数理解析研究所講究録
第2022巻 2017年 29-39

数式処理システム Mathematica を用いた 高校生による数学研究 II

関西学院高等部 宮寺 良平 (Ryohei Miyadera)
Kwansei Gakuin High School
兵庫教育大学 福井 昌則 (Masanori Fukui)
Hyogo University of Teacher Education

1 はじめに

関西学院高等部で行われている数式処理システム Mathematica を用いた数学研究の結果に関して報告する. 昨年 ([1]) は「小谷の蟻問題」と「陸上競技のトラック問題」について報告したが, 本年度は「Corner the Queen 問題」と「ナイトツアー」について報告する. Corner the Queen 問題は, 数学的には Wythoff のゲームと同値であるが, その問題を変形することによって, 多くの新しい事実を発見し, 証明を行なった. Corner the Queen 問題のような本格的な数学研究だけではなく, 生徒のアイディアを活かした研究やミニ研究も行なっており, 今回はその中の 1 つであるナイトツアーについて紹介する. ナイトツアーはチェスのナイトを動かしてボードの全てのマスを埋め尽くすことが出来るかというゲームであり, 今は全てのマスを埋め尽くすためにはどのような経路を辿ればいいかなどといった計算機科学の問題としても知られている. 筆者らは, その問題に対する見方を変え, ナイトの動きをトレースして得られるナイトグラフを用いて, 綺麗なナイトグラフをどうすれば得られるかという問題として研究を行なっている. その活動を通して, 多くの綺麗なナイトグラフを得ることができた. いずれのテーマにおいても, 数式処理システム Mathematica や C や Java などで作成したプログラムの利用によって研究を行なっており, それらが研究に本質的に寄与している. また, アプリ開発などを通してプログラミングに興味を持っている生徒も参加させることや, アプリを用いた数学研究活動も展開することを行なっている.

2 Corner the Queen 問題

本節では, Corner the Queen 問題を取り扱うが, 本問題については [3],[9] を参考にしながら紹介し, その後発展させた内容について報告する. この問題は先手後手の打つ手に差がない不偏ゲームとよばれる組み合わせゲームである. ゲームのルールに関しては, 後ほど述べることとし, ここでは必要な一般論について述べる. ここでは引き分けのないゲームのみを扱うので, どの局面も次のどちらかになる.

定義 2.1. (*i*) *N-position*(先手必勝手) は, その状態から始めるとき, 先手のプレイヤーが最適な戦略を使うことによって, 先手が必ず勝利できる状態のことである.

(*ii*) *P-position*(後手必勝手) は，その状態から始めるとき，先手のプレイヤーがどのような戦略を使っても，後手のプレイヤーが最適な戦略を使うことによって，後手が必ず勝利できる状態のことである．

次に，必勝法を解析するために必要な Grundy 数について説明する．ここで，一手で進むことができる行き先を全て列挙する関数 move，集合に含まれない最小の非負整数を出力する関数 mex は, 次のように定義される．

定義 2.2. $\mathbf{p}$ に対して，一手で移動できる集合を $move(\mathbf{p})$ と表記する．

定義 2.3. (*i*) mex 関数とは，非負整数からなる集合 S に含まれていない数字の中で，最も小さい非負整数を出力する関数である．
(*ii*) ゲーム終了時の Grundy 数を 0 と定義する．Grundy 数とは与えられた状態から一手で移動出来る全ての状態における Grundy 数からなる集合に含まれていない最小の非負整数であり，Grundy 数を $\mathcal{G}$ とすると，以下のように再帰的に定義される．
$\mathcal{G}(\mathbf{p}) = mex\{\mathcal{G}(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in move(\mathbf{p})\}$

例 2.1. mex の例

$$mex\{0,1,2,3\} = 4, mex\{1,1,2,3\} = 0,$$
$$mex\{0,2,3,5\} = 1, mex\{0,0,0,1\} = 2.$$

ここで，以下の定理が成り立つ．

定理 2.1. *$\mathcal{G}$ を Grundy 数とする．そのとき次のことが成り立つ．*
$\mathbf{h}$ が $\mathcal{P}$-position(後手必勝手) であるとき，またそのときに限り $\mathcal{G}(\mathbf{h}) = 0$.

