数理解析研究所講究録
第2027巻 2017年 158-166

H_∞ フィードバック制御に対する面的縮小法の適用

脇 隼人 */ Hayato Waki

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 / Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

2016 年 11 月 29 日

概要

本稿では主に [18]*1について解説する. ここでは, H_∞ 状態フィードバック制御から派生する半正定値計画問題とその双対問題に着目し, それぞれが Slater 条件を満たすことの必要十分条件を制御理論の言葉で記述する.

キーワード : H_∞ 制御, 行列不等式, 状態フィードバック制御, 不変零点

1 はじめに

H_∞ フィードバック制御とは, 与えられた制御対象に対して, 関連する伝達関数の H_∞ ノルムをできるだけ小さくするような制御器でフィードバックする制御手法である. [23] によれば, H_∞ フィードバック制御の歴史は次のようにまとめられる. 1981 年 Zames [20] によって H_∞ ノルムに着目したフィードバック制御が提唱され, 80 年代後半には Dolye ら [3] による代数 Riccati 方程式に基づくアルゴリズムが提案された. このアルゴリズムを適用するには制御システムにおいてある種の正則性を要求している. そのため, 正則性を仮定しないアルゴリズムが研究された. その結果 Iwasaki, Skelton [6] により, 状態フィードバック制御に対して線形行列不等式による定式化が提案され, その後, もう一つのフィードバック制御手法である出力フィードバック制御に対しても [13] や [7] により線形行列不等式による定式化が提案された. 時同じくして, 線形行列不等式を制約式に持つ最適化問題, すなわち半正定値計画問題*2に対する求解アルゴリズムとして主双対内点法が提案され, SeDuMi [15], SDPT3 [16] や SDPA [19] などに実装・公開されている. 現在では, H_∞ フィードバック制御に対して最適化・数値計算そして制御器の設計まで自由にできる状況にある.

上記の H_∞ フィードバック制御の歴史からは何ら問題点はなさそうだが, H_∞ フィードバック制御を使う際には注意が必要だ, というのが実際に用いる際の共通認識のようである. より具体的には, 最適化・数値計算の計算精度が悪くなることがある, ということである. 本研究の動機はこの問題点を理解することである. このやや曖昧な問題点に対して, 最初に思い当たる理由は制御対象に桁が大きい数字と小さい数字の双方が現れてい

* waki@imi.kyushu-u.ac.jp

*1 これは, “H. Waki and N. Sebe. Application of facial reduction to H ∞ state feedback control problem. In Proceedings of the 8th IFAC Robust Control Design (ROCOND 2015), pp. 112–118”の原稿に証明や数値実験を追加し, より詳しく議論したものである.

*2 本稿では, 線形行列不等式問題と半正定値計画問題を区別して用いない.

る可能性である．実際の制御対象において単位系のとり方次第ではこの可能性もあり，その場合は用いてる単位系を変えるなどスケリーングを施すことでバランスをとることができるであろう．しかし，このような係数間の不均衡さが存在しない制御対象においても，数値的に精度が悪くなることがある．

次に考えられる理由は，半正定値計画問題に現れる悪条件性である．[10, 4] で半正定値計画問題を含む錐計画問題に対する条件数が，正方行列に対する条件数の類似として定義されている．ここでは行列と同様に条件数が大きすぎる錐計画問題を悪条件な錐計画問題と呼ぶことにする．この条件数は定義より，半正定値計画問題あるいはその双対問題が実行可能内点解を持たない場合，半正定値計画問題が悪条件である，ということができる．本稿では，半正定値計画問題あるいはその双対問題が実行可能内点解を持たない場合に着目する．

半正定値計画問題あるいはその双対問題が実行可能内点解を持たない場合，次の三点に気をつけなければならない．まず一つめは，最適値が有限値をとる場合でも最適解が存在しない可能性がある，ということである．H_∞ フィードバック制御では，最適解を利用して制御器を設計するので，最適解が存在しない場合は，H_∞ ノルムが最適値になる制御器が設計できない，あるいは意味のない制御器を設計してしまう．二つめは，半正定値計画問題を解くためのソフトウェアに実装されているアルゴリズムは，半正定値計画問題とその双対問題の双方が実行可能内点解を持つということを前提としたアルゴリズムであるため，この前提を満たさない場合，ソフトウェアの挙動が保証されていない，ということで[*3]．三つめは，主双対内点法の計算において丸め誤差などによる数値誤差の影響により，最適値が大きく変動する可能性がある，ということである．これは本研究を通して見出した現象であり，[14] で紹介および議論されている．

