数理解析研究所講究録
第2022巻 2017年 128-134


# KETCindy と Maxima,Risa/Asir との連携

長野工業高等専門学校・一般科　小林　茂樹 (Shigeki Kobayashi)
General education,
National Institute of Technology, Nagano College
東邦大学・理学部　高遠　節夫 (Setsuo Takato)
Faculty of Science,
Toho University

## 1　はじめに

Geogebra や Cinderella に代表される動的幾何ソフト (DGS) の教育的利用が研究されている．また，Matematica 等の数式処理ソフト (CAS) を教育的に利用する研究も進められている．著者らは，TEX で挿図プリントを作成するために，Scilab などの数学ソフトウエアの出力する描画データを TEX の環境に取り込むマクロパッケージ KeTpic と，Cinderella とを連携させる KETCindy を開発してきたが，さらに Cinderella からフリーの数式処理ソフト Maxima,Risa/Asir 等を呼び出して使えるように改良してきている [2, 2, 3]．

本稿では，KETCindy を用いて Maxima,Risa/Asir を連携させて，学習者にも，教授者にも有効な Cinderella の利用法について述べる．

## 2　KETCindy と Maxima,Risa/Asir との連携

### 2.1　連携させる意義

近年，数式処理システムを利用した数学教育についての研究が進められている．その多くは Mathematica や Maple 等の商用の数式処理システムを使用したものであるが，これらは Mathematica や Maple 等の商用ソフトがインストールされている環境でないと使用できない．それに対して Maxima や Risa/Asirt はフリーであり，無償で利用できる．フリーの数式処理ソフトはユーザーインターフェース等は商用ソフトの方が優れているものの，それぞれ特長を持ち計算速度も優れているものが多い．その中で，Maxima は利用者も多く，Web 上に情報も多い． TEX への出力関数も持っている．また，Risa/Asir はグレブナー基底の計算が高速であるという特長を持っている．これらのソフトとフリーの動的幾何ソフト Cinderella と連携させることで，グラフィック環境と統一的な入力環境を有する，TEX による教材作成環境を構築することは，高い教育効果が期待できる．

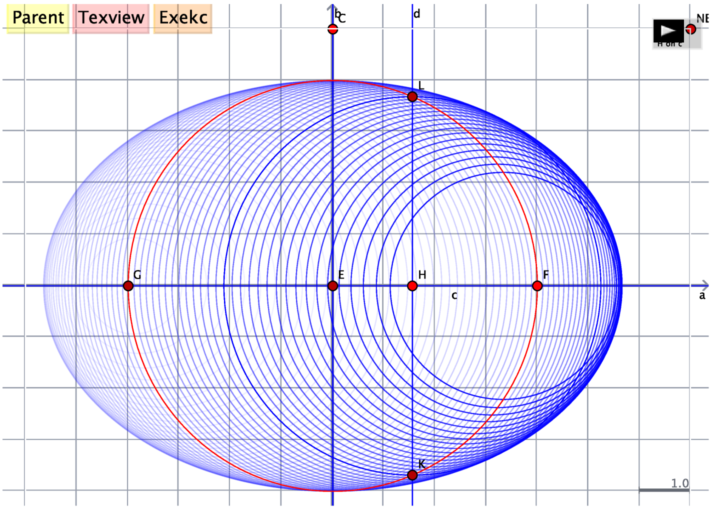
## 2.2 活用法

ここでは，KETCindy を用いて Maxima,Risa/Asir を連携させた Cinderella の活用法について，例をあげながら述べる．

### 2.2.1 包絡線を求める

問題：円 $x^2 + y^2 = b^2$（$b$ は正の定数）の $x$ 軸に垂直な弦を直径とする円の作る曲線群の包絡線の方程式を求めよ．

この様な問題を扱うとき，幾何的な条件から図形を表示することは，動的幾何ソフトの得意な分野である．Cinderella では条件通りの図形をボタンを使いながら作成して，アニメーション化までですることができる．実際に計算に入る前に，包絡線のイメージをつかむのに非常に有効である．




一方で，実際に包絡線の方程式を求めるには，微分の計算の実行や連立方程式を解くことが必要となるが，これらは Maxima を用いることで実行できる．Cinderella は優秀なスクリプト環境を持っていて，この環境で KETCindy を用いることによって，Maxima を内部で呼び出して計算を実行し，結果を Cinderella の中で使用することができる．