証明については，[2] に掲載されている．

定義 2.4. (Corner the Queen 問題)
Corner the Queen 問題とは，チェス盤の上に Queen の駒を置いて，2 人のプレイヤが交互に Queen を動かして，左上の端に持って行ったプレイヤが勝ちとなるゲームである．以下の図 1 のように座標を定義し，Queen は座標が減る方向，つまり図 2 の ∘ 印の方向に進むことができ，座標の増える方向，つまり図 2 の × 印の方向には進めないとする．

Queen の駒を用いたときの move(x, y) は式 (1) のようになる．

$$move(x,y) = \{(u,y) : u < x\} \cup \{(x,v) : v < y\} \cup \{(x-t, y-t) : 0 < t \leq \min(x,y)\} \tag{1}$$

Queen を用いたときの Grundy 数の具体的な計算例は以下の通りである．
まず，図 3 のように, 座標 (0,0) の Grundy 数を 0 と定義する．以下，Grundy 数を各座標について再帰的に計算をしていく．つまり, 座標の値が少ないものから Grundy 数を決めていき，次に Grundy 数を決めるときには，そこから移動できる (座標の値の小さい) ところにある Grundy 数全体に含まれない最小の非負整数を用いることで, Grundy 数を計算することができる．

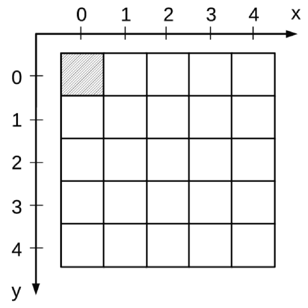

図 1: 座標の定義

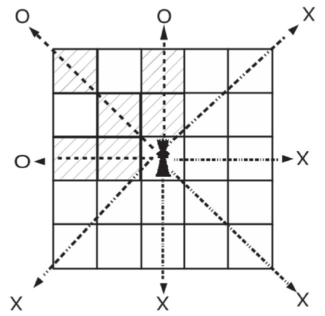

図 2: Queen の動き

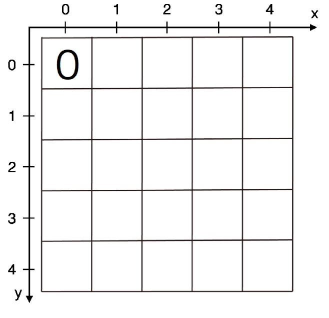

図 3: $(0,0)$ の Grundy 数

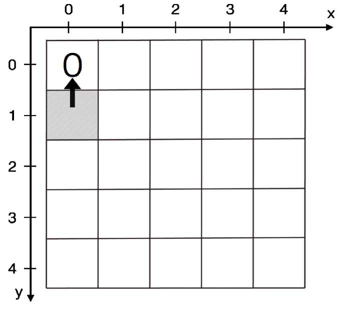

図 4: $(0,1)$ から一手で進める箇所

次に, 図 4 の斜線部 (座標 $(0,1)$) の Grundy 数を求める. Queen は, 図 4 のように座標 $(0,1)$ から座標 $(0,0)$ に進むことができ, 座標 $(0,0)$ の Grundy 数は 0 であるから, 座標 $(0,1)$ の Grundy 数は, 行き先の Grundy 数の全体である $\{0\}$ に含まれない最小の非負整数である 1 となる. 同様にして, 座標 $(1,0)$ の Grundy 数は 1 となる. 次に, 座標 $(1,1)$ の Grundy 数を求める. Queen は図 5 のように座標 $(0,0),(1,0),(0,1)$ に進むことができ, 行き先の Grundy 数の全体は $\{0,1,1\}$ であるから, 行き先に含まれない最小の非負整数は 2 となる. よって座標 $(1,1)$ の Grundy 数は 2 となる. 同様の操作手順によって, 座標 $(2,0)$ の Grundy 数は, 図 6 のように Queen が進めることを考えれば, Grundy 数は 2 となる. 座標 $(2,1)$ の Grundy 数は, 図 7 のように Queen が進めることを考えれば, 座標 $(2,1)$ の Grundy 数は 0 となる.

