 0$
6	0.0312	0.0312	$p_2(4p_1^3 - 27p_2p_3) = 0$
7	4.508	0.0468	$p_2(4p_1^3 - 27p_2p_3) = 0$
8	0.0486	0.0624	$p_2(4p_1^3 - 27p_2p_3^2) = 0$
9	>2h	0.108	$p_2(4p_1^3 - 27p_2p_3^2) = 0$
10	0.0468	0.0156	$p_2(p_1^2 + 4p_2p_3) = 0$
11	>2h	5.678	$p_2(p_1^2 - 4p_2^2 + 4p_2p_3) = 0$
12	0.0156	1.108	$(*1) = 0$
13	202.3	0.0624	$p_2(p_1^2 + 4p_2p_3) = 0$
14	8.018	0.0312	$p_2 = 0$
15	8.892	0.0468	$p_2 = 0$
16	182.1	0.0468	$p_2 = 0$

ただし，$(*1) = 27p_1^6 - 18p_3p_2p_1^4 + (-58p_2^3 - 58p_3^3)p_1^3 - 109p_3^2p_2^2p_1^2 + (-18p_3p_2^4 - 18p_3^4p_2)p_1 + 27p_2^6 - 58p_3^3p_2^3 + 27p_3^6$ である。

表 4: 計算比較と limiting tangent space

表 4 から，代数的局所コホモロジーを用いた新しい計算法がすべてにおいて速いというわけではないことがわかる。しかしながら，多くの場合において，O'Shea の計算法より効率的である。

問題 3 は S_{14} の μ-constant な変形であるが，limiting tangent space は違うことが分かる。これは，変形

に用いた upper monomial の全次数が問題 2 の最小な全次数と同じことより，tangent cone が変化することから，limiting tangent space も違ってくる。問題 10 と 11 も同じ理由により limiting tangent space は異なる。

謝辞

本研究において第一著者は科学研究費補助金 (課題番号:No. 15K17513), 第二著者は科学研究費補助金 (課題番号:No. 15K04891) の助成を受けている。

参 考 文 献

[1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, 1985, Singularities of Differentiable Maps I, II, Birkhäuser.

[2] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister and H. Schönemann, 2012, SINGULAR 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations, `http://www.singular.uni-kl.de`

[3] A. G. Flores, 2013, Specialization to the tangent cone and Whitney equisingularity, Bulletin de la Socoété Mathématique de France. Vol. 141, pp. 299–342.

[4] T. Gaffney, 1997, Aureoles and integral closure of modules, in Stratifications. singularities and differential equations II, Travaux en Cours, **55**, Hermann, pp. 55–62.

[5] A. Grothendieck, 1957, Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Séminaire Bourbaki **149**.

[6] A. Grothendieck, 1967, Local Cohomology, notes by R. Hartshorne, Lecture Notes in Math., 41, Springer.

[7] H. A. Hamm et Lê Dũng Tráng, 1973, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **6**, pp. 317–366.

[8] A. Hénaut, 1981, Cycles exceptionnel de l'éclatement de Nash d'une hypersurface analytiques complexe à singularité isolée. Bull. Soc. math. France. **109**, pp. 475–481.

[9] J-P. G. Henry and Lê Dũng Tráng, 1977, Limites d'espaces tangent. in Fonctions de plusieurs variables complexes II, Lecture Notes in Mathematics, **482**, Springer, pp. 251–265.

[10] Lê Dũng Tráng, 1981. Limies d'espaces tangents sur les surfaces. Generic section of singularities. Nova Acta Leopodina (N.F.), **52**, no. 240, pp. 119-137.

[11] Lê Dũng Tráng, 1981. Limies d'espaces tangents et obstruction d'Euler des surfaces. in The Euler-Poincaré characteristic, Astérisque, **82-83**, pp.45-69.

[12] Lê Dũng Tráng, 2007. Generic section of singularities. Singularity Theory, World Sci. Pub., Hackensack, pp. 677–682.

[13] Lê Dũng Tráng and B. Teissier, 1979. Sur la geometrie des surface complexes I -Tangentes exceptionnelles-. American Journal of Mathematics, **101**-2, pp. 420–452.

[14] Lê Dũng Tráng and B. Teissier, 1988. Limites d'espaces tangents en geometrie analytique. Comment. Math. Helvetici, **63**, pp. 540–578.

[15] K. Nabeshima and S. Tajima, 2014. On efficient algorithm for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases. Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation(ISSAC2014), ACM, pp. 351–358.

[16] K. Nabeshima and S. Tajima, 2017, Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals. to appear in Journal of Symbolic Computation.

[17] A. Nobile, 1975, Some properties of the Nash blowing-up, Pasific J. Math. **60**, pp. 297–305.

[18] M. Noro and T. Takeshima, 1992. Risa/Asir - A computer algebra system. Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation(ISSAC1992), ACM, pp. 387–396 `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html`

[19] D. O'Shea, 1995. Computing limits of tangent spaces: singularities, computation and pedagogy. Singularity theory (Trieste, 1991), World Sci. Publ., River Edge, NJ, pp. 549–573.

[20] M. H. Schwartz, 1965. Classes caractéristiques définies par une stratification d'une varié té analytique complexe, C. R. A. S. **260**, pp.3262–3264 et 3535–3537.

[21] M. H. Schwartz, 1991. Champs radianz sur une stratification analytique, Travanx en Cours **39**, Hermann.

[22] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, 2009. Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals. Advanced Studies in Pure Mathematics **56**, pp.341–361.

[23] B. Teissier, 1973, Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney, Astérisques **7-8**, Soc. Math. France, pp. 285–362.

[24] B. Teissier, 1977, Variétés polaires I, Invent. Math. **40**, pp. 267–292.

[25] H. Whitney, 1965, Tangents to an analytic variety, Annals of Mathematics, **81**, pp. 496–549.

[26] H. Whitney, 1965, Local properties of analytic varieties, in Differential and Combinatorial Topology, Princeton, pp. 205–244.

[27] E. Yoshinaga and M. Suzuki, 1979, Normal forms of nondegenerato quasihomogeneous functions with inner modality ≤ 4, Invent. Math. **55**, pp. 185–206.