では，なぜ悪条件性を有した半正定値計画問題が現れるのであろうか．元の制御対象がなんらかの性質を持っているために悪条件な半正定値計画問題が生成されたと予想し，本稿ではその制御対象の性質を明らかにする[*4]．特に，H_∞ 状態フィードバック制御から派生する半正定値計画問題とその双対問題に着目し，それぞれが Slater 条件を満たすことの必要十分条件を制御理論の言葉で記述する．なお [18] ではその性質を元にどのようにすれば悪条件でない等価な半正定値計画問題が現れるか議論している．本研究と関連する結果として，H_2 ノルムに基づく状態フィードバック制御に対する議論 [1] をあげる．ここで利用されている技術が，本稿でも用いられている．

1.1 記号

$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ をそれぞれ実数全体の集合，複素数全体の集合とする．また，$\overline{\mathbb{C}_+}$ と $\overline{\mathbb{C}_-}$ をそれぞれ，虚軸を含む複素平面の右半平面，と左半平面とする．つまり，実部が非負の複素数の集合と，実部が非正の複素数の集合である．$\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^n_+$ と $\mathbb{S}^n_{++}$ をそれぞれ，$m\times n$ の実行列の集合，$n\times n$ 実対称行列の集合，$n\times n$ 実半正定値対称行列の集合，$n\times n$ 実正定値対称行列の集合とする．$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, に対して $A \bullet B := \mathrm{Trace}(AB^T)$ と定める．$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, に対して $\mathrm{He}(A) = A + A^T$ と定める．

---

*3 SeDuMi に実装されているアルゴリズムでは，より弱い前提でアルゴリズムの挙動が保証されているものの，[18] の数値実験では精度の低い計算になっていることを紹介している．

*4 本稿のタイトルは，面的縮小法の適用となっているが，ページ数の関係上そこまで踏み込まないことにする．興味のある読者は [18] を参照して欲しい．

2 半正定値計画問題

半正定値計画問題は次のように定義される.

$$\theta_P^* = \inf_{x\in\mathbb{R}^m, X\in\mathbb{S}^n} \left\{ c^T x : X = \sum_{j\in\mathcal{M}} x_j F_j - F_0, X \in \mathbb{S}_+^n \right\}, \tag{1}$$

ただし, $c \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{M} = \{1,\ldots,m\}$, $F_0,\ldots,F_m \in \mathbb{S}^n$ である. この最適化問題は, 制約式が線形行列不等式と呼ばれるため, 線形行列不等式問題 (Linear Matrix Inequality, LMI) と呼ぶこともある. 本稿を通して, $F_1,\ldots,F_m$ は一次独立とする.

(1) の双対問題は, 次のように定式化される.

$$\theta_D^* = \sup_{Y\in\mathbb{S}^n} \left\{ F_0 \bullet Y : F_j \bullet Y = c_j \ (j \in \mathcal{M}), Y \in \mathbb{S}_+^n \right\}. \tag{2}$$

(1) と (2) の任意の実行可能解の組 (x, X, Y) に対して, $c^T x \geq F_0 \bullet Y$ が成り立つ. これは, $\theta_P^* \geq \theta_D^*$ を意味している. さに, Slater 条件と呼ばれる制約想定のもとでは, (1) とその双対問題 (2) の間に双対定理が成り立つ, つまり $\theta_P^* = \theta_D^*$ となることが知られている. 以下で双対定理について詳しく述べる.

(1) に対して, $\hat{X} = \sum_{j\in\mathcal{M}} \hat{x}_j F_j - F_0$ を満たす $(\hat{x}, \hat{X}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}_{++}^n$ が存在するとき, (1) は Slater 条件を満たす, あるいは実行可能内点解 $(\hat{x}, \hat{X})$ を持つ, という*5. また, $F_j \bullet \hat{Y} = c_j \ \ (j \in \mathcal{M})$ を満たす $\hat{Y} \in \mathbb{S}_{++}^n$ が存在するとき, (2) は Slater 条件を満たす, あるいは実行可能内点解 $\hat{Y}$ を持つ, という.