一般に，曲線群

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

の包絡線の方程式を求めるには

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ f_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

を解けば良い．この問題の場合は $a$ をパラメータとして，曲線群

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2 - a^2$$

を考えれば良い．ここで $b$ は与えられた円の半径である．Cinderella のスクリプト環境で次のようなスクリプトを書くことで計算することができる．

```
eq1="(x-a)^2+y^2-(b^2-a^2)";
Mxfun("1","diff",[eq1,"a"],[""]);          //<- Maximaの関数（微分）を実行
eq2=mx1;
cmdL=[
    "eq1:"+eq1+"=0",[],
    "eq2:"+eq2+"=0",[],
    "a1:solve([eq1,eq2],[x,y])",[],         //<- 連立方程式を解く
    "a2:ev([x,y],a1)",[],
    "a1::a2",[]
];
CalcbyM("ans",cmdL,[""]);                   //<- Maximaのスクリプトの実行
apply(1..length(ans),println([#,ans_#]));   //<- 結果のコンソール出力
```

ここで，

```
Mxfun("1","diff",[eq1,"a"],[""]);
```

は，Maxima の関数を実行する関数であり，Mxfun(name，式，リスト，option) という形式である．ここでは，eq1 を $a$ について微分し，その結果を mx1 に格納している．また，

```
CalcbyM("ans",cmdL,[""]);
```

は，Maxima のスクリプトを実行する関数であり，CalcbyM(name，コマンド，option) という形式である．コマンドと引数リストの繰り返しからなるリスト (例えば cmdL) を作って，一度に 実行する．結果は，コマンドリストの最後に記述した変数の値が name で指定された変数に代入される．複数の結果を戻すとき は，:: で区切って記述するとリストにして代入される．ここでは，eq1=0 と eq2=0 を $x, y$ の連立方程式として解いている．

```
apply(1..length(ans),println([#,ans_#]));
```

は確認のため，結果をコンソールに出力した部分である．結果は次のようになる．

```
[1,[[x = 2*a,y = -sqrt(b^2-2*a^2)],[x = 2*a,y = sqrt(b^2-2*a^2)]]]
[2,[2*a,-sqrt(b^2-2*a^2)]]
```

この結果を用いて，包絡線をパラメータ表示を用いて Cinderella の画面に表示することもできる．さらに，この結果から $a$ を消去することにより，包絡線の方程式を得ることができる．そのために，Maxima ではなく Risa/Asir 等を用いることも可能である．ここでは，Risa/Asir を用いて，グレブナー基底を求めることで，$a$ を消去してみる．これは次のスクリプトを書くことで実行できる．

```
cmdL=[
    "load",["'gr'"],                    //<- グレブナー基底のパッケージをロード
    "Eq1="+eq1,[],
    "Eq2="+eq2,[],
    "G=nd_gr",["[Eq1,Eq2],[a,x,y]",0,2],    //<- グレブナー基底を求める.
"G[0]::G[1]",[]
];
CalcbyA("ansg",cmdL,[""]);          //<- Risa/Asir のスクリプトの実行
println(ansg);                      //<- 結果のコンソール出力
Mxtex("1",ansg_1);                  //<- TeX 書式にする
Expr(M,"e",tx1+"=0");               //<- TeX 書式の文字列の表示
```

ここで,

```
CalcbyM("ans",cmdL,[""]);
```

は，Risa/Asir のスクリプトを実行する関数であり，CalcbyA(name，コマンド，option) という形式である．コマンドと引数リストの繰り返しからなるリスト (例えば cmdL) を作って，一度に 実行する． 結果は，コマンドリストの最後に記述した変数の値が name で指定された変数に代入される．複数の結果を戻すとき は，:: で区切って記述するとリストにして代入される．

Maxima を呼ぶときと同様の形式なので，Cinderella 上では利用者は異なるソフトを動かしているような感覚なく利用できる．また，異なるソフトの結果をそのまま Cinderella 上で渡すことができる．

```
println(ansg_1);
```