以上の計算方法を用いて Grundy 数を計算していくことにより, Grundy 数の表は図 8 のように求めることができる. ただし, Queen の駒を用いたゲームは, 石取りゲームの一種である Wythoff のゲームと数学的に同値であり, 後手必勝となる座標はすでに研究されている (証明については, 例えば [2]).

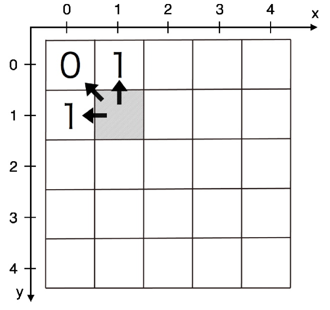

図 5: (1, 1) から一手で進める箇所

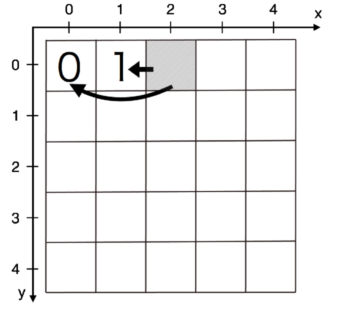

図 6: (2, 0) から一手で進める箇所

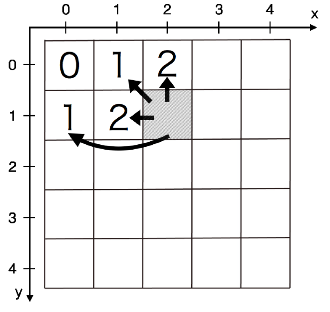

図 7: (2, 1) から一手で進める箇所

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10	12	8
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1	8	13
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2	7	12
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	0
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3	14	15
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16
9	9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17
10	10	11	9	8	13	12	0	15	16	17	14

図 8: Corner the Queen 問題の Grundy 数

3 Corner the Queen 問題の変種

本節では，Corner the Queen 問題の変種について述べる．ここで，筆者らは Queen の駒を別の駒に置き換えて研究を行った．まず，駒を飛車に変更した場合について述べる．

定義 3.1. (飛車問題)
チェス盤の上で飛車を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 (0, 0) の位置に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．飛車は以下の図 9 のように動くことができる駒であり，Grundy 数は図 10 のようになる．これは, 石取りゲームの 2 山くずしと数学的に同値である．

飛車の駒を用いたときの move(x, y) は式 (2) のようになる．

$$move(x, y) = \{(u, y) : u < x\} \cup \{(x, v) : v < y\} \tag{2}$$

生徒に飛車の駒を変えた問題はないかと提案したところ, 将棋の駒の中から「龍馬 (成り角)」を使ったらどうかという意見が出された．そこで, 龍馬を用いた場合の Grundy 数を計算し, その法則について調べてみることにした．以下，駒を龍馬 (成り角) に変更した場合について述べる．

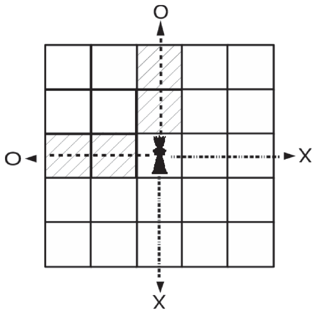

図 9: 飛車の動き

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0

図 10: 飛車を用いた場合の Grundy 数

定義 3.2. (龍馬問題)
チェス盤の上で龍馬 (将棋の成り角) を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0, 0)$ の位置に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．龍馬は，以下の図 11 のように動くことができる．しかし座標が増える方向へは動けないために，図 11 で $\times$ の印がついている方向へ動くことはできない．

龍馬の move は式 (3) で表すことができ，Grundy 数の表は図 12 のようになる．

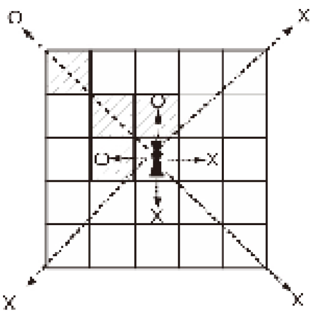

図 11: 龍馬の動き

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9	7	8
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10	8	6
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0	4	5
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1	5	3
9	9	10	11	6	7	8	3	4	5	0	1
10	10	11	9	7	8	6	4	5	3	1	2

