

## K<sub>ε</sub>Tpicによるベクトル解析の教材の作成

工学院大学・教育推進機構 長谷川 研二<sup>1</sup> (Kenji Hasegawa)  
Center for Promotion of Higher Education,  
Kogakuin University

### 1 はじめに

昨年9月の研究集会では微分積分の教材について講演を行った。時間の制約があり内容は主に重積分の教材に関するものに絞り、K<sub>ε</sub>Tpicで作成した図をスクリーン上で披露したり講究録 ([4]) に挿入した。さらに今年4月に発行した微分積分の教科書 ([3]) にも挿入した。大学の微分積分は偏微分と重積分を含むが、2変数でもグラフは3次元空間の曲面である。曲面の描写には Mathematica 等の数式処理ソフトウェアの描画機能を用いて画像ファイルを作り T<sub>E</sub>X のソースファイルにおいて `\includegraphics` で挿入することがよく行われているが、[5] で述べられているように不満な点が多々ある。K<sub>ε</sub>Tpic は数式処理ソフトにより作成されたデータを T<sub>E</sub>X 文書に図を描かせる `picture` 環境のコマンドに翻訳するパッケージであり、発表者も画像ファイルを `\includegraphics` で挿入した図と K<sub>ε</sub>Tpic による図を挿入した T<sub>E</sub>X の文書を作成したが ([1], [2]) K<sub>ε</sub>Tpic の方が鮮明な図になっていることを実感した。[3] では重積分の他に偏微分のための2変数関数のグラフである曲面等の図も K<sub>ε</sub>Tpic で作成し挿入したが、[4] にもある重積分の図は発表者が知る限りでは他の微分積分の本にはなく、累次積分および Jacobian を用いた重積分の変数変換の公式の証明の可視化に利用した。

今回の講演は微分積分の履修後に学ぶベクトル解析に関する教材について話した。大学の理工学学部では1年次に微分積分と線形代数を履修後、2年次以降に次段階の数学系科目として微分方程式、複素関数、ベクトル解析を一部の学科で履修させている。発表者が所属する工学院大学で「ベクトル解析」を科目名称としているクラスは1~3クラスで多くなく、3年程前から発表者がすべてのクラスを担当してきた。ベクトル解析はベクトル値関数の微分積分であるが、曲線上や曲面上において何故そのように計算するかを理解させることは典型的な応用先である電磁気学や流体力学と結びつけないと難しいと思う。しかし、発表者の担当クラスは流体力学に関する科目の履修前にベクトル解析を配当しているので(1年次には基礎的な物理学を全学的に履修させているとはいえ)、形式的に計算のルールを教え微分積分の復習のように問題を解かせるだけに陥りやすい。大学教育では文部科学省の指導によりアクティブラーニングを推進しようとする傾向があり、(発表者の学生時代によくあった)担当教員の話聞くだけの授業は許されなくなってきた。問題を解かせることは学生のモチベーションを高めるのに必要であるが、何のために何を計算しているかを理解させることも重要であり、微分積分と同様に教室に備えられている AV 機器を利用する教材を K<sub>ε</sub>Tpic で作成した。本論では講演で披露した教材の意味と作成上の注意点等を述べたい。

<sup>1</sup>E-mail address: ft10058@ns.kogakuin.ac.jp

## 2 線積分

長さの定義は線分に対して為され、座標平面または空間においては三平方の定理で長さが計算できることが基本で、それをもとに曲線の長さを定義するには節点が曲線上にある折れ線の長さの極限（正確に言えば実数の公理で存在が保障されている上限）で曲線の長さを定義する。折れ線の図1,2は図3にある端点がA,Bの曲線Cを近似している。図1より図2の方が節点が多いのでよりCを近似しており、節点を増やせばCに近づいていることを視覚に訴えながら指導できる。曲線の長さが折れ線の長さで近似できることより、例えば三角関数の導関数に必要な  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  の証明において、頻繁に取り入れられている円と直角三角形の面積（厳密に証明されていない円の公式を利用している）の比較でなく  $\theta$  が半径の円弧の長さであるラジアンであり円を折れ線で近似することで  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき  $\theta \leq \tan \theta$  が示せる ([3])。さらに曲線Cが  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) で媒介変数表示され  $x(t)$ ,  $y(t)$  が微分可能であれば折れ線の各線分の長さが

$$\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} (t_i - t_{i-1}) \quad (1)$$

