数理解析研究所講究録
第2027巻 2017年 80-84

ゲージ錐計画問題の双対性
Duality of Gauge Cone Programming

小崎敏寛 (Toshihiro Kosaki)*
ステラリンク株式会社 (Stera Link, Co., Ltd.)

概 要

2 次錐計画問題 [1, 6] に表れる 2 次錐を一般化したゲージ錐を導入する．この錐を使った数理計画問題を 2 つ導入する．それらの問題に対して双対問題を考える．そして主問題と双対問題の間に弱双対定理がなりたつことを示す．

1 はじめに

2 次錐は，ベクトルの 2 ノルムが非負実数で抑えられるという

$$\{(t,x) : t \geq \|x\|_2\} \tag{1}$$

という形式で記述される．2 ノルムより一般の関数を考えることでより広いクラス問題を扱える [4, 5]．この論文ではゲージ関数 f を考える．そして, ゲージ錐を $\mathcal{K} := \{(x_0, x_{1:n}) : x_0 \geq f(x_{1:n})\}$ とする．

2 ノルムとゲージ

ノルムは 2 次錐計画問題において重要な役割を果たす．ノルムは次の 4 つの性質を持つ関数 $\|\cdot\| : \Re^n \to \Re$ である [3]．

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
3. $\forall c \in \Re,\ \|cx\| = \|c\|\|x\|$,
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

性質 3 で，$c = -c$ とすると，ノルムは対称性を持つことが分かる．

ノルムを一般化したゲージ関数を考える．次の 4 つの性質をみたす関数 $f : \Re^n \to \Re$ をゲージ関数 [2](または Minkowski 関数 ([7]p131)) と言う．

1. f は非負,
2. f は正斉次 (すなわち, $\forall \alpha > 0,\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$),

*toshihirokosaki@gmail.com

3. f は $f(0)=0$,

4. f は凸関数.

性質 2 より，ノルムに課せられた対称性がゲージ関数ではないことが分かる.

3 弱双対定理とその応用

弱双対定理は主問題として最小化問題と双対問題として最大化問題を考える時，実行可能解全体について主問題の目的関数が双対問題の目的関数より大きいまたは等しいことである．この定理がなりたつとき，アルゴリズム作りに重要な次の性質がなりたつ.

1. 2 つの目的関数値が一致すれば最適解が得られている.

2. 双対問題の実行可能解の目的関数値は主問題の最適値の下界になっている.

したがって，弱双対定理を示すことはアルゴリズムを考える上で重要である.

4 線形計画問題

簡単のため線形計画問題の場合で考える.

4.1 定式化

考える問題は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T x \\
&\text{s.t. } Ax = b \\
&\qquad x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{LP-P}
$$

変数は x. 双対問題は,

$$
\begin{aligned}
&\max\ b^T y \\
&\text{s.t. } A^T y + z = c \\
&\qquad z \geq 0
\end{aligned}
\tag{LP-D}
$$

となる．変数は (y,z).

4.2 弱双対定理

目的関数の差について，次のようになるため弱双対定理がなりたつ.

$$
\begin{aligned}
c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\
&= x^T z \\
&= x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \\
&\geq 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

5 ゲージ錐計画問題

5.1 定式化

考えるゲージ錐問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{s.t. } Ax = b \\ &\qquad f(x_{1:n}) \le x_0. \end{aligned} \tag{P}$$

変数は $x := (x_0, x_{1:n})$.

ゲージ関数 f に対する双対である双対ゲージ関数を

$$f^\circ(z_{1:n}) := \inf_{x_{1:n} \in \Re^n} \{v \ge 0 : x_{1:n}^T z_{1:n} \ge -v f(x_{1:n})\} \tag{3}$$

とする.

双対問題は,

$$\begin{aligned} &\max\ b^T y \\ &\text{s.t. } A^T y + z = c \\ &\qquad f^\circ(z_{1:n}) \le z_0 \end{aligned} \tag{D}$$

となる. 変数は $(y, z := (z_0, z_{1:n}))$.

