数理解析研究所講究録
第2019巻 2017年 80-84

CM局所環の準素イデアルのHilbert–Samuel重複度の計算アルゴリズムについて

渋田敬史 *
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
TAKAFUMI SHIBUTA
INSTITUTE OF MATHEMATICS FOR INDUSTRY, KYUSHU UNIVERSITY

田島 慎一 †
筑波大学大学院数理物質科学系・数学域
SHINICHI TAJIMA
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

In this paper, we present an algorithm for computing the Hilbert–Samuel multiplicities of $\mathfrak{m}$-primary ideals of Cohen–Macaulay local rings.

1 はじめに

$S=K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]$ を任意の体 K 上の形式べき級数環とし, $I\subset R$ を, $R=S/I$ が Cohen-Macaulay 環 (CM 環) であるイデアルとする. 体を含む完備 CM 局所環は, このように表すことができる. $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアル, R の Krull 次元を d とする. $\mathfrak{m}$-準素イデアル $J\subset R$ に対し, その重複度 $e_R(J)$ は

$$e_R(J)=\lim_{n\to\infty}\frac{d!}{n^d}\ell(R/J^n)$$

で定義される. 本講演の目的は, $e_R(J)$ の計算アルゴリズムを与えることである. また, このアルゴリズムを利用して, J の整閉包 $\overline{J}$ の所属判定問題を解くことができることを示す.

一般には, 環やイデアルの不変量の計算は, グレブナ基底や標準基底の計算が必要で計算量が大きいが, 0 次元イデアルの剰余環は K 上有限次元なので, 線形代数を用いた効率的なアルゴリズムが期待できる. 重複度の計算方法としてまず思いつくのが, 随伴次数環 $\bigoplus_{n\geq 0}J^n/J^{n+1}$ の Hilbert 関数を計算し, その先頭係数から $e_R(J)$ を得る方法がある. [5] にはこの方法によるアルゴリズムが与えられている. しかし, 随伴次数環は d 次元の環であり, J が 0 次元である利点を放棄してしまっているとも言える. 本講演で与えるアルゴリズムは, 節減 (reduction) $Q\subset J$ を取り, $e_R(J)=\ell_R(R/Q)$ と計算する方法である. ただし, 十分一般係数での線形和を取るときにを乱数を用いず, 係数をパラメタとして計算する事にので, 確率的ではなく, 確定的なアルゴリズムである. $\ell_R(R/Q)$ の計算には, 代数的局所コホモロジーを利用したアルゴリズム [7] を用いる.

*shibuta@imi.kyushu-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

2 標準基底

$S=K[\![x_1,\dots,x_n]\!]$ を任意の体 K 上の形式べき級数環, $\mathfrak{n}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ を極大イデアル, J を $\mathfrak{n}$ 準素イデアルとする．単項式の集合 $\{x^\alpha \mid \alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$ 上の全順序 $\prec$ が S の局所順序であるとは, 次の 2 つの条件を満たすときである．(1) 任意の $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し, $x^\alpha\prec 1$. (2) 任意の $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し, $x^\alpha\prec x^\beta$ ならば, $x^{\alpha+\gamma}\prec x^{\beta+\gamma}$. このとき, 任意の単項式全体の集合に対し, $\prec$ に関する最大限が存在する．

定義 1

$g(x)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha\in R$ $(c_\alpha\in\mathbb{C})$ に対し, $\mathrm{LT}_\prec(g):=\max_\prec\{x^\alpha \mid c_\alpha\neq 0\}$ を g の $\prec$ に関する先頭項と呼ぶ.

定義 2

$G\subset J$ が $\langle \mathrm{LT}_\prec(J)\rangle=\langle \mathrm{LT}_\prec(G)\rangle$ を満たすとき, G を J の $\prec$ に関する標準基底と呼ぶ.

$E=E_S(S/\mathfrak{n})\cong H^n_{\mathfrak{n}}(S)$ を S の剰余体 $S/\mathfrak{n}\cong K$ の入射閉包とする．ここでは, $H^n_{\mathfrak{m}}(S)$ のチェック表現により, E と $K[x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}]\frac{1}{x_1\ \ x_n}$ を同一視する．S 加群 M に対し, $M^\vee:=\mathrm{Hom}_S(M,E)$ を M の Matlis dual と呼ぶ. $\ell_S(M)=\ell(M)$ を M の長さとする．Matlis 双対定理により, 任意の $\mathfrak{n}$ 準素イデアル J に対して, $\ell(S/J)=\ell((S/J)^\vee)$ である．E の単項式の集合 $\{\frac{dx}{x^{\alpha+1}} \mid \alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$ 上の全順序 $\prec^\vee$ を,

$$\frac{dx}{x^{\alpha+1}}e_i^\vee \prec^\vee \frac{dx}{x^{\beta+1}}e_j^\vee \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^\alpha e_i\succ x^\beta e_j$$

で定義し, $\prec$ から定まる E の項順序と呼ぶことにする．$\eta=\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0},1\leq i\leq r} c_{\alpha,i}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}e_i^\vee$, $c_{\alpha,i}\in\mathbb{C}$, に対し,

$$\mathrm{LT}_{\prec^\vee}(\eta)=\max_{\prec^\vee}\left\{\frac{dx}{x^{\alpha+1}} \mid c_{\alpha,i}\neq 0\right\}$$

とする.