図 12: 龍馬問題の Grundy 数

$$move(x, y) = \{(x - t, y - t) : 0 < t \leq \min(x, y)\} \cup \{(x, y - 1)\} \cup \{(x - 1, y)\} \qquad (3)$$

筆者らは，この Grundy 数についての公式を発見し，証明も完成している．さらに生徒と駒を変えてみてはどうなるかという話になった．以下，駒を龍王 (成り飛車) に変更した場合について述べる．

定義 3.3. (龍王問題)
チェス盤の上で龍王 (成り飛車) を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0, 0)$ の位置に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．龍王は，以下の図 13 のように動くことができる (つまり，将棋の飛車と王の動きの両方ができる)．しかし座標

が増える方向へは動けないために，図 13 で $\times$ の印がついている方向へ動くことはできない．

龍王の move は式 (4) で表すことができ，Grundy 数の表は図 14 のようになる．

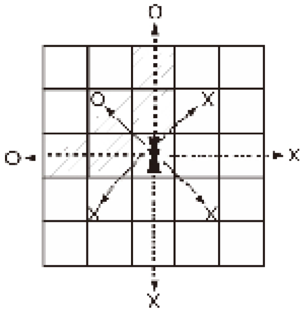

図 13: 龍王の動き

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9	7	8
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10	8	6
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0	4	5
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1	5	3
9	9	10	11	6	7	8	3	4	5	0	1
10	10	11	9	7	8	6	4	5	3	1	2

図 14: 龍王問題の Grundy 数

$$move(x,y) = \{(u,y) : u < x\} \cup \{(x,v) : v < y\} \cup \{(x-1,y-1)\} \tag{4}$$

龍王問題の Grundy 数の法則について研究を行い, 以下の公式を導いた.

定理 3.1. *(龍王の Grundy 数)*

$$\mathcal{G}(x,y) = mod(x+y,3) + 3(\lfloor \frac{x}{3} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{3} \rfloor) \tag{5}$$

$mod(x+y,3)$ は $x+y$ を 3 で割った余りのことである.

他に何か駒がないか調べていたところ, 変形チェスの駒で Queen と Knight の動きを組み合わせた駒を見つけた．その駒による Grundy 数を計算したところ, もしかしたら龍王にこの Knight の動きを組み合わせると新しい結果が出るのではないかという予想が出された．その流れから, 龍王の駒をさらに改良し, 以下のような動きをする駒について考えることとした．龍王+Knight の動きをする駒を図 15 のように表現し計算を行なった．そして, 図 16 のように, p を増やすことで移動できる範囲が増えるように設定を行なった.

p で動きを表現した駒における Grundy 数を計算しやすくするため, 図 17, 図 18 のような行列で動ける箇所を指定し, その行列に基づいて Grundy 数を算出することとした.

p を変化させて Grundy 数を計算していくと, 図 19, 図 20 のように, p を変化させることによって, 例えば四角で囲った範囲を一定の間隔で繰り返していることがわかった.

その結果を踏まえて研究を進めることによって, 筆者らは図 16 のように動く場合の公式を見出した.

定理 3.2. *(進める箇所を p で表現した場合の Grundy 数)*

$$\mathcal{G}(x,y) = mod(x+y,p) + p(\lfloor \frac{x}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{p} \rfloor) \tag{6}$$

$mod(x+y,p)$ は $x+y$ を p で割った余りのことである.