5.2 弱双対定理

主問題と双対問題の目的関数値について,

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\ &= x^T z \\ &= x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \\ &\ge x_0 z_0 - f(x_{1:n}) f^\circ(z_{1:n}) \\ &\ge 0 \end{aligned} \tag{4}$$

がなりたつことより, 弱双対定理がなりたつ.

6 Rotated ゲージ錐計画問題

6.1 定式化

つぎの rotated ゲージ計画問題を考える.

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^T \begin{pmatrix} x_{1:n} \\ s \\ t \end{pmatrix} \\
\text{s.t. } & A \begin{pmatrix} x_{1:n} \\ s \\ t \end{pmatrix} = b \\
& f(x_{1:n})^2 \leq st \\
& s \geq 0 \\
& t \geq 0,
\end{aligned}
\tag{P}
$$

ただし，変数は $(x_{1:n}, s, t)$.

双対問題は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^T y \\
\text{s.t. } & A^T y + \begin{pmatrix} z_{1:n} \\ u \\ v \end{pmatrix} = c \\
& f^\circ(z_{1:n})^2 \leq uv \\
& u \geq 0 \\
& v \geq 0,
\end{aligned}
\tag{D}
$$

ただし，変数は $(y, z_{1:n}, u, v)$.

6.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
c^T \begin{pmatrix} x_{1:n} \\ s \\ t \end{pmatrix} - b^T y &= \left(A^T y + \begin{pmatrix} z_{1:n} \\ u \\ v \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} x_{1:n} \\ s \\ t \end{pmatrix} - \left(A \begin{pmatrix} x_{1:n} \\ s \\ t \end{pmatrix} \right)^T y \\
&= {x_{1:n}}^T z_{1:n} + su + tv \\
&\geq -f(x_{1:n}) f^\circ(z_{1:n}) + su + tv \\
&\geq -\sqrt{stuv} + su + tv \\
&\geq -2\sqrt{stuv} + su + tv \\
&= (\sqrt{su} - \sqrt{tv})^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

したがって，弱双対定理がなりたつ.

7 証明に使用した不等式

補題 1 実数 $a \geq b \geq 0$, $c \geq d \geq 0$ に対して,

$$ac - bd \geq 0 \tag{6}$$

がなりたつ.

(証明)

$$\begin{aligned} 0 \leq (a-b)(c-d) &= ac + bd - ad - bc \\ &= ac - bd + d(b-a) + b(d-c) \end{aligned} \tag{7}$$

となる. $d \geq 0$, $a - b \geq 0$, $b \geq 0$, $c - d \geq 0$ より,

$$\begin{aligned} ac - bd &\geq d(a-b) + b(c-d) \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

がなりたつ.

■

8 まとめと今後の課題

この論文では, 2次錐計画問題を一般化したゲージ錐計画問題と rotated ゲージ錐計画問題を提案した. これらの問題に対して, 弱双対定理がなりたつことを示した.

今後の課題として次のようなものがある. どのような条件のもとで, 強双対性がなりたつかどうか調べる. 問題を解く主双対内点法を考える. ベクトル変数だけでなく, 行列変数を考える.

参考文献

[1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-Order Cone Programming, Mathematical Programming, 95, 3-51, 2003.

[2] H-H Chao and L. Vandenberghe, Semidefinite Representations of Gauge Functions for Structured Low-Rank Matrix Decomposition, arXiv, 2016.

[3] R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 2007.

[4] 小崎敏寛, ノルム錐計画問題の双対性, 京都大学数理解析研究所講究録 1931 : 最適化アルゴリズムの進展 : 理論・応用・実装, 89-93, 2015.

[5] 小崎敏寛, 一般のノルム錐計画問題の弱双対定理, 統計数理研究所共同研究リポート 369, 最適化 : モデリングとアルゴリズム 28, 75-78, 2016.

[6] M. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret, Applications of Second-Order Cone Programming, Linear Algebra and its Applications, 284, 193-228, 1998.

[7] D. G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, John Wiley & Sons, Inc., 1969.