( $(x(t_i), y(t_i))$  は折れ線の節点の座標で  $\xi_i$  は  $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$  を満たす) とほぼ等しいことで折れ線の長さが  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$  の Riemann 和にほぼ等しく分割を細かくするときの極限である定積分

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (2)$$

が曲線の長さの公式になる。

ベクトル解析では (2) 以外に曲線上の積分である線積分の計算も必要である。定積分の定義では区間を分割するが、線積分の定義では曲線の分割を行う。曲線Cを  $n-1$  個のC上の点  $P_1, \dots, P_{n-1}$  で  $n$  個の短い曲線  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (ただし  $P_0 = A, P_n = B$ ) に分割する。 $\widehat{P_{i-1}P_i}$  の長さの総和がCの長さであるが、 $f$  をC上の関数としたとき  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  から点  $Q_i$  を選び  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  の長さに  $f(Q_i)$  を掛けた  $f(Q_i)\widehat{P_{i-1}P_i}$  の総和の極限が線積分であり

$$\int_C f ds \quad (3)$$

で表す。ここで  $ds$  は線素といい分割された短い曲線  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  の長さを表す。Cが媒介変数表示されているときは変数  $t$  のベクトル値関数  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  で表すと  $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$  になり媒介変数の積分に直すときは

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (4)$$

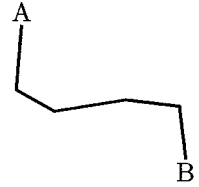


図1

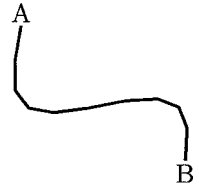


図2

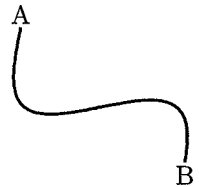
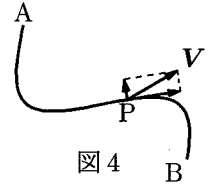


図3

で計算すればよく、(1) より  $ds$  を  $|r'(t)| dt$  に置き換えても分割の極限である積分に影響を与えないと考え (3) が (4) に変換され積分計算ができるようになる。特に曲線上のベクトル値関数  $V$  に対して曲線  $C$  に対する単位接線ベクトル  $t$  や単位法線ベクトル  $n$  との内積の線積分

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} ds \quad (5)$$

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds \quad (6)$$

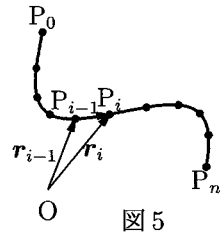


がベクトル解析において非常に重要で次節で述べる面積分と等しいことを主張する Green の定理や Stokes の定理が証明できる。  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}$  と  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  はそれぞれ  $V$  の接線方向と法線方向の成分であり図 4 を見せながら指導した。

$\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_{i-1}} = \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$  は接線と殆ど平行なので

$$\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_{i-1}} \doteq \widehat{P_{i-1}P_i} \mathbf{t}$$

になり (図 5)  $t ds$  を  $r$  の差分  $dr$  に置き換えることができ (5) は



$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (7)$$

に書き換えられる。

また曲線が媒介変数表示されると置換積分のように  $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{r}' dt$  と書けるので (7) は

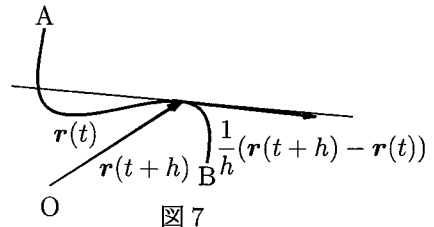
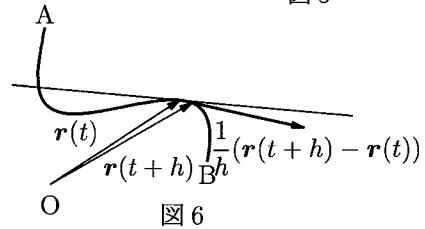
$$\int_a^b \mathbf{V} \cdot \mathbf{r}' dt \quad (8)$$