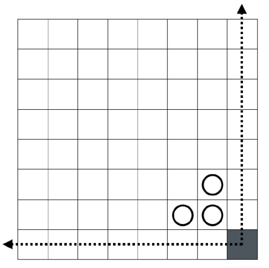

図 15: 進める箇所を追加した駒

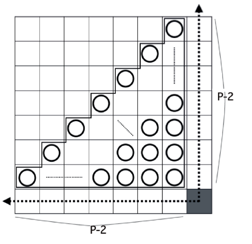

図 16: 進める箇所を p で表現した駒

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

図 17: 龍王の動きを表す行列 ($p = 3$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

図 18: $p = 4$ の動きを表す行列 (図 15 の動きに対応)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7	8	15
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9	7	8	6	16
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10	8	6	7	17
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	18
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0	4	5	3	19
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1	5	3	4	20
9	9	10	11	6	7	8	3	4	5	0	1	2	21
10	10	11	9	7	8	6	4	5	3	1	2	0	22
11	11	9	10	8	6	7	5	3	4	2	0	1	23
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0

図 19: $p = 3$ における Grundy 数

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	0	5	6	7	4	9	10	11	8	13
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14
3	3	0	1	2	7	4	5	6	11	8	9	10	15
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8
5	5	6	7	4	1	2	3	0	13	14	15	12	9
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10
7	7	4	5	6	3	0	1	2	15	12	13	14	11
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4
9	9	10	11	8	13	14	15	12	1	2	3	0	5
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6
11	11	8	9	10	15	12	13	14	3	0	1	2	7
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0

図 20: $p = 4$ における Grundy 数

そして, 公式が成り立つかを計算するための関数を作り, 検証を行った. これは, 算出した Grundy 数から公式から算出される値を引く関数であり, 関数の出力が全て 0 になれば, 計算した範囲において公式が成り立つことが検証できる. この関数や図 17, 図 18 に示した行列をさらに拡張することによって, 現在さらに研究を進めている. Corner the Queen 問題は, 数学的に高度な内容を含んでいるが, 生徒にとってルールの把握が難しくなく, 駒を動かすという具体的な操作で問題を捉えることができる. よって, このような問題は生徒にとって数学研究を行うことができる問題の 1 つであると考えられる.

4 ナイトツアークリエイター

ナイトツアーとは，チェスのナイトを動かしてボードの全てのマスを埋め尽くすことが出来るかというゲームである．図 21 のようにして，チェスのボードを埋めていく．そして，図 22 のように全部埋め尽くす．この問題はとてもよく知られており，歴史的には9世紀に記録がある．

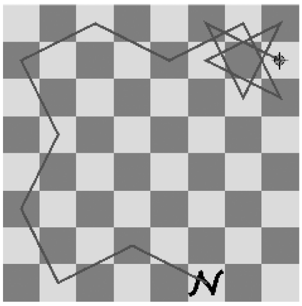

図 21: ナイトツアー

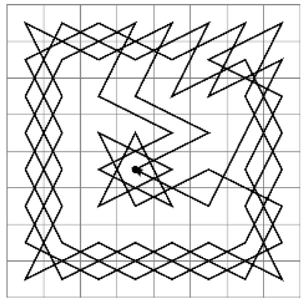

図 22: ナイトの動きをトレースしたもの ([18])

現在ではより大きいチェス盤を考えて，どうやって全てを埋め尽くすことが出来るかというアルゴリズムの構築や，いかに高速に解くかというアルゴリズムの構築などの問題へと変貌している．しかしチェス盤を大きくすると計算量が非常に大きくなり，アルゴリズムも相当高度なものになり，誰でも考えることができるような問題ではなくなってしまっているのが現状である．なお，ナイトツアーに付随するナイトグラフというものがある．それは，チェスのボードにおいて，ナイトが動くことができる方向をすべて書きあげたもので，図 23 のようになる．

筆者らはチェス盤を変形してみてから，ナイトグラフを作ってみた．図 24 のボードでは，白い部分だけにナイトを置くことができるとする．すると，付随するナイトグラフは図 25 となる．この形が綺麗だと思い，できるだけ綺麗なナイトグラフを生み出すようなボードを探すようになった．

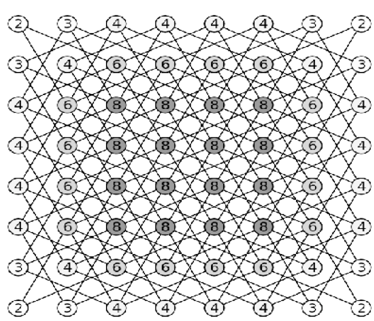

図 23: ナイトグラフ ([18])