定理 2.1. *([11, Theorem 3.2.8]; あるいは [2, Theorem 2.2] や [5, Section 4.7] を参照) もし (2) が Slater 条件を満たし, (1) が実行可能なら, (1) は最適解を持ち $\theta_P^* = \theta_D^*$ が成り立つ. 同様に, もし (1) が Slater 条件を満たし (2) が実行可能なら, (2) は最適解を持ち $\theta_P^* = \theta_D^*$ が成り立つ.*

(1) 及び (2) の双方が Slater 条件を満たすとき, 主双対内点法が収束することが [2, 11] などで詳しく議論されている.

では, (1) あるいは (2) がどのような性質を持つ場合に Slater 条件を満たすのだろうか. それは次の定理でまとめられる.

定理 2.2. *(1) に対して, 次のうちどちらか一方は成立する:*

(P1) (1) は Slater 条件を満たす.
(P2) $F_j \bullet \hat{Y} = 0 \ (j \in \mathcal{M})$, $F_0 \bullet \hat{Y} \geq 0$ を満たす $\hat{Y} \in \mathbb{S}_+^n \setminus \{O_n\}$ が存在する.

*特に, (P2) が成立する際に, $F_0 \bullet \hat{Y} > 0$ を満たせば, (1) は実行不可能である*6. 同様に, (2) に対して, 次のうちどちらか一方は成立する:*

(D1) (1) は Slater 条件を満たす.
(D2) $\hat{X} = \sum_{j\in\mathcal{M}} \hat{x}_j F_j$, $c^T \hat{x} \leq 0$ を満たす $(\hat{x}, \hat{X}) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{S}_+^n \setminus \{O_n\})$ が存在する.

---

*5 [18] では, [11] にならって, strongly feasible と呼んでいる.

*6 すなわち, 実行可能領域が空集合である.

特に *(D2)* が成立する際に, $c^T\hat{x} < 0$ を満たせば, *(2)* は 実行不可能である.

(1) に対しては (P1) が成立する場合に (P2) が成立しないこと, また実行不可能性については, 簡単なので [18] で証明を与えている. また, (P2) が成立する場合に (P1) が成立しないことは, 分離定理 (例えば [12, Theorem 20.2] 等) を利用するので, 詳細は [9, 8, 17] を参照して欲しい. (2) についても同様である.

3 H_∞ 状態フィードバック制御から得られる半正定値計画問題と Slater 条件

本節では, まず制御対象と H_∞ 状態フィードバック制御から得られる半正定値計画問題とその双対問題を与える. 次にそれぞれの最適化問題に対して定理 2.2 を適用して Slater 条件を満たさない時の条件を導出し, これらを元の制御対象の言葉で記述する.

制御対象として次の微分方程式を考える.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + B_1 w + B_2 u \\ z & = & C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \end{array}\right. \tag{3}$$

ただし, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m_i}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p_1\times n}$, $D_{1i} \in \mathbb{R}^{p_1\times m_i}$ $(i = 1, 2)$, 状態 $x \in \mathbb{R}^n$, 外乱 $w \in \mathbb{R}^{m_1}$, 制御入力 $u \in \mathbb{R}^{m_2}$, 制御出力 $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ である. なお, $p_1 \geq m_2$ とする.

状態フィードバック制御とは, 状態 x が全て分かっている状況で, (3) に対して制御入力を $u(t) = Kx(t)$ と定めた制御手法である. ここで $K \in \mathbb{R}^{m_2\times n}$ である. この場合, 閉ループ $G_{cl}(s)$ は,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (A + B_2 K)x + B_1 w \\ z & = & (C_1 + D_{12}K)x + D_{11} w. \end{array}\right. \tag{4}$$

と書ける. 図 1 は閉ループ (4) のブロック線図を表している.

