

## 時間差通勤を考慮したボトルネックモデル\*

### On a bottleneck model with different work start time

名古屋大学大学院工学研究科 機械理工学専攻 林 和弘<sup>†</sup>, 田地 宏一<sup>‡</sup>

Kazuhiro Hayashi, Kouichi Taji

Department of Mechanical Science and Engineering, Nagoya University

## 1 はじめに

本論文では、ボトルネックモデルを取り上げる。ボトルネックモデルは、経路ごとに容量（単位時間当たりの通過可能流量の上限）を持つボトルネックを設定するモデルである。容量を超える流量がボトルネックに到着したとき、容量以上の流量はボトルネックを通過できず、その手前で待つことになる。このモデルでは、交通流量の容量超過に伴う待ち行列の発生により、負の外部性を引き起こす交通渋滞を扱うことができる [10][12]。

ボトルネックモデルは、Vickrey[11], Hendricksonら [7] によって独立に提唱され、その後、Smith[9], Daganzo[4] らの連続時間均衡モデルの解析、赤松、桑原ら [1][2][8] の動的ネットワークの解析、数値解を目的とした Akamatsu, Wada, Hayashi[3] の線形相補性問題への定式化、複数ボトルネックモデルへの拡張など多数研究されてきた。我々もこれまでに単一ボトルネックモデルについて Akamatsuら [3] の方法を時間差通勤のあるモデルに拡張、時間別料金の導入によるシステム最適化の実現、複数経路への拡張などを行った [5][6]。そこで、離散時間での数値実験の結果、時間差通勤について待ち時間が単調減少にならないことが観測された。これは離散時間での数値解であることが原因と考えられる問題点である。

本論文では、待ち行列モデルに基づいて時間差通勤のあるモデルと複数経路を持つモデルの厳密解を求めることを考える。本論文の構成は、以下の通りである。まず、2節で単一ボトルネックモデルの説明とそれにおける利用者均衡問題の定式化を行う。また、スケジューリングコストを仮定したときの厳密解を導出する。さらに、交通渋滞緩和のための方法として時間別料金と時間差通勤の2つの方法を提案し、単一ボトルネックモデルを時間差通勤（始業時間は2つ）がある場合に拡張する。3節では、単一始業時間の場合について複数の経路を持つボトルネックモデルに拡張する。4節では、数値例を用いて利用者均衡の流量と時間別料金、時間差通勤の効果を示す。また、Akamatsuら [3] のモデルでの数値実験の結果と比較する。最後に、5節でまとめと今後の課題を示す。

\*研究集会当日と内容を少し変更した。

<sup>†</sup>E-mail: k.hayashi@nuem.nagoya-u.ac.jp

<sup>‡</sup>E-mail: taji@nuem.nagoya-u.ac.jp

## 2 単一ボトルネックモデル

本節では、図1に示すようなボトルネックを用いた一起点・一終点のモデル（単一ボトルネックモデル）を扱う。単一ボトルネックモデルは、1個の起点ノード（ノード1）と1個の終点ノード（ノード0）からなり、全ての利用者はボトルネックとなる唯一の経路を通過して出発地1から目的地0へ向かうモデルである。ボトルネックには、単位時間当たりの通過可能流量の上限 $\mu$ （これを容量と呼ぶ）を持ち、単位時間当たりの流入量が容量を超えたときに待ちが発生する。渋滞とそれによる待ち時間は待ち行列（Point queue）モデルで表されるとする。また、ノード1と0の間の待ち時間が発生しない場合（自由流）での旅行時間は $c$ で与えられるとする。

十分長い計画時間を考え、その間に起点ノード1から、流量 $Q$ の利用者が出発し、ボトルネックを通過して終点0に到着するとする。ここで、流量 $Q$ は既知の定数である。それぞれの利用者は自分の不効用が最小になるように出発時刻を選択する。不効用とは、旅行時間（ボトルネックでの待ち時間と自由流のときの旅行時間の和）、実際の到着時刻と目標到着時刻のずれに関するスケジュールコストからなる関数である。さらに、すべての利用者は同一であると仮定する。すなわち、すべての利用者は同一の目標到着時刻、スケジュールコストおよび不効用関数を持つ。スケジュールコストは目標到着時刻で最小値0の値をとる非負の単峰関数で、傾きが $-1$ 以下にならないものと仮定する。

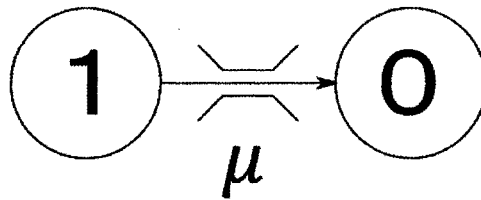


図 1: 単一ボトルネックモデル

本節では、このモデルの上で、利用者の出発時刻選択問題を利用者均衡（ユーザ均衡）で定式化する。利用者均衡の概念の基本的な定義は、「利用者の誰もが自分の選択している選択を単独で変更する動機を持たない状態」である。具体的には、全ての利用者が自分の不効用（評価関数）が最小となるように選択を行っている状態のことである。すなわち、「同一の評価関数を持つ利用者間では、実際に利用されている出発時刻での評価関数の値はみな等しく、その評価関数の値は利用されていない出発時刻の評価関数の値以下の状態」である。以下で、待ち行列モデルを説明し、その利用者均衡解について解析する。

### 2.1 待ち行列モデルとその利用者均衡解

本節では、まず待ち行列モデルを説明し、その利用者均衡解を導出する。次節以降で、その時間差通勤のモデルと複数の経路がある場合への拡張を述べる。

まず、ボトルネックでの待ち時間について考える。待ち行列モデルは、渋滞現象を最も簡単に表現するモデルである。いま、起点1を時刻 $t$ までに出発する（ボトルネックへ時刻 $t$ までに到着する）累積流量を $A(t)$ 、ボトルネックから時刻 $t$ までに出発する累積流量を $D(t)$ と書く。このとき、時刻 $t$ の待ち行列量 $E(t)$ は

$$\begin{aligned} E(t) &= A(t) - D(t) \\ e(t) &\equiv \dot{E}(t) = \lambda(t) - x(t) \end{aligned} \quad (1)$$