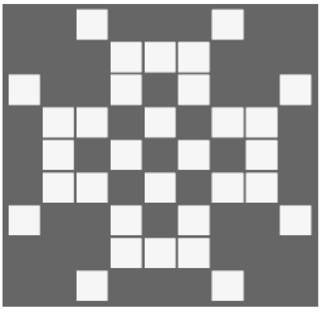

図 24: 変形したチェスボード

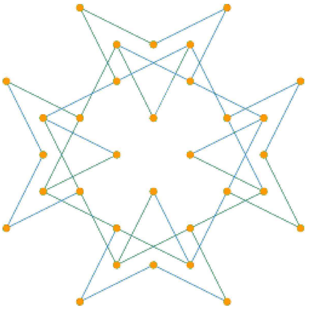

図 25: 図 24 におけるナイトグラフ

高校生が作ったナイトグラフの中で美しいものを 2 つ見ていただく．これらは，1 つのボードにおいて，2 つのナイトが動くタイプのナイトツアーである．

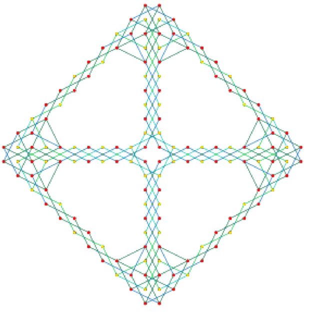

図 26: 2 つのナイトによるナイトグラフ

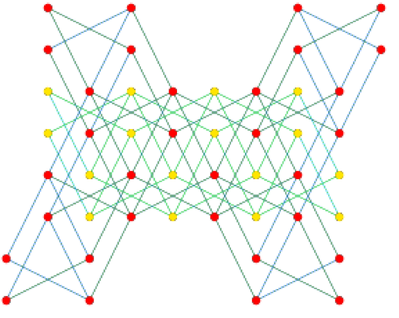

図 27: 2 つのナイトによるナイトグラフ

ナイトの動きは，何故か不思議な美しさがある．そのようなナイトグラフを作成するために，タブレット (iPhone/iPod touch/iPad, Android, TI-NSpire) で遊ぶことが出来るようにした．iPhone/iPod touch/iPad で動くアプリについては，AppStore で「Masanori Fukui」と検索，もしくは次のサイト `https://itunes.apple.com/jp/app/naitotsuakurieita-knight-tour/id892724444?l=en&mt=8` からダウンロードできる．Android で動くアプリについては，GooglePlay で「Masanori Fukui」と検索，もしくは次のサイト `https://play.google.com/store/apps/details?id=knighttourcreator.masanori.com.knighttourcreator&hl=ja` からダウンロードできる．TI-NSpire で動くアプリについては公開していないが，筆者らにご一報いただければ，無料配布を行うことも可能である．

数学教育関連のアプリは数多く出ているが，本作品のように，純粋数学的な要素とその数学が織りなす世界を表現した研究は，筆者らの知るところにはない．これらの理論面についてはイタリアのオンライン雑誌 Archimedes' Lavoratory [12] とセルビアの国立数学研究所のオンライン雑誌 Vismath [10] で掲載され，Wolfram Research の Demonstration Project では，[11] で登録されている．本問題のような，数学的な問題を別の観点から捉

え直して,「美しさ」「綺麗さ」を求めるパズルとしたことで, 今まで数学研究に参加できなかった多くの生徒が研究活動に参加することができ, それ以後別のテーマによる数学研究にも参加するようになった. これらのことから, 多くの現場においてこのような美しさを探求するようなパズルを用いることは, 生徒の積極的で主体的な態度を育成しうる題材の1つに成り得ると考えられる.