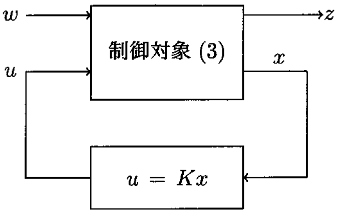

図 1　閉ループ (4) のブロック線図

(4) に対して, $\|G_{cl}(s)\|_\infty$ を閉ループ (4) の H_∞ ノルムと表す*7. [6] で, H_∞ 状態フィードバック制御と線形行列不等式問題との関係が示唆されている.

定理 3.1. *([6]) (4)* と $\gamma > 0$ に対して, 次は等価である*:*

(F1) $\|G_{cl}(s)\|_\infty < \gamma$ で $A + B_2 K$ が *Hurwitz* 安定*8 となる $K \in \mathbb{R}^{m_2\times n}$ が存在する.

---

*7 ここでは, $\|G_{cl}(s)\|_\infty$ の詳細な定義を記載しないが, この記述の中に K が含まれる. つまり K の選び方で H_∞ ノルムの値が変わる.

*8 $A + B_2 K$ の固有値の実部が全て負ということである.

(F2) 次を満たす $X \in \mathbb{S}^n_{++}$ と $K \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ が存在する:

$$-\begin{pmatrix} \mathrm{He}((A+B_2K)X) & * & * \\ (C_1+D_{12}K)X & -\gamma I_{p_1} & * \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n+p_1+m_1}_{++}. \tag{5}$$

ここで (5) の $*$ は, 対応する下三角ブロックの転置を表す.

H_∞ 状態フィードバック制御では, 定理 3.1 の (F2) に基づき, (5) において, $Y = KX$ とおいて得られる線形行列不等式問題を解く[*9]:

$$\begin{cases} \inf\limits_{\gamma,X,Y} & \gamma \\ \text{sub. to} & -\begin{pmatrix} \mathrm{He}(AX+B_2Y) & * & * \\ C_1X+D_{12}Y & -\gamma I_{p_1} & * \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n+p_1+m_1}_{+}, \\ & \gamma \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{S}^n_+, Y \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}. \end{cases} \tag{6}$$

この双対問題は次のように記述できる.

$$\begin{cases} \sup\limits_{Z} & 2(B_1^T \bullet Z_{31} + D_{11}^T \bullet Z_{32}) \\ \text{sub. to} & I_{p_1} \bullet Z_{22} + I_{m_1} \bullet Z_{33} = 1, B_2^T Z_{11} + D_{12}^T Z_{21} = O_{m_2 \times n}, \\ & \mathrm{He}(A^T Z_{11} + C_1^T Z_{21}) \in \mathbb{S}^n_+, Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{21}^T & Z_{31}^T \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{32}^T \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n+p_1+m_1}_{+}. \end{cases} \tag{7}$$

ただし, Z_{ij} $(1 \le j \le i \le 3)$ は (7) において変数行列である.

3.1 線形行列不等式問題 (6) に対する Slater 条件

線形行列不等式問題 (6) に対して, 定理 2.2 の (P2) を適用する. この時, (P2) は次の方程式・不等式系が解 Z_{ij} を持つことと同値である:

$$\begin{cases} 2(B_1^T \bullet Z_{31} + D_{11}^T \bullet Z_{32}) \ge 0, I_{p_1} \bullet Z_{22} + I_{m_1} \bullet Z_{33} = 0, \\ \mathrm{He}(A^T Z_{11} + C_1^T Z_{21}) \in \mathbb{S}^n_+, B_2^T Z_{11} + D_{12}^T Z_{21} = O_{m_2 \times n}, \\ \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{21}^T & Z_{31}^T \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{32}^T \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n+p_1+m_1}_{+} \setminus \{O_{(n+p_1+m_1)\times(n+p_1+m_1)}\}. \end{cases} \tag{8}$$

(8) において, $I_{p_1} \bullet Z_{22} + I_{m_1} \bullet Z_{33} = 0$ と Z_{22}, Z_{33} の半正定値性から, $Z_{22} = O_{p_1 \times p_1}$ と $Z_{33} = O_{m_1 \times m_1}$ が導ける. したがって, (8) は次のように等価に書き換えることができる:

$$\mathrm{He}(A^T Z_{11}) \in \mathbb{S}^n_+, B_2^T Z_{11} = O_{m_2 \times n}, Z_{11} \in \mathbb{S}^n_+. \tag{9}$$

つまり (P2) が成り立つことと (9) が非零行列 Z_{11} を解として持つことと等価である. 実は (9) は, 次の定理にあるように制御理論の言葉で記述することができる.