と与えられる。ここで、2行目は1行目の時間 $t$ での微分表現であり、 $\dot{E}(t)$ は待ち行列量 $E(t)$ の出発時刻 $t$ に関する微分を表す。待ち行列モデルでは、このボトルネックへの流入率 $\lambda(t)$ と流出交通流率 $x(t)$ は次のように与えられる。

$$\lambda(t) = \dot{A}(t) \quad (2)$$

$$x(t) = \dot{D}(t) = \begin{cases} \mu & \text{if } E(t) > 0 \\ \min[\lambda(t), \mu] & \text{if } E(t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

さらに、FIFO（First In First Out）の原則により、待ち時間 $d(t)$ は待ち行列流量をボトルネックの容量で割ったものとして表される：

$$d(t) = \frac{E(t)}{\mu} \quad (4)$$

次に、利用者均衡での出発時刻選択の条件について考える。本論文では、利用者が出発時刻選択の指標となる不効用は旅行時間とスケジュールコストの和であると仮定する。スケジュールコストとは、実際の到着時刻 $s$ と目標到着時刻 $t_w$ の差によって決まるコストであり、関数 $p(s - t_w)$ で与えられる。ここで、起点1を時刻 $t$ に出発した利用者の不効用を $v(t)$ 、旅行時間を $\pi(t) = d(t) + c$ と表すこととすれば $s = t + \pi(t)$ となり、以下の通りとなる。

$$v(t) \equiv \pi(t) + p(t + \pi(t) - t_w) \quad (5)$$

利用者均衡では、不効用が最小とならない出発時刻には利用者が存在しないので、均衡状態での起点1の利用者の不効用を $\rho (= \min_t v(t))$ とすれば、すべての利用者の不効用は

$$v(t) = \rho \quad (6)$$

となる。

#### 仮定1

最初の利用者がボトルネックに到着してから、最後の利用者がボトルネックから出発するまで、ボトルネックから出発する利用者の割合は常に容量 $\mu$ であると仮定する。最初の利用者の起点1の出発時刻を $t_0$ 、最後の利用者の起点1の出発時刻を $t_f$ とすると以下で表される。

$$x(t) = \mu \quad \text{if } t_0 \leq t \leq t_f \quad (7)$$

$E(t) > 0$  のときは  $x(t) = \mu$  である。  $E(t) = 0$  のときは  $x(t)$  が変化しても不効用  $v(t)$  は変化しない。 利用者均衡の定義から利用者の存在する時刻  $t$  ( $t_0 \leq t \leq t_f$ ) での不効用  $v(t)$  は最小であるので、不効用が変化しない範囲で利用者は増加すると考えられる。 ゆえに、この仮定は自然である。

## 仮定 2

スケジュールコスト  $p(s - t_w)$  は

$$p(t) = \begin{cases} \alpha t & \text{if } t < 0 \\ \beta t & \text{if } t \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

で定義される関数  $p$  を用いて表されるような  $s - t_w$  の一次式であると仮定する。 ここで、 $\alpha$  は  $\alpha > -1$  を満たす負の定数、 $\beta$  は正の定数である。

上記の仮定の下で、利用者均衡での  $A(t)$  を導出する。 利用者  $i, j$  について考える。 起点 1 からの出発時刻をそれぞれ  $t_i, t_j$  ( $t_0 \leq t_i \leq t_j \leq t_f$ ) とする。 終点 0 への到着時刻はそれぞれ  $t_i + \pi(t_i), t_j + \pi(t_j)$  となる。 利用者均衡ではすべての利用者の不効用が等しいので、

$$v(t_i) = v(t_j) \quad \forall t_0 \leq t_i \leq t_j \leq t_f \quad (9)$$

である。(5) 式より、

$$\pi(t_i) + p(t_i + \pi(t_i) - t_w) = \pi(t_j) + p(t_j + \pi(t_j) - t_w)$$

となる。 $\pi(t) = d(t) + c$  を用いると

$$d(t_j) - d(t_i) = -\{p(t_j + d(t_j) + c - t_w) - p(t_i + d(t_i) + c - t_w)\}$$

となる。仮定 1 より、

$$D(t) = \mu(t - t_0) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_f \quad (10)$$

となることと、(1)(4) 式を用いると

$$\frac{A(t_j) - A(t_i)}{\mu} - (t_j - t_i) = -\{p(t_j + d(t_j) + c - t_w) - p(t_i + d(t_i) + c - t_w)\} \quad (11)$$

となる。さらに、利用者  $i, j$  が共に目標到着時刻より早く終点 0 に到着する場合、仮定 2 より (11) 式の右辺は

$$\begin{aligned} & -\{p(t_j + d(t_j) + c - t_w) - p(t_i + d(t_i) + c - t_w)\} \\ &= -\alpha(t_j - t_i + d(t_j) - d(t_i)) \\ &= -\alpha(t_j - t_i) - \alpha \frac{(A(t_j) - D(t_j)) - (A(t_i) - D(t_i))}{\mu} \\ &= -\alpha \frac{A(t_j) - A(t_i)}{\mu} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。したがって、

$$\frac{A(t_j) - A(t_i)}{t_j - t_i} = \frac{\mu}{1 + \alpha} \quad (13)$$

となる。利用者  $i, j$  が共に目標到着時刻より遅く終点 0 に到着する場合も同様にして

$$\frac{A(t_j) - A(t_i)}{t_j - t_i} = \frac{\mu}{1 + \beta} \quad (14)$$

が得られる。極限 ( $t_j \rightarrow t_i$ ) をとり、まとめると  $A(t)$  の傾き  $\dot{A}(t)$  は以下の通りとなる。

$$\dot{A}(t) = \begin{cases} \frac{\mu}{1 + \alpha} & \text{if } t + d(t) + c - t_w < 0 \\ \frac{\mu}{1 + \beta} & \text{if } t + d(t) + c - t_w \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