は確認のため，結果をコンソールに出力した部分である．結果は次のようになる．

```
[-x^2-2*y^2+2*b^2,-x+2*a]
```

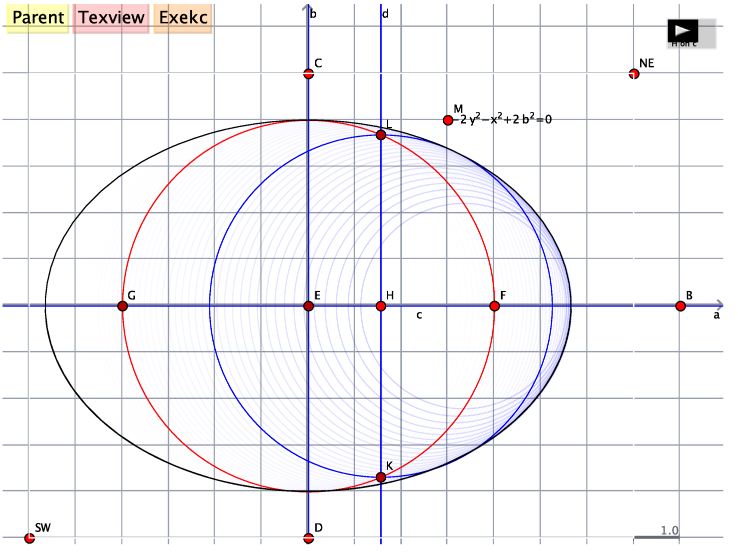
結果のリストの第 1 成分が，$x, y, a$ のうち $a$ が消去された多項式になっている．

```
Mxtex("1",ansg_1);
```

Mxtex(name, 式) は式を TEX 書式にする命令である．Maxima の持つ命令を内部では用いている．ここでは，ansg_1 を TEX 書式にして，その結果を tx1 に格納している．

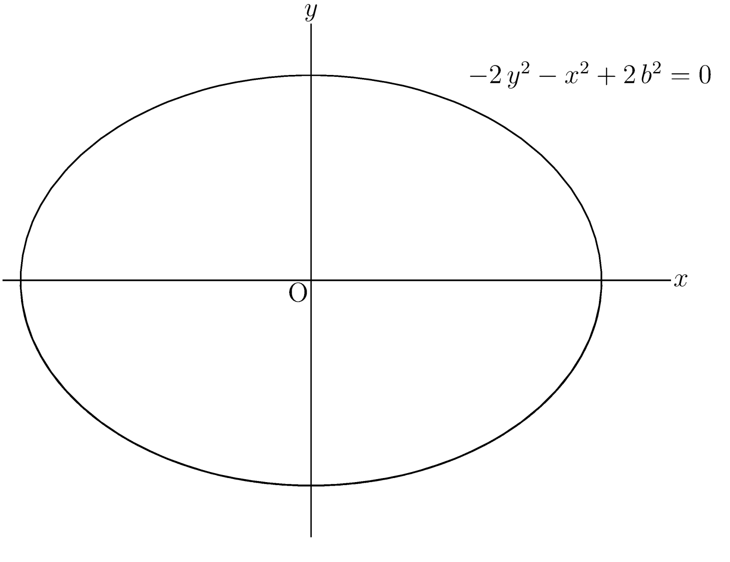
```
Expr(M,"e",tx1+"=0");
```

は TEX 書式の文字列を画面に表示する KETCindy の命令である．




ここでは，求められた包絡線の方程式 $-x^2-2y^2+2b^2=0$ から，陰関数表示された曲線を表示する K<sub></sub>ETCindy の命令を用いて描画した曲線も表示している．$b$ のままで処理をしているので，最初の円の大きさを変えた場合でも包絡線の方程式の $b$ を対応させて変化させることができるので表示がスムーズである．

この曲線と方程式を，Texview ボタンと Exekc ボタンを押すことで，包絡線とその方程式を TEX 書式にしたものが次の通りであり，これは様々な TEX 文書で利用できる．




曲線群を変える場合は eq1 を変更すれば良い．このように，Cinderella を用いて，自分自身で点を動かしたり，アニメーションを見ることで，イメージをつかみ，数式処理を用いて結果を確認することができる．複数のソフトを内部では動かしているが，操作は統一されているので，扱いやすいことがわかる．

### 2.2.2 有限体の相反構造

Risa/Asir は有限体の演算が利用できる．ここでは数学教育と直接関係はないが，工学部の学部レベルの演習に使用する例をあげる．

$q$ は素数であるとし，$\mathbb{F}_{q^m}$ を位数が $q^m$ である有限体とする．このとき，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ を $\mathbb{F}_{q^m}$ の元であるとすると次の性質が成り立つことが知られている．