命題 3.2. *(9) が非零解を持つことの必要十分条件は,* $\lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}$ *が存在し*

$$\mathrm{rank}\left(A - \lambda I_n, B_2\right) < n, \tag{10}$$

を満たすことである. (10) は, (A, B_2) *が可安定でないことを意味している*[*10].

[*9] この方法は, 変数変換法と呼ばれている. 変数消去法と呼ばれる手法で行列不等式問題を導くこともできる.

[*10] (A, B_2) が可安定であるとは, 任意の $\lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}$ に対して, $\mathrm{rank}\left(A - \lambda I_n, B_2\right) = n$ が成り立つことを言う. これは可制御性を緩めたものであり, 制御理論においては基本的な概念・性質である.

命題 3.2 と定理 2.2 から, 線形行列不等式問題 (6) と Slater 条件を得ることができる.

定理 3.3. 線形行列不等式問題 *(6)* に対して, 次のうちどちらか一方は成立する:

(S1) 線形行列不等式問題 *(6)* は *Slater* 条件を満たす.
(S2) (A, B_2) は可安定でない.

定理 3.3 は [6] でも, 議論されており新しい結果ではない. 実際, たいていの制御設計では, (A, B_2) の可安定性は仮定されている.

3.2 双対問題 (7) と Slater 条件

双対問題 (7) に対して, 定理 2.2 の (D2) を適用する. この時, (D2) は次の等式・不等式系が非零解 (γ, X, Y) を持つことと同値である:

$$\begin{cases} -\begin{pmatrix} \mathrm{He}(AX+B_2Y) & * & * \\ C_1X+D_{12}Y & -\gamma I_{p_1} & * \\ O_{m_1\times n} & O_{m_1\times p_1} & -\gamma I_{m_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_+^{n+p_1+m_1}, \\ \gamma \le 0, X \in \mathbb{S}_+^n, Y \in \mathbb{R}^{m_2\times n}. \end{cases} \tag{11}$$

$\gamma < 0$ となる解 (γ, X, Y) は存在しないので, $\gamma = 0$ を (11) に代入すると, 次の等式・不等式系を得る:

$$\begin{cases} C_1X + D_{12}Y = O_{p_1\times n}, -\mathrm{He}(AX+B_2Y) \in \mathbb{S}_+^n, \\ \gamma = 0, X \in \mathbb{S}_+^n, Y \in \mathbb{R}^{m_2\times n}. \end{cases} \tag{12}$$

これより, 次の命題を得る:

命題 3.4. 行列 $(B_2^T, D_{12}^T)^T$ がフル列ランクとし, 次を満たす $\lambda \in \overline{\mathbb{C}_-}$ が存在すると仮定する.

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A-\lambda I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} < n + m_2. \tag{13}$$

この時, *(12)* は非零解 (γ, X, Y) を持つ. 逆に, (γ, X, Y) が *(12)* の非零解で, $X = HH^T$, $Y = RH^T$ かつ $\mathrm{rank}(H) = \mathrm{rank}(X)$ となる $H \in \mathbb{R}^{n\times r}$ と $R \in \mathbb{R}^{p_1\times r}$ が存在すると仮定する. ここで $r = \mathrm{rank}(X)$ としている. この時, *(13)* を満たす $\lambda \in \overline{\mathbb{C}_-}$ が存在する.

証明は省くが, この証明では次の補題を利用する:

補題 3.5. *([22, 補題 2.4])* $F, G \in \mathbb{R}^{n\times r}$ に対して, F はフル列ランクと仮定する[*11]. この時 $FG^T + GF^T \in \mathbb{S}_+^n$ に必要十分条件は $G = F\Omega$ と $\Omega + \Omega^T \in \mathbb{S}_+^r$ を満たす $\Omega \in \mathbb{R}^{r\times r}$ が存在することである[*12].