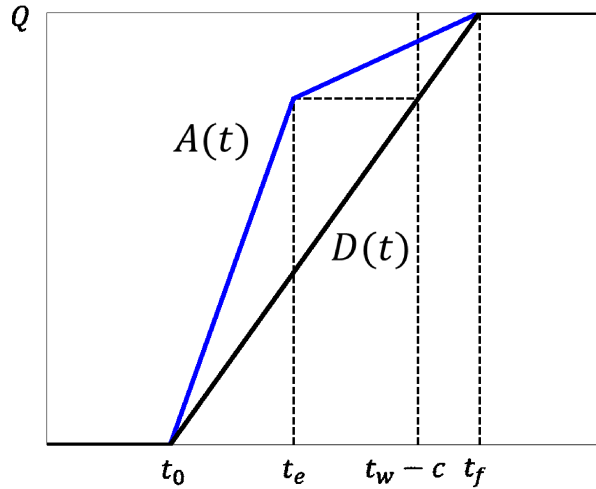


図 2: 利用者均衡の累積流量

上記より、時刻  $t_w$  に終点 0 に到着する利用者を境にして  $A(t)$  の傾きが変化する。その利用者の起点 1 の出発時刻を  $t_e$  とおくと、ボトルネックを出発する時刻は  $t_w - c$  であることから以下が成り立つ。

$$A(t_e) = D(t_w - c) \quad (16)$$

$t_0 \leq t \leq t_e$  では

$$\dot{A}(t) = \frac{\mu}{1 + \alpha}$$

であり、仮定 1 より、 $D(t_w - c) = \mu(t_w - c - t_0)$  なので、

$$\frac{\mu}{1 + \alpha}(t_e - t_0) = \mu(t_w - c - t_0)$$

となる。これを整理すると

$$t_e = t_0 + (1 + \alpha)(t_w - c - t_0) \quad (17)$$

が得られる。次に  $t_0, t_f$  を導出する。時刻  $t_0$  から  $t_f$  の間に全利用者  $Q$  が起点 1 を出発するので  $A(t), D(t)$  に着目すると以下が成り立つ。

$$\frac{\mu}{1 + \alpha}(t_e - t_0) + \frac{\mu}{1 + \beta}(t_f - t_e) = Q \quad (18)$$

$$\mu(t_f - t_0) = Q \quad (19)$$

これを解くと

$$t_0 = t_w - c + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \frac{Q}{\mu} \quad (20)$$

$$t_f = t_w - c + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{Q}{\mu} \quad (21)$$

となり、 $t_0, t_f$  が得られた。このとき、

$$p(t_0 + c - t_w) = p(t_f + c - t_w) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \frac{Q}{\mu} \quad (22)$$

となる。これは、利用者均衡において最初の利用者と最後の利用者の待ち時間が 0 であるということを考慮すると自然な結果である。

## 2.2 時間別料金

時間別料金とは、利用者の不効用関数に時間ごとの料金によるコストを加えることによって渋滞を緩和する方法である [7][13]。本節では、図 1 に示すような単一ボトルネットワークモデルにおいて、渋滞の発生しない交通量配分を利用者均衡状態において達成する料金スキームを提示する。すなわち、出発時刻  $t$  ごとの料金  $R(t)$  を利用者の不効用に加えることで、利用者均衡配分での  $A(t)$  と  $D(t)$  を一致させることを考える。そのためには、 $\dot{A}(t) = \mu$  ( $t_0 \leq t \leq t_f$ ) となるように、不効用関数を変更すればよい。不効用関数を  $v(t) \leftarrow \pi(t) + p(t + \pi(t) - t_w) + R(t)$  とおいて、上記と同様に  $A(t)$  の傾きを計算すると

$$\frac{A(t_j) - A(t_i)}{t_j - t_i} = \mu + \mu \frac{-\{p(t_j + \pi(t_j) - t_w) + R(t_j)\} + \{p(t_i + \pi(t_i) - t_w) + R(t_i)\}}{t_j - t_i} \quad (23)$$

となり、 $\dot{A}(t) = \mu$  ( $t_0 \leq t \leq t_f$ ) とするためには、定数  $C$  を用いて

$$p(t + \pi(t) - t_w) + R(t) = C \quad \forall t_0 \leq t \leq t_f \quad (24)$$

とすればよい。このときの  $R(t)$  は

$$R(t) = \begin{cases} -p(t + \pi(t) - t_w) + C & \text{if } t_0 \leq t \leq t_f \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

となる。  $R(t)$  が連続になるように考慮すると (22) 式より  $C = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \frac{Q}{\mu}$  となる。また、待ち時間が発生しないような均衡になることを考えているので、  $d(t) \equiv 0$  を仮定すると  $p(t+\pi(t)-t_w) = p(t+c-t_w)$  とできる。この  $R(t)$  は、図3の破線で示される待ち時間が0のときのスケジュールコストに対して、実線で表され、一点鎖線で示される  $p(t+c-t_w)+R(t)$  が利用者が存在する時刻で一定で最小になるようにする。このとき、  $A(t)$  と  $D(t)$  は一致する (図4)。また、この状態は待ち時間の総和が0で、かつ、(22) 式よりスケジュールコストの総和が最小なので、システム最適 (不効用の総和が最小) となる。