一般の場合に標準基底を計算するアルゴリズムとしては, Mora の接錘アルゴリズム [2] があるが, $\mathfrak{n}$ 準素イデアル J に対しては, 田島–中村–鍋島 [7] による, $(S/J)^\vee=\mathrm{Hom}_S(R/J,E)=\{\eta\in E\mid J\eta=0\}$ と J の標準基底を, J の生成元が係数にパラメタを含む場合に計算するアルゴリズムが知られている．詳細な説明はここでは省略するが, このアルゴリズムは, J の 0 でない項から生成される単項式イデアルを M とすると, 組成列 $(S/M)^\vee=N_0\subsetneq N_1\subsetneq\cdots\subsetneq N_m=(S/J)^\vee$ を構成し, $(S/J)^\vee$ のベクトル空間としての基底から, J の標準基底を計算する．これにより出力される標準基底は, 例え入力 J の生成系が冪級数で与えられていても, 多項式の集合となる．各 N_i から N_{i+1} の構成は以下の様に行う．$(S/J_i)^\vee=N_i$ となる $J_i\subset S$ の先頭項イデアル $\mathrm{LT}_\prec(J_i)$ の極小生成系の各元 x^α に対し, $\mathrm{LT}_{\prec^\vee}(\eta)=\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ となる $\eta\in(S/J)^\vee$ が存在するかどうかを線形代数を用いて確かめ, 存在した場合は, $N_{i+1}=\langle N_i,\eta\rangle$ とし, そのような x^α が存在しなければ, $J=J_i$ で $N_i=(S/J)^\vee$ となっている.

例 1

$J=\langle x^2+x^2y, xy+y^2\rangle\subset\mathbb{C}[\![x,y,]\!]$, $\prec$ を $y\prec x$ 反全次数辞書式順序とする．$M=\langle x^2,xy,y^2\rangle$ で, $N_0=(S/M)^\vee=\langle\frac{1}{xy},\frac{1}{x^2y},\frac{1}{xy^2}\rangle$ となる．M の生成元 x^2,xy,y^2 で最大の x^2 に対し, $\mathrm{LT}_{\prec^\vee}(\eta)=\frac{1}{x^3y}$ となる $\eta\in(S/J)^\vee$ は存在しない．xy に対し, $\mathrm{LT}_{\prec^\vee}(\eta)=\frac{1}{x^2y^2}$ となる $\eta\in(S/J)^\vee$ も存在しない．y^2 に対し, $\mathrm{LT}_{\prec^\vee}(\eta)=\frac{1}{xy^3}$ となる $\eta\in(S/J)^\vee$ は存在すれば, $\eta=\frac{1}{xy^3}+a\frac{1}{x^2y^2}+b\frac{1}{x^3y}$ の形をしているが, $J\eta=0\Leftrightarrow b=0, a+1=0$ なので, これは存在し, $a=-1, b=0$ である．$\eta_1=\frac{1}{xy^3}-\frac{1}{x^2y^2}$ である．$N_1=\langle N_0,\eta_1\rangle$ とすると, $(S/J_1)^\vee=N_1$ となる J_1 の先頭項イデアル $\mathrm{LT}_\prec(J_1)$ は, 標準単項式の集合が $\mathrm{LT}_\prec(J)$ の標準単項式に y^2 を加えたものになるので, $\mathrm{LT}_\prec(J_1)=\langle y^3,x^2,xy\rangle$ となる．y^3 に対し,

$\mathrm{LT}_{\prec^\vee}(\eta) = \frac{1}{xy^4}$ となる $\eta \in (S/J)^\vee$ も存在しない. よって, $(S/J)^\vee = N_1$ で, $\ell(S/J) = 4$ である. この計算結果を利用して, $\{x^2, xy+y^2, y^3\}$ が J の標準基底であることも分かる. また, $(S/J)^\vee$ は η_1 で生成され, $g \in S$ に対して $g \in J \Leftrightarrow g\eta_1 = 0$ なので, η_1 を用いて, J の所属判定問題が解ける.