(13) を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ は (3) に対する不変零点と呼ばれており, 特に $\lambda \in \mathbb{C}_-$ は (3) に対する安定な不変零点と呼ばれている[*13]. 命題 3.4 と定理 2.2 から定理 3.3 と同様に, 双対問題 (7) に対する Slater 条件を制御理論の言葉で記述することができる:

定理 3.6. D_{12} がフル列ランクでないと仮定すると, 双対問題 *(7)* は *Slater* 条件を満たさない. また, D_{12} がフル列ランクと仮定すると, 双対問題 *(7)* に対して, 次のうちどちらか一方は成立する:

---

*11 すなわち $\mathrm{rank}(F) = r$ である.
*12 特に $\Omega + \Omega^T \in \mathbb{S}_+^r$ から Ω の固有値の実部は非負であることが言える.
*13 $\mathbb{C}_-$ は虚軸を含まない複素平面の左半平面を意味する. すなわち実部が負の複素数の集合である.

(I1) 双対問題 *(7)* は *Slater* 条件を満たす.

(I2) *(3)* が安定な不変零点を持つ.

[21] によれば, H_∞ フィードバック制御においては, 不安定な不変零点が H_∞ ノルム等に影響を与えることを示唆しているが, 定理 3.6 では, 安定な不変零点が存在することで双対問題 (7) が実行可能内点解を持たない可能性があり, 結果として (6) が最適解を持たないかもしれない, ということを示している.

4 おわりに

H_∞ フィードバック制御における最適化問題の数値的難しさに対して, 最適化問題の悪条件性に着目した. 特に Slater 条件に着目して, 線形行列不等式問題 (6) とその双対問題 (7) のそれぞれが Slater 条件を満たすための必要十分条件を, 制御理論の言葉で解釈することができた. H_∞ フィードバック制御において, 制御対象には可安定性は仮定されているが, 安定な不変零点についてはあまり議論されていない. 本稿では, 安定な不変零点の存在が最適化問題の数値的難しさに直結する可能性を示唆している.

ところで, 実用上では制御器の設計において必ずしも線形行列不等式問題 (6) の最適値や最適解を利用しないこともある. しかしながら, その場合でも安定な不変零点が数値計算に悪影響を与える可能性があることを指摘する. まず, 線形行列不等式問題 (6) を次のように摂動することで精度のより高い解を探すことがある:

$$\left\{\begin{array}{ll} \inf\limits_{\gamma,X,Y} & \gamma \\ \text{sub. to} & -\begin{pmatrix} \mathrm{He}(AX+B_2Y) & * & * \\ C_1X+D_{12}Y & -\gamma I_{p_1} & * \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1} \end{pmatrix} - \epsilon I_{n+p_1+m_1} \in \mathbb{S}_+^{n+p_1+m_1}, \\ & \gamma \in \mathbb{R}, X-\epsilon I_n \in \mathbb{S}_+^n, Y \in \mathbb{R}^{m_2\times n}. \end{array}\right. \tag{14}$$

ここで $\epsilon > 0$ は十分小さい正の実数である. この最適解 $(\hat{\gamma},\hat{X},\hat{Y})$ において, $\hat{X}$ は必ず正定値なので, $K=\hat{Y}\hat{X}^{-1}$ とおけば, $(\hat{X},K)$ は定理 3.1 の (5) を満たす. しかしながらこのような摂動で得られる (14) の双対問題はやはり Slater 条件を満たさない. 実際, 摂動 $-\epsilon I_n$ と $-\epsilon I_{n+p_1+m_1}$ は対応する双対問題では目的関数の係数に相当する. したがって, (14) の双対問題の実行可能領域は変化しないので, (7) が Slater 条件を満たさなければ, この双対問題も Slater 条件を満たさない. そのため, (14) は線形行列不等式問題 (6) と同様に最適解を持たない可能性がある.