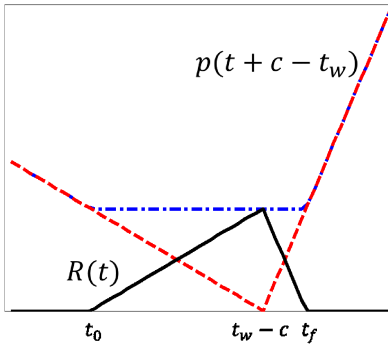


図 3: 時間別料金

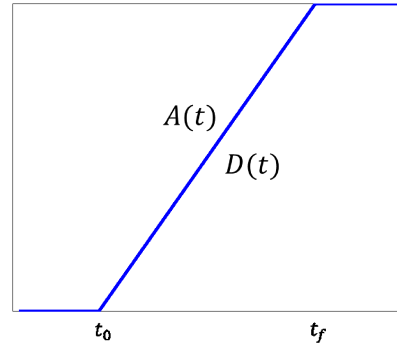


図 4: 時間別料金導入後の累積流量

### 2.3 時間差通勤への拡張

時間差通勤とは始業時間をずらすことによって、通勤のタイミングをずらし、渋滞を緩和するという方法である [7]。前節までは、すべての利用者が同じ目標到着時刻を持っていた。そこで、利用者ごとに異なる目標到着時刻を設定することで渋滞の緩和を目指す。ここでは利用者を2つのグループに分け、それぞれのグループが異なる目標到着時刻を持つ場合を考える。このとき、ボトルネックでの待ち時間は2つのグループの和で計算し、不効用関数、利用者均衡の条件はそれぞれのグループごとで計算すればよい。それぞれのグループを、グループ  $a, b$  とおき、それぞれの流量を  $Q_a, Q_b$  ( $Q_a + Q_b = Q$ )、それぞれの目標到着時刻を  $t_w^a, t_w^b$  ( $t_w^a < t_w^b$ ) とする。目標到着時刻の早いグループ  $a$  の利用者の方が早く出発するとすれば、上記とほぼ同様の議論ができる。ここで注意しなければならないのは、目標到着時刻が2つ存在するので  $A(t)$  の傾きが変化する点が2つ以上存在する可能性があることである。目標到着時刻が時刻  $t$  までの利用者の累積流量を  $W(t)$  で表すと、時刻  $t$  までにボトルネックを出発することが目標となる利用者の累積流量は  $W(t+c)$  と書ける。  $A(t)$  の傾きは目標到着時刻に到着する利用者やグループの変わり目を境に変化する可能性があるが、その利用者がどこに存在するかは  $D(t)$  と  $W(t+c)$  の交点と関係がある (接点は含まない)。

$D(t)$  と  $W(t+c)$  の交点が1つの場合はその交点の  $t$  (必ず  $t_w^a$  か  $t_w^b$  になる) を  $t_w$  とすれば、目標到着時刻が  $t_w$  の1つだけであった場合とまったく同じ議論になる。これは2つ

のグループの目標時刻の差が小さかったり、片側のグループの流量が相対的にかなり小さかったりした場合、渋滞の緩和ができていないことがわかる。以下では  $D(t)$  と  $W(t+c)$  の交点が2つ以上（接点は含まないので必ず3つになる）の場合について考える。2つのグループの目標到着時刻の差が大きく、グループ  $a, b$  の流量が完全に分離して、仮定1を満たさない場合は、グループ  $a, b$  をそれぞれ独立に考えることができるので、目標到着時刻が  $t_w^a$  の1つだけの場合と  $t_w^b$  の1つだけの場合を考えればよい。

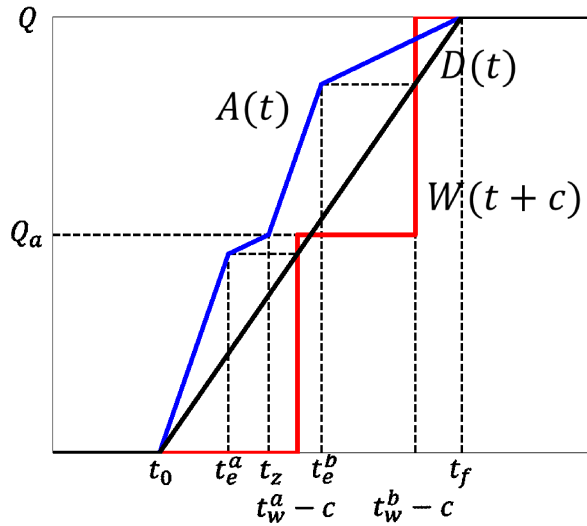


図 5: 時間差通勤での利用者均衡の累積流量

$D(t)$  と  $W(t+c)$  の交点が3つの場合（図5），グループ  $a, b$  共に，目標到着時刻に到着する利用者が存在し，その利用者を境に  $A(t)$  の傾きが変化する．その利用者の起点1の出発時刻をそれぞれ  $t_e^a, t_e^b$  とおく．ボトルネックを出発する時刻はそれぞれ  $t_w^a - c, t_w^b - c$  となる．また，その間ではグループ  $a$  の利用者は目標到着時刻より遅く着くが，グループ  $b$  の利用者は目標到着時刻より早く着く状態になるので，グループの変わり目でも  $A(t)$  の傾きが変化する．グループ  $a$  の最後の利用者の起点1の出発時刻を  $t_z$  とおく．すると以下が成り立つ．

$$A(t_e^a) = D(t_w^a - c) \quad (26)$$

$$A(t_z) = Q_a \quad (27)$$

$$A(t_e^b) = D(t_w^b - c) \quad (28)$$

$t_0 \leq t \leq t_e^a$  では

$$\dot{A}(t) = \frac{\mu}{1 + \alpha}$$

であり，仮定1より， $D(t_w^a - c) = \mu(t_w^a - c - t_0)$  なので，

$$\frac{\mu}{1 + \alpha}(t_e^a - t_0) = \mu(t_w^a - c - t_0)$$



となる。これを整理すると

$$t_e^a = t_0 + (1 + \alpha)(t_w^a - c - t_0) \quad (29)$$

が得られる。  $t_e^a \leq t \leq t_z$  では

$$\dot{A}(t) = \frac{\mu}{1 + \beta}$$

なので、

$$\frac{\mu}{1 + \beta}(t_z - t_e^a) = Q_a - \mu(t_w^a - c - t_0)$$

となる。これを整理すると

$$t_z = t_e^a + (1 + \beta)\frac{Q_a}{\mu} - (1 + \beta)(t_w^a - c - t_0) \quad (30)$$

が得られる。  $t_z \leq t \leq t_e^b$  では

$$\dot{A}(t) = \frac{\mu}{1 + \alpha}$$

なので、

$$\frac{\mu}{1 + \alpha}(t_e^b - t_z) = \mu(t_w^b - c - t_0) - Q_a$$

となる。これを整理すると

$$t_e^b = t_z + (1 + \alpha)(t_w^b - c - t_0) - (1 + \alpha)\frac{Q_a}{\mu} \quad (31)$$