に直せるので単位ベクトル  $t$  を計算しなくても (5) の計算ができる。ここで  $\mathbf{r}'$  は  $\frac{1}{h}(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))$

の  $h \rightarrow 0$  のときの極限であり曲線に接するベクトルである。図 6,7 は  $h$  が 0 に近づくときのベクトル

$\frac{1}{h}(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))$  が曲線の接線に近づく様子を表したものである。

線積分の計算は媒介変数による定積分である (2), (4), (8) に帰着させ、後は定積分の復習になってしまうが、媒介変数表示に関係しない、線素  $ds$  を用いた (3), (5), (6) やベクトルの差分  $d\mathbf{r}$  を用いた (7) から直接意味を読み取ることがベクトル解析の応用のために必要である。



### 3 面積分

曲面は 3 つの 2 変数関数  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$ ,  $z = z(s, t)$  で媒介変数表示される. これを変数が  $s, t$  の 3 次元ベクトル  $\mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$  でも表せる. 線積分では曲線を分割するように面積分でも曲面の分割が必要であるが, 分割後の小さい曲面の形状が多様であり, 実

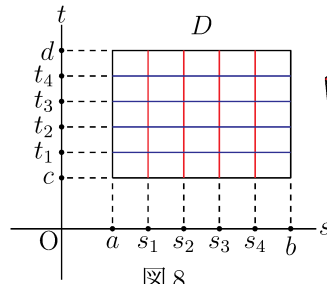


図 8

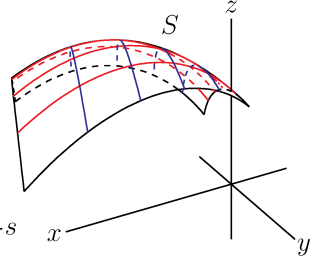


図 9

際の計算の為に媒介変数表示に対応した分割になる.  $(s, t)$  は座標が  $s, t$  の平面上的の点であり,  $(s, t)$  が動く領域を辺が座標軸に平行な長方形  $D$  とすれば図 8 のように座標軸に平行な線分で分割する.  $(s, t)$  が各線分上を動けば  $\mathbf{r}(s, t)$  の終点は曲面  $S$  上の曲線を描き, それらの曲線によって  $S$  が分割される.

まずは面積を求めてみる. 図 9 のように曲線により曲面を分割すると, 各々の小さい曲面の面積の総和であるが辺が曲がっていれば正確な面積は計算できない図 10 のように 3 つの頂点を共有する平行四辺形に置き換え, 平行四辺形の面積の総和

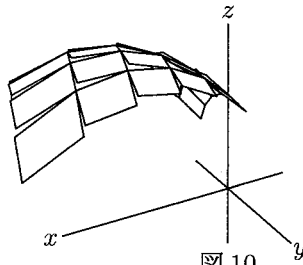


図 10

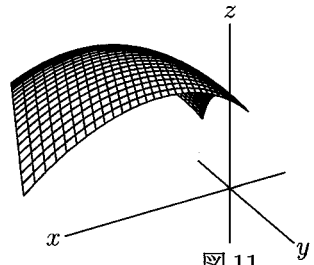


図 11

を計算する. 図 10 を見てわかるように平行四辺形の間隙があり曲面  $S$  の面積と等しいとはいえないが, 図 8 の長方形を分割する線分を増やすことにより曲面の分割が細かくなっていき, 図 11 を見ると平行四辺形に置き換えても, もとの曲面との差異が目立たなくなる.  $(\xi_{ij}, \eta_{ij})$  を図 8 において小さい長方形  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$ ,  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  の点の座標とすると 3 次元ベクトルの外積と平均値の定理により平行四辺形の面積は