3 整閉包

ここでは整閉包に関するいくつかの定理を述べる（証明は [1], [4] などを参照）. 以下, $R = S/I$ は d 次元とし, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする. $J = \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m \rangle$ を R の $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとする. ただし, $\bar{f}_i$ はある $f_i \in S$ の R での像である.

定義 3
$x \in R$ が J 上整であるとは, ある $m \in \mathbb{N}$ と $c_i \in J^i$ が存在し,

$$x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_m = 0$$

が成立することを言う.

定理 4
$J = \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r \rangle \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d,O}$, $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d,O}$ とする. 次は同値.

1. *$g \in \overline{J}$.*

2. *ある O の開近傍 U と定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $x \in U$ に対して*

$$|g(x)| \le C(|\bar{f}_1(x)| + \cdots |\bar{f}_r(x)|).$$

3. *$X \to (\mathbb{C}^d, O)$ を J の埋め込み特異点解消, $J\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-F)$ とすると, $g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-F))$.*

解析的な条件 2 が J 上整である事と同値であることは, Teissier [8] によって示された.

例 2
$J = \langle x^2, y^2 \rangle \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,O}$, $g = xy$ とすると, $g \in \overline{J}$ である. 実際, $c = x^2y^2 \in J^2$ で, $g^2 - c = 0$. また, $|xy| \le \frac{1}{2}(|x^2| + |y^2|)$ なので, 定理 4, 2 の条件を確かに満たす. また, 原点での blow-up $X \to \mathbb{C}^2$ が J の埋め込み特異点解消であり, $X = U \cup V$, $U = \{(x, y/x) \mid x \neq 0\}$, $V = \{(x/y, y) \mid y \neq 0\}$ となり, U 上, $g = x^2 \cdot y/x \in J\mathcal{O}_U = \langle x^2, x^2(y/x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$, V 上, $g = y^2 \cdot x/y \in J\mathcal{O}_V = \langle y^2(x/y)^2, y^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$ なので, 定理 4, 3 の条件も確かに満たされている.

整閉包と Hilbert–Samuel 重複度の関係として, 次の定理が知られている.

定理 5 ([6])
$R = S/I$ を等次元とする. $\mathfrak{m}$ 準素イデアル $J_1 \subset J_2 \subset R$ に対し, $e_R(J_1) = e_R(J_2)$ と, $J_2 \subset \overline{J}_1$ とは同値.

この定理により, Hilbert–Samuel 重複度が計算出来れば, $\mathfrak{m}$ 準素イデアルの整閉包の所属判定ができる事になる. Hilbert–Samuel 重複度の計算には, 節減を用いる.

定義 6
$\mathfrak{m}$ 準素イデアル $J_1 \subset J_2 \subset R$ に対し, J_1 が J_2 の節減とは, ある $r > 0$ が存在して, $J_1 J_2^r = J_2^{r+1}$ が成り立つときを言う.

定理 7
$J=\langle\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_m\rangle$ とする. K が無限体の時, ある *Zariski* 開集合 $U\subset K^{d\times m}$ が存在し, $(a_{ij})_{i,j}\in U$ に対し, $Q=\langle\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_d\rangle$, $\bar{g}_j=\sum_i a_{ij}\bar{f}_i$ $(1\le j\le d)$, は J の節減となる.

定理 8
J_1 が J_2 の節減のとき, $e_R(J_1)=e_R(J_2)$ が成り立つ.

4 アルゴリズム

$R=S/I$ は Cohen–Macaulay であるとする. J の節減を得るには, 乱数を生成して, それを a_{ij} とすればよさそうであるが, この方法は確率的であり, 出力の正当性を保証するには, Q が実際に節減であることを示す必要がある. すなわち, $J^{r+1}=QJ^r$ となる r が存在することを示す必要がある. $r=1,2,3,\ldots$ と増やしていき, その都度イデアル一致問題を解く事になるが, r が大きくなるごとにイデアルは複雑になっていき, また, r がどれだけ大きいところまで調べればよいかは事前に知ることはできない. さらに, Q が節減になっていない場合にはこの操作は終わらない. 確定的なアルゴリズムにするためには, 係数を乱数ではなく, パラメタとして計算すれば良い.

定理 7 により, 十分一般の $a_{i,j}$ に対し, Q, は J の節減となる. Zariski 開集合の有限の共通部分は空でない Zariski 開集合なので, $a_{ii}\neq 0$, $1\le i\le d$, としてよい. よって, $Q=\langle\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_d\rangle$, $\bar{g}_j=\bar{f}_j+\sum_{i=d+1}^m a_{ij}\bar{f}_i$ $(1\le j\le d)$, は十分一般の $\underline{a}=(a_{ij})_{i,j}\in K^{d\times(m-d)}$ に対して, J の節減となる.