が得られる。次に  $t_0, t_f$  を導出する。時刻  $t_0$  から  $t_f$  の間に全利用者  $Q$  が起点 1 を出発するので  $A(t), D(t)$  に着目すると以下が成り立つ。

$$\frac{\mu}{1 + \alpha}\{(t_e^a - t_0) + (t_e^b - t_z)\} + \frac{\mu}{1 + \beta}\{(t_z - t_e^a) + (t_f - t_e^b)\} = Q \quad (32)$$

$$\mu(t_f - t_0) = Q \quad (33)$$

これを解くと

$$t_0 = \frac{t_w^a + t_w^b}{2} - c - \frac{Q_a}{2\mu} + \frac{\beta}{2(\alpha - \beta)}\frac{Q}{\mu} \quad (34)$$

$$t_f = \frac{t_w^a + t_w^b}{2} - c - \frac{Q_a}{2\mu} + \frac{2\alpha - \beta}{2(\alpha - \beta)}\frac{Q}{\mu} \quad (35)$$

となり、 $t_0, t_f$  が得られた。最後に、 $D(t)$  と  $W(t+c)$  の交点が 3 つになる必要十分条件について考える。図 5 より、 $D(t)$  と  $W(t+c)$  の交点が 3 つになるには

$$D(t_w^a - c) \leq Q_a \leq D(t_w^b - c) \quad (36)$$

であり、仮定 1 より

$$\mu(t_w^a - c - t_0) \leq Q_a \leq \mu(t_w^b - c - t_0) \quad (37)$$

となる。これに (34) 式を代入すると、求める必要十分条件は (38) 式の通りとなる。

$$\mu(t_w^a - t_w^b) - \frac{\beta}{\alpha - \beta}Q \leq Q_a \leq -\mu(t_w^a - t_w^b) - \frac{\beta}{\alpha - \beta}Q \quad (38)$$

### 3 複数経路のボトルネックモデルへの拡張

本節では、図6に示すようなボトルネックを用いた  $m$  個の経路を持つ一起点・一終点のモデルを扱う。このボトルネックモデルは、1個の起点ノード（ノード1）と1個の終点ノード（ノード0）からなり、全ての利用者はボトルネックとなる  $m$  個の経路のうちどれかを選択して出発地1から目的地0へ向かうモデルである。上の経路から順番にルート1からルート  $m$  とする。ルート  $k$  ( $k$  は  $1 \leq k \leq m$  を満たす整数) のボトルネックは、容量  $\mu_k$  を持つ。また、ルート  $k$  の自由流での旅行時間は  $c_k$  で与えられるとする。

十分長い計画時間を考え、その間に起点ノード1から、流量  $Q$  の利用者が出発し、ボトルネックを通して終点0に到着するとする。ここで、流量  $Q$  は既知の定数である。それぞれの利用者は自分の不効用が最小になるように経路と出発時刻を選択する。すべての利用者は同一であると仮定する。すなわち、すべての利用者は同一の目標到着時刻、スケジュールコストおよび不効用関数を持つ。

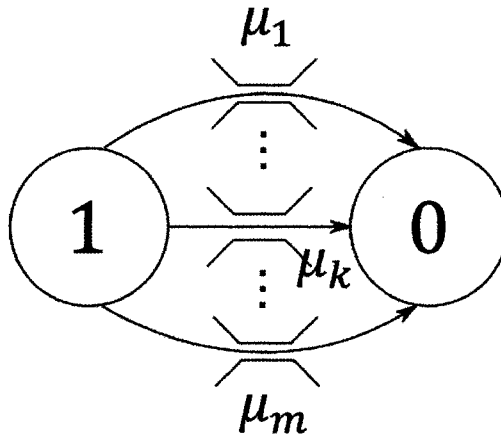


図 6: 複数経路のボトルネックモデル

本節では、このモデルの上で、利用者の経路・出発時刻選択問題を利用者均衡（ユーザ均衡）で解析する。

#### 3.1 複数経路への拡張

前節で述べた単一ボトルネックでの均衡解を複数経路へ拡張する。ボトルネックでの渋滞（待ち時間）の状況はルートごとに独立して考えられるので、単一ボトルネックのときと完全に同様である。ルート  $k$  について以下の通りである。

$$\begin{aligned}
E_k(t) &= A_k(t) - D_k(t) \\
e_k(t) &\equiv \dot{E}_k(t) = \lambda_k(t) - x_k(t) \\
\lambda_k(t) &= \dot{A}_k(t) \\
x_k(t) &= \dot{D}_k(t) = \begin{cases} \mu_k & \text{if } E_k(t) > 0 \\ \min[\lambda_k(t), \mu_k] & \text{if } E_k(t) = 0 \end{cases} \\
d_k(t) &= \frac{E_k(t)}{\mu_k}
\end{aligned} \tag{39}$$

利用者均衡での出発時刻選択の条件は、起点 1 を時刻  $t$  に出発してルート  $k$  を通る利用者の不効用を  $v_k(t)$ 、旅行時間を  $\pi_k(t) = d_k(t) + c_k$  と表すこととすれば、以下の通りとなる。

$$v_k(t) \equiv \pi_k(t) + p(t + \pi_k(t) - t_w) \tag{40}$$

利用者均衡では、不効用が最小とならない出発時刻には利用者が存在しないので、均衡状態での起点 1 の利用者の不効用を  $\rho (= \min_{t,k} v_k(t))$  とすれば、すべての利用者の不効用は

$$v_k(t) = \rho \tag{41}$$

となる。ここで、 $\rho$  は全てのルートで共通であることに注意したい。

複数経路のモデルでは、ルート  $k$  を通る利用者の流量  $Q_k$  を求める必要がある。どのルートでも最初の利用者と最後の利用者の待ち時間が 0 であるということを考慮すると、利用者が存在するルート  $k$  では、最初の利用者と最後の利用者それぞれの起点 1 の出発時刻  $t_0^k, t_f^k$  について以下が成り立つ。

$$v_k(t_0^k) = c_k + p(t_0^k + c_k - t_w) = \rho \tag{42}$$

$$v_k(t_f^k) = c_k + p(t_f^k + c_k - t_w) = \rho \tag{43}$$

これを解くと

$$t_0^k = t_w - c_k + \frac{\rho - c_k}{\alpha} \tag{44}$$

$$t_f^k = t_w - c_k + \frac{\rho - c_k}{\beta} \tag{45}$$

となる。ここで、ルート  $k$  に利用者が存在する条件は

$$c_k < \rho \tag{46}$$

である。ゆえに、ルート  $k$  を通る利用者の流量  $Q_k$  は

$$Q_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\mu_k(\rho - c_k) & \text{if } c_k < \rho \\ 0 & \text{if } c_k \geq \rho \end{cases} \tag{47}$$