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \right| (s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

にほぼ等しく  $i$  と  $j$  についての和をとると, 関数  $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right|$  の 2 変数の Riemann 和になるので  $D$  の分割を細かくすれば重積分

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right| ds dt$$

に近づき, これは  $S$  の面積に等しい. 厳密に証明するとなると平行四辺形に置き換えたことによる面積の差を評価する必要があり, 数学非専攻の理工系の学生にとっては理解しづらいが, 曲面の細分化によって面積の差がなくなっていくことが感覚的にわかってくるのではと思う.

重積分で面積を計算するだけでなく曲面上の関数  $f$  に対して分割された小さい曲面の面積とその曲面上の点における  $f$  の値の積の総和も考える．特にベクトル解析で重要なのが3次元のベクトル場  $\mathbf{V}$  と曲面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  との内積を関数としたもので Gauss の発散定理に登場する．面積分は分割された曲面の面積と内積  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  の積の総和である．曲線に対する線素  $ds$  のように分割された小さい曲面の面積を  $dS$  で表し面積要素というが、これを用いると面積分は

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9)$$

で表せる．さらにスカラー  $dS$  とベクトル  $\mathbf{n}$  の積を  $d\mathbf{S}$  で表すと (9) は

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

になる．

法線ベクトルについては曲面上の2本の曲線の接線ベクトルに直交するベクトルを探せばよい．曲面上の2本の曲線として  $\mathbf{r}(s, t)$  を  $s$  だけ動かして描く曲線と  $t$  だけ動かして描く曲線が考えられる．それぞれの接線ベクトルは  $\mathbf{r}$  を  $s$  および  $t$  による偏微分  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$  で

あり、それらに直交するベクトルとして外積  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$  がある．図12はそれを図示したものであるが曲線やベクトルを1つずつ加えた数枚の図を作り差し替えながら見せた．

$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  はベクトル場  $\mathbf{V}$  の法線方向の成分であるが図13では  $\mathbf{V}$  とその法線への射影になるベクトルを表している．また分割された曲面ごとのベクトル場の図14と法線への射影の図15も作成した．見る角度によるものであるがいずれも法線への射影の方が長く見える．これらの図より  $dS$  は分割された曲面の面積で  $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$  は図15のベクトルの長さに分割された曲面の面積の積を表す．

作図については図14,15は曲面に隠れているベクトルについては外積を法線ベクトルとして視線とのなす角が直角より小さい(内積が正)となる点におけるベクトル場を先に描き、その後、輪郭線で裏側にある部分線のみ取り出して、それらを繋げた領域を Shade で白く塗った．残りのベクトルは最後に描いた．この作図は手作業の部分が大きく、また曲面は凸形でないとうまくいかない．教材としてならばこれで十分であると思うが、立体図形なのでさまざまな方向から見た図も作成するとより効果的であろう．