$\underline{t}=(t_{ij})_{1\le i\le d,d+1\le j\le m}\in K^{d\times(m-d)}$ を K 上の変数とし, $\mathbb{K}=K(t_{i,j}\mid i,j)$, $S'=\mathbb{K}[\![x_1,\ldots,x_n]\!]$, $R'=S'/IS'$ とする. $Q_{\underline{t}}:=\langle\bar{f}_j+\sum_{i=d+1}^m t_{ij}\bar{f}_i\mid 1\le i\le d\rangle\subset R'$ とし, その S' での原像を

$$P_{\underline{t}}=\langle f_j+\sum_{i=d+1}^m t_{ij}f_i\mid 1\le i\le d\rangle+IS'\subset S'$$

とする. $Q_{\underline{t}}$, $P_{\underline{t}}$ の生成系の $\underline{t}=(t_{ij})_{i,j}$ に, 具体的な値 $\underline{a}=(a_{ij})_{i,j}$ を代入して得られるイデアルをそれぞれ $Q_{\underline{a}}\subset R$, $P_{\underline{a}}\subset S$ とする.

定理 9
$\{\underline{a}\in K^{d\times m-d}\mid Q_{\underline{a}}$ は節減 $\}$ と $\{\underline{a}\in K^{d\times m-d}\mid \ell_R(R/Q_{\underline{a}})=\ell_{S'}(S'/P_{\underline{t}})\}$ は等しい *Zariski* 開集合であり, $e_R(J)=\ell_{S'}(S'/P_{\underline{t}})$ が成り立つ.

よって, 田島–中村–鍋島のアルゴリズムで $S'/P_{\underline{t}}$ のマトリス双対を計算することにより, $e_R(J)$ が計算できる. この計算過程を保存することによって, 定理 9 の Zariski 開集合を計算することもできるが, 次の定理が成り立つ.

定理 10
$P_{\underline{t}}$ の局所順序 $\prec$ に関する標準基底 $G=\{h_1,\ldots,h_p\}$ で, $h_i\in K[t_{i,j}\mid i,j][x_1,\ldots,x_n]$ となるものが存在する. h_i の $\mathrm{LT}_{\prec}(h_i)$ の係数を $u_i(\underline{t})$ とすると, このとき, $\{\underline{a}=(a_{ij})_{i,j}\mid u_1(\underline{a})\neq 0,\ldots,u_d(\underline{a})\neq 0\}$ は定理 9 の *Zeriski* 開集合に含まれる *Zariski* 開集合となる.

この定理によって, J の節減 Q を得ることができる. R は Cohen–Macaulay 環なので特に等次元で, $e_R(Q)=\ell(R/Q)=\ell(S/(I+Q'))$ である. ただし Q' は Q の S での原像. $\overline{Q}=\overline{J}$, $e_R(J)=e(Q)=\ell(R/Q)$ なので, $g\in\overline{J}$ は, $e_R(\langle Q,g\rangle)=\ell(R/Q)$ と同値となる. つまり, $Q'=\langle g_1,\ldots,g_d\rangle$, g の S での原像の一つを g' とし, $P_t:=\langle g_1+t_1g',\ldots,g_d+t_dg'\rangle\subset S':=K(t_1,\ldots,t_d)[\![x_1,\ldots,x_n]\!]$ とすると, $g\in\overline{J}$ は $\ell(S'/P_t)=\ell(R/Q)$ と同値となる. よって, J の整閉包の所属判定問題も解くことができる.

参 考 文 献

[1] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **39**, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.

[2] T. Mora, An algorithm to compute the equations of tangent cones Lecture Notes in Computer Science **144** (1982), 24–31.

[3] K. Nabeshima, PGB: A Package for Computing Parametric Gröbner Bases and Related Objects, Conference posters of ISSAC 2007 (2007), 104–105.

[4] C. Huneke, I. Swanson, *Integral closure of ideals, rings, and modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. **336**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006

[5] T. Mora, M.E. Rossi, An algorithm for the Hilbert-Samuel function of a primary ideal, Comm. Algebra **23** no. 5(1995), 1899–1911.

[6] D. Rees, $\mathcal{A}$-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals, Proc. Cambridge Phil. Soc. **57** (1961), 8–17.

[7] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, Advanced Studies in Pure Mathematics **56** (2009), 341–361.

[8] B. Teissier, Variétiés polaries. II. Multiplicitiés polaries, sections planes, et conditions de Whitney, Algebraic Geometry (La Rábida 1981), Lect. Notes. Math. **961** (1983), 314–491.