となる。また、流量保存則より

$$\sum_{k=1}^m Q_k = Q \quad (48)$$

である。以上より  $Q_k$  が導出できるので、それぞれのルートについて単一ボトルネックの場合と完全に同じ議論が可能である。ゆえに、利用者が存在するルート  $k$  では以下の通りとなる。

$$\dot{A}_k(t) = \begin{cases} \frac{\mu_k}{1+\alpha} & \text{if } t + d_k(t) + c_k - t_w < 0 \\ \frac{\mu_k}{1+\beta} & \text{if } t + d_k(t) + c_k - t_w \geq 0 \end{cases} \quad (49)$$

$$t_e^k = t_0^k + (1 + \alpha)(t_w - c_k - t_0^k) \quad (50)$$

## 4 数値例

### 4.1 厳密解

本節では3つの数値例について利用者均衡の厳密解を示す。例1は単一ボトルネック、例2, 3は複数経路のボトルネックの数値例である。表1のようにパラメータを設定する。1列目に定義, 2列目に記号, 3, 4, 5列目にそれぞれ例1, 2, 3のパラメータを示す。

表 1: パラメータ設定

		例 1	例 2	例 3
経路の本数	$k$	1	2	2
起点 1 からの出発総流量	$Q$	100	100	100
ボトルネックの容量	$\mu_1$	5	5	2
	$\mu_2$		2	5
非渋滞時の旅行時間	$c_1$	0	0	0
	$c_2$		5	5
目標到着時刻	$t_w$	40	40	40
スケジュールコストの早着の係数	$\alpha$	-0.5	-0.5	-0.5
スケジュールコストの遅着の係数	$\beta$	2	2	2

例1の結果を図7, 8に示す。図7では実線が利用者均衡での  $A(t)$  を示し、破線が  $D(t)$  を示す。2つの線が重なっていない時刻で待ち行列（渋滞）が生じていることを意味する。図8では利用者の不効用を示す。これらより、不効用関数の値が最小値8になっていない時間帯で出発流量が0となっているので、利用者均衡の条件を満たしていることがわかる。例2, 3についても利用者均衡での累積流量を図9-12に示す。

例1のパラメータについて時間差通勤の場合の利用者均衡も示す。流量は  $Q_a = Q_b = 50$  とし、グループ  $b$  の目標到着時刻は  $t_w^b = 40$  で、グループ  $a$  の目標到着時刻を差の分だけ