もう一つの考えられる対処法は, 事前に求めた (6) の最適値 γ^* に対して, その α 倍大きい $\alpha\gamma^*$ を H_∞ ノルムの値とする X, Y を探す方法である. ただし $\alpha > 1$ とする. これは次の線形行列不等式問題を解くことで求めることができる.

$$\left\{\begin{array}{ll} \inf\limits_{X,Y} & 0 \\ \text{sub. to} & -\begin{pmatrix} \mathrm{He}(AX+B_2Y) & * & * \\ C_1X+D_{12}Y & -(\alpha\gamma^*)I_{p_1} & * \\ B_1^T & D_{11}^T & -(\alpha\gamma^*)I_{m_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_+^{n+m_1+p_1}, \\ & X \in \mathbb{S}_+^n, Y \in \mathbb{R}^{m_2\times n}. \end{array}\right. \tag{15}$$

しかし $\alpha\gamma^*$ が定数なので, (15) の双対問題に対する (D2) は, (12) と等価である. したがって, この場合も安定な不変零点による影響を排除できない.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP22740056, JP26400203 の助成を受けた. また, 瀬部昇先生 (九州工業大学), 蛯原義雄先生 (京都大学), 原辰次先生 (東京大学) には, 本研究に対して多くの有益の情報・議論をいただきました. 特に瀬部先生には制御理論の初歩的なことを多く教えていただきました. 感謝しております.

参考文献

[1] V. Balakrishnan and L. Vandenberghe. Semidefinite Programming Duality and Linear Time-Invariant Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 1, pp. 30 – 41, 2003.

[2] E. de Klerk. *Aspects of semidefinite programming.* Kluwer Academic Publishers, 2002.

[3] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State-space solutions to standard H_∞ and H_2 control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, pp. 831 – 847, 1989.

[4] R. M. Freund, F. Ordóñez, and K. C. Toh. Behavioral measures and their correlation with ipm iteration counts on semi-definite programming problems. *Mathematical Programming*, Vol. 109, pp. 445 – 475, 2007.

[5] B. Gärtner and J. Matoušek. *Approximation Algorithms and Semidefinite Programming.* Springer, 2012.

[6] T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, Vol. 30, pp. 1307 – 1317, 1994.

[7] I. Masubuchi, A. Ohara, and N. Suda. LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, Vol. 8, No. 8, pp. 669 – 686, 1998.

[8] G. Pataki. *Strong duality in conic linear programming: facial reduction and extended dual*, Vol. 50 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, pp. 613–634. Springer New York, 2013.

[9] M. V. Ramana, L. Tunçel, and H. Wolkowicz. Strong duality for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 7, No. 3, pp. 641 – 662, 1997.

[10] J. Renegar. Linear programming, complexity theory, and elementary functional analysis. *Mathematical Programming*, Vol. 70, No. 3, pp. 279 – 351, 1995.

[11] J. Renegar. *A Mathematical view of Interior-Point Methods in Convex Optimization.* SIAM, 2001.

[12] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, 1970.

[13] C. W. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 7, pp. 896 – 911, 1997.

[14] Y. Sekiguchi and H. Waki. Perturbation analysis of singular semidefinite program and its application to a control problem. arxiv:1607.05568, 2016.

[15] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods & Software*, Vol. 11, pp. 625 – 653, 1999.

[16] K. C. Toh, M. Todd, and R. H. Tütüncü. SDPT3 — a Matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods & Software*, Vol. 11, pp. 545 – 581, 1999.

[17] H. Waki and M. Muramatsu. Facial reduction algorithms for conic optimization problems. *Journal*

of Optimization Theory and Applications, Vol. 158, pp. 188 – 215, 2013.

[18] H. Waki and N. Sebe. Application of facial reduction to H_∞ state feedback control problem. https://arxiv.org/abs/1606.03529.

[19] M. Yamashita, K. Fujisawa, and M. Kojima. Implementation and evaluation of SDPA 6.0 (semidefinite programming algorithm 6.0). *Optimization Methods & Software*, Vol. 18, pp. 491 – 505, 2003.

[20] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp. 301 – 320, 1981.

[21] 木村英紀. H_∞ 制御. コロナ社, 2000.

[22] 蛯原義雄. LMI によるシステム制御. 森北出版, 2012.

[23] 原辰次. ロバスト制御理論の回顧と展望. Vol. 49, No. 1, pp. 63 – 69, 1 月 2001.