5 生徒を育成する活動としての数学研究とプログラミング教育

数学研究で証明が完了した, もしくはプログラミングにおいて作品が完成したという段階に止めることなく, 積極的に発表する活動を行なっている. そのことを通して, 学術的な内容は学術論文として掲載されてはじめて完結するものであることや, プログラミングの作品も積極的に発表しプレゼンなどの力を身に付けることが重要であると指導している. 現在, 高校生による数学研究活動やプログラミング活動により, 多くの成果をあげることができている. その結果として, 2016年に入ってから, 数学研究関連では, 第36回ゲーム情報学研究会若手奨励賞を受賞 ([4], 受賞者の紹介は [15]), JCDCG[3]([5], 英語で口頭発表), 日本数学会 ([6],[7], 日本数学会史上最年少口頭発表) などで生徒が学会発表, プログラミング関連では, U22 プログラミングコンテスト 2016([13]), あいちゃれ 2016([14]) でサイボウズ賞, Hack U で優秀賞 ([17], 最年少参加者), 飯塚スマートフォンアプリコンテストではトヨタ自動車九州賞 ([16], 大会史上最年少参加者) などを受賞した. 今後さらに多くの生徒が参加できるような学習モデルを構築し, 創造性を伸ばす教育を実践していくことが課題である.

参考文献

[1] 宮寺 良平・福井 昌則: 数式処理システム Mathematica を用いた高校生による数学研究, 京都大学数理解析研究所講究録, No.1978, pp.52-62 (2016).

[2] 佐藤 文広:「石取りゲームの数学: ゲームと代数の不思議な関係」, 数学書房, (2014).

[3] 宮寺 良平・福井 昌則・井上 理哲人・中屋 悠資・戸國 友貴: Corner the Queen problem の変種についての研究, 情報処理学会研究報告 (ゲーム情報学), 2016-GI-35, 6, pp.1-6 (2016).

[4] 宮寺 良平・福井 昌則・中屋 悠資・戸國 友貴: *A Generalized Ryuoh-Nim:A Variant of the classical game of Wythoff Nim*, 情報処理学会研究報告 (ゲーム情報学), 2016-GI-36, 14, pp.1-3, (2016).

[5] Ryohei Miyadera, Yushi Nakaya, Masanori Fukui and Shunsuke Nakamura: *Grundy Numbers of Impartial Three Dimensional Chocolate Bar Games*, The 19th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry,Graphs,and Games, 4A-3 (2016).

[6] 宮寺 良平・中屋 悠資: 石とりゲームの変種 —Grundy 数がニム和に等しくなるための必要十分条件—, 日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学 (2016).

[7] 中屋 悠資・宮寺 良平: *Grundy numbers of impartial three dimensional chocolate bar games*, 2016 日本数学会 秋季総合分科会, 関西大学 (2016).

[8] Ryohei Miyadera, Maakito Inoue and Masanori Fukui: *Impartial Chocolate Bar Games with a Pass*, Integers, in print.

[9] 福井 昌則・宮寺 良平: 組み合わせゲームとプログラミング教育: 第 14 回ゲーム学会合同研究会研究報告, pp.17-22 (2016).

[10] Yuya Kakoi, et al: *Beautiful Designs made from the Knight' s Tour*, MathArt, Visual Mathematics Art and Science Electric Journal of ISIS-Symmetry (2008).

[11] Wolfram Demonstration Project, `http://demonstrations.wolfram.com/BeautifulDesignsMadeFromTheKnightsTour/`

[12] Yuya Kakoi, et al: *New Knight's Tour Puzzles and Graphs -Some neat variants of the famous Knight's Tour-*, Archimedes' Lavoratory. `http://www.archimedes-lab.org/knight_tour.html`

[13] U-22 プログラミングコンテスト 2016 結果 `http://www.u22procon.com/report/index.html?g140`

[14] 第 6 回 立命館大学 全国高校・大学ソフトウェア創作コンテスト (ICT Challenge+R), `http://www.ict-challenger.jp`

[15] 情報処理学会 ゲーム情報学研究会公式 URL(若手奨励賞受賞者一覧), `http://www.ipsj.or.jp/sig/gi/wakate_ichiran.pdf`

[16] 飯塚スマートフォンアプリコンテスト 2016 結果, `http://e-zuka.info/2016/resurt.html`

[17] Yahoo Japan: Hack U 2016 福岡, `http://hacku.yahoo.co.jp/hacku2016fukuoka/`

[18] Wikipedia, the free encyclopedia: *Knight's tour*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Knight's_tour`