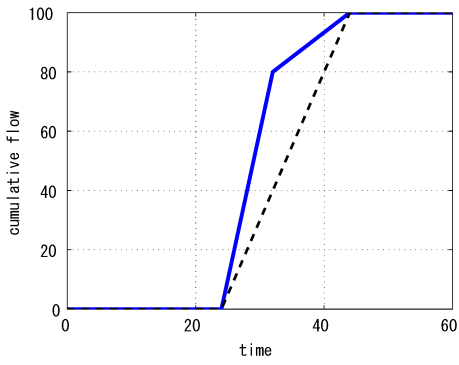


図 7: 例 1 での累積流量

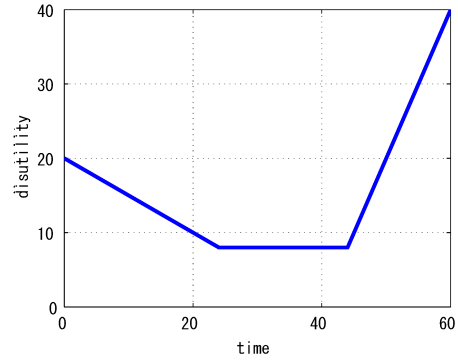


図 8: 例 1 での不効用

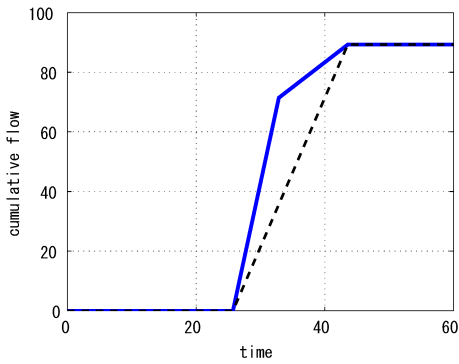


図 9: 例 2 でのルート 1 の累積流量

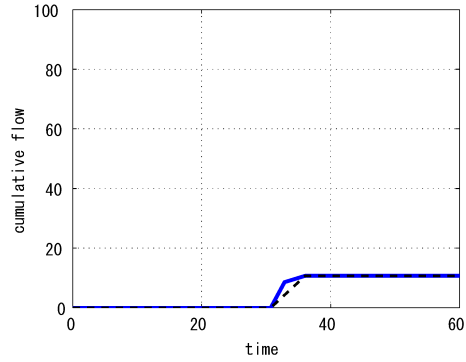


図 10: 例 2 でのルート 2 の累積流量

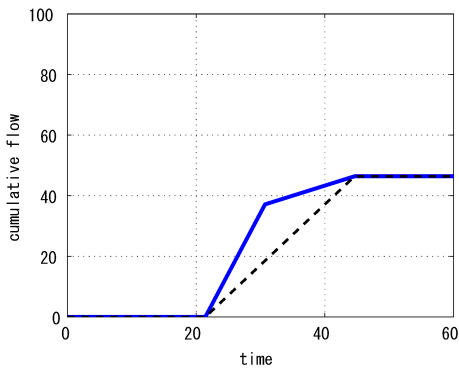


図 11: 例 3 でのルート 1 の累積流量

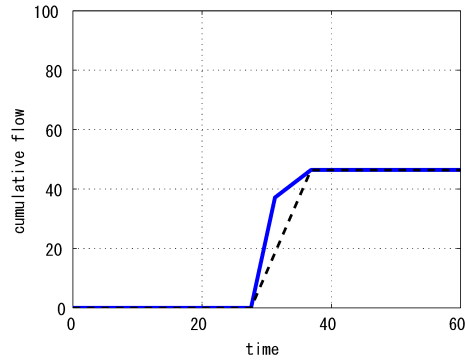


図 12: 例 3 でのルート 2 の累積流量

早くした。その結果を図 13-17 に示す。図 13-17 の実線、破線、一点鎖線がそれぞれ  $A(t)$ ,  $D(t)$ ,  $W(t+c)$  を示している。目標時刻の差が 6 のときは、2 つのグループの出発流量が離れておらず図 7 と同じ流量曲線になっているが、目標時刻の差が 7 になると 2 つのグループのピークが離れはじめ、10 になると分布がほとんど分離していることがわかる。図 18, 表 2 は目標到着時刻の差と不効用の総和、待ち時間の総和、スケジュールコストの総和との関係を表している。実線、破線、一点鎖線がそれぞれ不効用の総和、待ち時間の総和、スケジュールコストの総和を示している。待ち時間の総和は差が小さなときは変化しないが、大きくなると減少しはじめ、差が 0 のときの約半分まで減少していることがわかる。スケジュールコストの総和は最初から減少し、こちらも差が 0 のときの約半分まで減少していることがわかる。ゆえに、適当な目標到着時刻の差を設定すれば、時間差通勤により渋滞が緩和できると言える。

表 2: 時間差通勤の効果

目標到着時刻の差	不効用の総和	待ち時間の総和	スケジュールコストの総和
0	800.0	400.0	400.0
1	775.0	400.0	375.0
2	750.0	400.0	350.0
3	725.0	400.0	325.0
4	700.0	400.0	300.0
5	675.0	400.0	275.0
6	650.0	400.0	250.0
7	587.5	359.4	228.1
8	525.0	312.5	212.5
9	462.5	259.4	203.1
10	400.0	200.0	200.0
11	400.0	200.0	200.0
12	400.0	200.0	200.0

## 4.2 離散時間での計算結果

本節では利用者均衡の Akamatsu ら [3] のモデルでの数値実験の結果を示す。時間を整数値だけに離散化して計算を行った。例 2 の複数経路のボトルネックの場合の累積流量を図 19, 20 に、例 1 のパラメータについて時間差通勤での目標到着時刻の差 8 での計算結果を図 21 に、目標到着時刻の差と不効用の総和、待ち時間の総和、スケジュールコストの総和との関係を図 22 に示す。各線は厳密解のときと同じものを表す。

例 2 についての結果は厳密解とほとんど一致した。時間差通勤では待ち時間が単調減少にならないという問題が生じている。厳密解では単調減少だったので、これは離散化誤差によるものと考えられる。