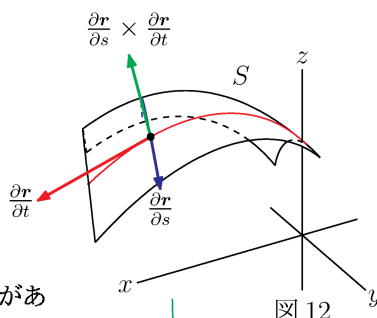


図12

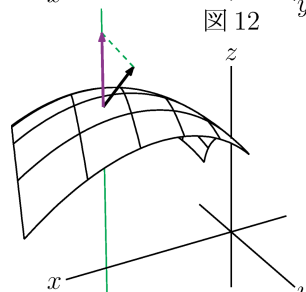


図13

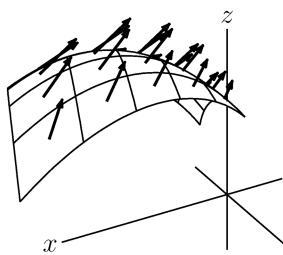


図14

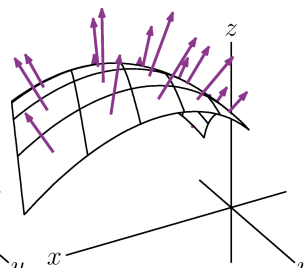


図15

## 4 体積分

体積分は3重積分のことで微分積分の本 ([3] 等) に書かれているが、時間的制約で微分積分の授業で教えることは難しく、ベクトル解析では Gauss の発散定理で体積分と面積分が等しいことがいえるのでベクトル解析の授業で教えてきた。ただし教材については領域の分割までである。図 16,17 は曲面で囲まれる領域を含む直方体の分割で領域に含まれる小さい直方体を集めた図である。分割を細かくすれば直方体の集まりは領域に近づくことが見てわかる。領域は凸形なので直方体の頂点の座標が領域を定める不等式を満たすことを条件として直方体を絞り込めばよい。

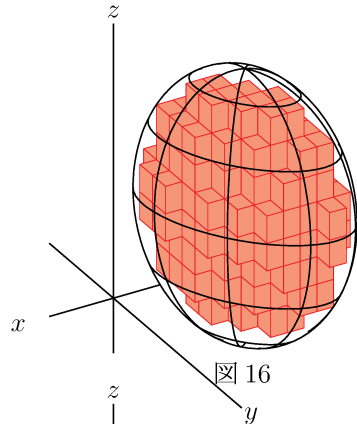


図 16

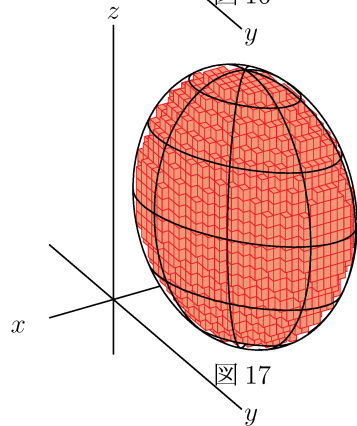


図 17

## 5 今後の展望

本論では積分の意味を理解させることを目的にした教材を紹介した。ベクトル解析は積分だけでなく偏微分で発散や回転も定義され、発散定理や Stokes の定理が導かれる。教科書に載っている従前の図を  $\text{KpTpic}$  で描き直すだけでなく、動的な要素を取り入れた斬新なものを作りたいが、発表者の現状の能力を超えている。今回の研究集会は  $\text{KpTCindy}$  に関する発表が多く題目に  $\text{KpTpic}$  を入れた講演はこの報告だけ

で周回遅れの感は否めない。発表者も  $\text{KpTCindy}$  を少し勉強したが、従来作ってきた教材の改良を  $\text{KpTCindy}$  で行うのは難しいことがあり進んでいない。 $\text{KpTpic}$  については  $\text{CASTeX}$  応用研究会の先生方によるコマンドを使わせて頂いているだけで、自分のアイデアを体現できるようなコマンドの開発も必要になってくると思う。

## 6 謝辞

中村泰之先生と金子真隆先生より今回の研究集会での発表を認めて頂き、また講演後に高遠節夫先生から  $\text{KpTpic}$  に関することを聞かせて頂きました。この場を借りて感謝の意を表します。

## 参考文献

- [1] 長谷川研二「コンピュータグラフィックによる数学系科目の授業方法」工学院大学教職課程学芸員課程年報 第 16 号 pp.12-17, 2014 年 5 月

- [2] 長谷川研二「 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ による数学教材の作成」工学院大学教職課程学芸員課程年報 第17号 pp.123–130, 2015年2月
- [3] 長谷川研二 他『理工系のための微分積分』培風館, 2016年4月
- [4] 長谷川研二「 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ による数学教材の作成」京都大学数理解析研究所講究録 1978 pp.140–149, 2015年12月
- [5]  $\text{C}\text{A}\text{S}\text{T}\epsilon\text{X}$  応用研究会『 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ で楽々 $\text{T}\epsilon\text{X}$ グラフ』イーテキスト研究所, 2011年3月