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + \alpha_1^{-1} \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \alpha_2^{-1} \\ &\cdots \end{aligned}$$

としていくと，コアを形成するかまたは 0 に収束する．(有限体の相反構造)

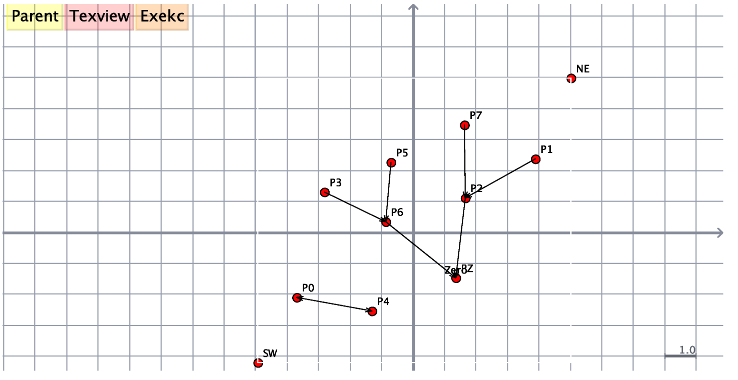
この構造は，$q$ および $m$ の値によって色々に変化するが，その構造図を描いてみるのは，有限体を学習するときの演習問題になる．有限体の演算を行うシステム，またはライブラリーは多く，演算のプログラムを書くことは容易である．しかし，その構造を動的に図示するプログラムを書くことはそれほど容易ではない．しかし，動的幾何のソフトと数式処理を組み合わせることで，比較的容易に実現できる．Cinderella 上で Risa/Asir を呼び出して実行した例を示す．$q=3$，$m=2$，原始多項式を $x^2+x+2$ としたものである．

```
eq="x^2+x+2";
cmdL=[
    "load",[Dq+"fff"+Dq],      //<- 有限体のパッケージをロード
    "setmod_ff",["3","2"],     //<- 有限体をセット
    "V=newvect",["9"],
    "for(N=1~N<=8~N++){",[],
        "A = ptosfp",["N"],
        "B = 1/A",[],
        "C = A+B",[],
        "V[N]=[A,C]",[],
    "}",[],
    "V::A",[];
];
CalcbyA("ans",cmdL,[""]);      //<- Risa/Asir のスクリプトを実行
ans=apply(ans,replace(#,"@_","P"));
ans_1=replace(ans_1,",0",",PZ");
ans_1=replace(ans_1,[["[ 0 ",""],[" ]",""]]);
ansv=tokenize(ans_1," ");
println(ansv);
apply(ansv,Arrowdata(parse(#)));
```

Risa/Asir では有限体の元のべき表現が`@_n`のような形式で表されるので，これを点 P$n$ と対応させ，

```
apply(ansv,Arrowdata(parse(#)));
```

で矢印で結ぶと次のような図ができる．それぞれの点は自由に動かすことができるので，構造が調べやすい．




## 3　まとめと今後の課題

今回は，KETCindy を用いて Maxima,Risa/Asir を連携させて，学習者にも，教授者にも有効な Cinderella の利用法についていくつかの例をあげて，その有効性を示した．動的幾何の良さを生かし，複数の数式処理ソフトを内部で処理しながら統一的に扱うことは，学習者にも，教授者にも有効であり，個々のフリーの数式処理ソフトは得意分野，得意でない分野をもっているが，それらを組み合わせていくことで，有効な教材作成環境が構築できる可能性があることがわかった．この環境は，全てフリーのソフトで構成されている．それぞれのソフトはそれぞれに進化していくが，KETCindy によって Cinderella と結びついている状態なので，それらの進化に柔軟に対応していくことができる利点を持っている．

今後の課題としては，今回紹介した以外の数式処理システムに対応していくこと，様々な OS に対応するように整備すること，それらの効果的な活用法を開発することである．

## 参考文献

[1] 高遠節夫，KeTCindy 開発チーム，KeTCindy の開発について, 数理解析研究所講究録 1978, pp. 173–182, 2015

[2] Takato S.,What is and How to Use KeTCindy—Linkage Between Dynamic Geometry Software and LaTeX Graphics Capabilities— , Lecture Notes in Computer Science 9725, Springer, pp.371–279, 2016

[3] Kobayashi S., Takato S.,Cooperation of KeTCindy and Computer Algebra System, Lecture Notes in Computer Science 9725, Springer, pp.351–358, 2016