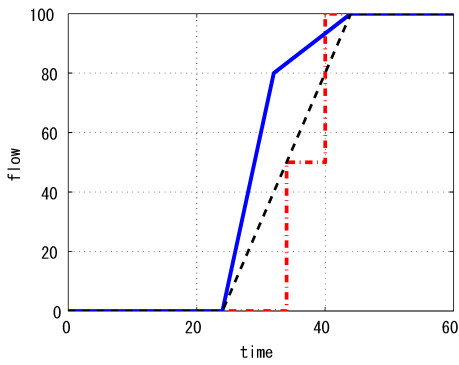


図 13: 目標到着時刻の差 6 での累積流量

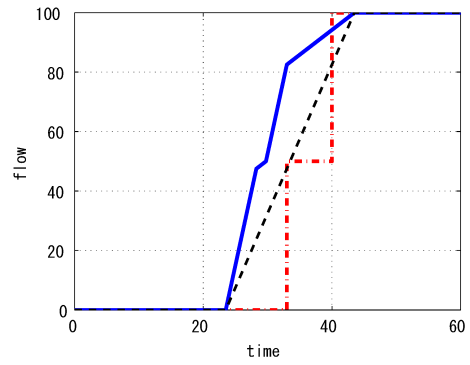


図 14: 目標到着時刻の差 7 での累積流量

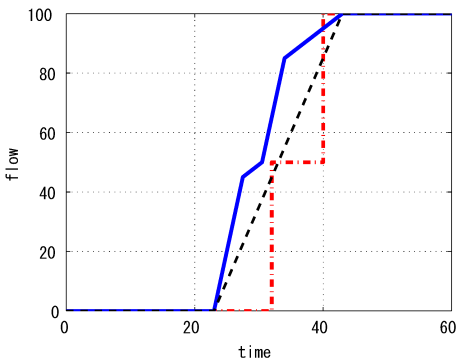


図 15: 目標到着時刻の差 8 での累積流量

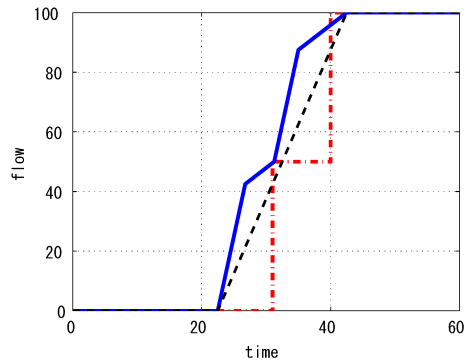


図 16: 目標到着時刻の差 9 での累積流量

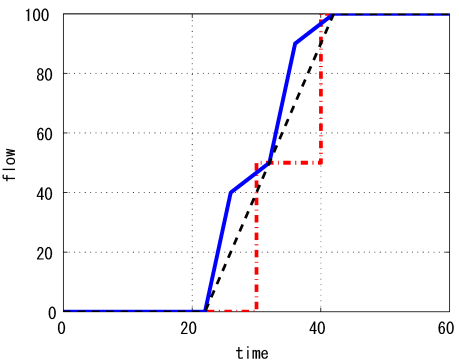


図 17: 目標到着時刻の差 10 での累積流量

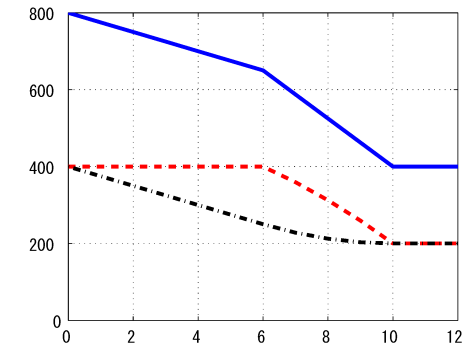


図 18: 時間差通勤の効果

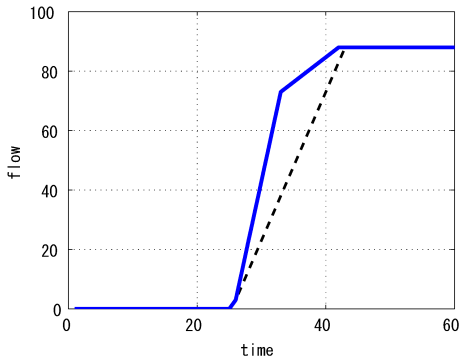


図 19: 例 2 でのルート 1 の計算結果

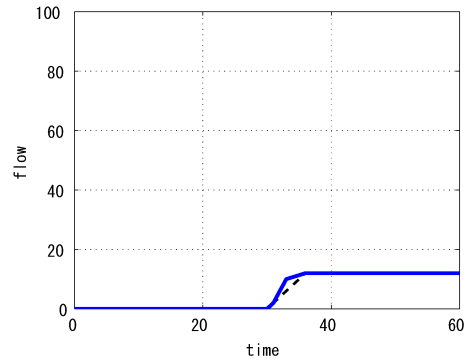


図 20: 例 2 でのルート 2 の計算結果

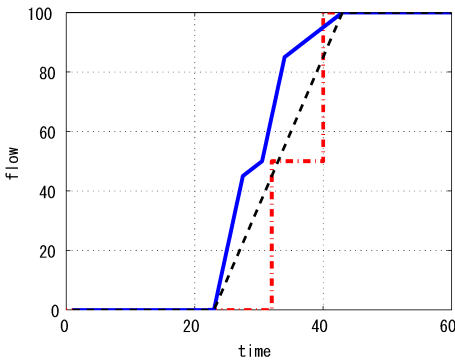


図 21: 目標到着時刻の差 8 での計算結果

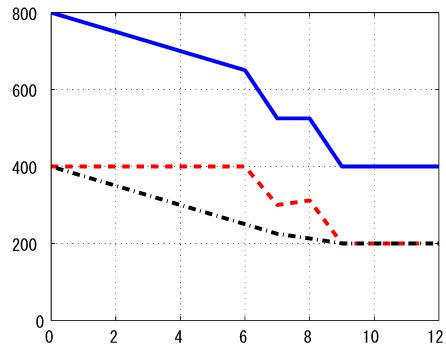


図 22: 時間差通勤の効果 (計算実験)

## 5 おわりに

本論文では、ボトルネックモデルにおける交通均衡流を考えた。まず、単一ボトルネックモデルについて待ち行列モデルと利用者均衡解を説明し、スケジュールコストを仮定した上で厳密解を導出した。そして、その利用者均衡解で生じる渋滞を緩和する方法を2つ提案し、単一ボトルネックモデルを時間差通勤(始業時間は2つ)がある場合に拡張した。数値例でも時間別料金、時間差通勤ともに渋滞が緩和したと言える結果が得られた。3節では、モデルを複数の経路を持つボトルネックモデルに拡張し、それぞれの経路を通る流量を定式化した。4節での数値例では厳密解と Akamatsu ら [3] のモデルでの数値実験の結果がほとんど一致していることが示された。また、Akamatsu らのモデルを時間差通勤がある場合に拡張したときの問題点であった待ち時間が単調減少にならない現象は厳密解では確認されなかった。ゆえに、時間を離散化して計算したことによる誤差だと考えられる。今後の課題として、複数経路のボトルネックモデルについて時間差通勤を考えたとき、それぞれの経路を通る流量にどのような変化が生じるかについて考える。



## 参考文献

- [1] 赤松, 交通ネットワーク流の動的制御モデル. 土木計画学研究・講演集, Vol.35, 311(CD-ROM) (2007)
- [2] 赤松, 和田, 動的な交通ネットワーク流問題. Proceedings of the Twenty-Sixth RAMP Symposium Hosei University, Tokyo, 31-46, October 16-17 (2014)
- [3] Akamatsu, T., Wada, K., Hayashi, S., The corridor problem with discrete multiple bottlenecks. Transportation Research Part B : Methodological Vol.81, Part.3, 808-829 (2015)
- [4] Daganzo, C.F., The uniqueness of time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck, Transportation Science, Vol.19, No.1, 29-37 (1985)
- [5] 林, 田地, ボトルネックモデルにおける交通渋滞の緩和. 総計数理研究所・発表 (2016)
- [6] 林, 田地, 経路選択を含むボトルネックモデルに関する考察. 数理解析研究所・発表 (2016)
- [7] Hendrickson, C., and Kocur, G., Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model, Transportation Science, Vol.15, No.1, 62-77 (1981)
- [8] 桑原, 赤松, 動的ネットワーク解析-これまでの知見とこれからの展望-. 土木学会論文集, Vol. IV-48, 3-16 (2000)
- [9] Smith, M.J., The existence of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck, Transportation Science, Vol.18, No.4, 385-394 (1984)
- [10] 高山, 赤松, ボトルネック渋滞を考慮した住居立地均衡モデル—時間軸の縮約可能性について—. 土木学会論文集 D, Vol.65, No.1, 39-52 (2009)
- [11] Vickrey, W.S., Congestion theory and transport investment, The American Economic Review, Vol.59, No.2, 251-260 (1969)
- [12] 和田, 赤松, 単一ボトルネックモデルにおける渋滞と混雑を解消する情報効率的メカニズムの設計. 土木学会論文集 D, Vol.66, No.2, 160-177 (2010)
- [13] 湯川, 河崎, 武藤, 時間帯別混雑料金を導入したボトルネックモデル. 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015 年 春季研究発表会, 142-143