数理解析研究所講究録
第2028巻 2017年 59-61

Fluctuation Relations of Fitness and Information (Resume)

Tetsuya J. Kobayashi
東京大学生産技術研究所

1 背景

生体システムは様々な環境変動に巧みに適応する。適応の作用機序として主に２つの機構が知られている。一つは異なる振る舞い・状態を持つ集団内の個体が増殖や死滅率の違いによって環境依存的に選択をされ、結果的に集団が適応する進化的適応。もう一つは個々の細胞や個体が積極的に環境に関連する情報を収集して環境の変動を予測し、より適した振る舞いや状態を選択する予測的適応である。前者は進化理論と、後者は脳などの生体情報処理と関連が深い。本研究では、この２つを統合的に扱った文献 [1] の概要について紹介する。

2 モデル

時刻 t における細胞や個体の状態を $x(t)$, 環境の状態を $y(t)$、そして細胞や個体が観測によって得られる環境に関する情報を $z(t)$ とする。細胞が環境を観測し経路 $\mathcal{Z}_t \equiv \{z(t')|t' \in [0,t]\}$ を観測した場合、細胞状態の時間発展経路 $\mathcal{X}_t \equiv \{x(t')|t' \in [0,t]\}$ が生成する確率を $\mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t|\mathcal{Z}_t]$ とする。また、環境変動の経路 $\mathcal{Y}_t \equiv \{y(t')|t' \in [0,t]\}$ のもとで細胞状態の時間発展経路 $\mathcal{X}_t$ を持つ細胞が生産する平均的な子孫数を $e^{\mathbb{K}[\mathcal{X}_t,\mathcal{Y}_t]}$ とする。この時細胞集団としての集団増殖率 $\Psi[\mathcal{Y}_t,\mathcal{Z}_t]$ は $\Psi[\mathcal{Y}_t,\mathcal{Z}_t] = \ln\left\langle e^{\mathbb{K}[\mathcal{X}_t,\mathcal{Y}_t]}\right\rangle_{\mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t|\mathcal{Z}_t]}$ と表される。ここで、$\langle\cdot\rangle_{\mathbb{P}[\mathcal{X}_t]}$ は $\mathbb{P}[\mathcal{X}_t]$ による平均を表す。環境変動 $\mathcal{Y}_t$、およびそれを観測して観測 $\mathcal{Z}_t$ が得られる確率として $\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t,\mathcal{Z}_t]$ を導入する。この時、観測 $\mathcal{Z}_t$ を用いないで平均集団増殖率を最大化させるような $\mathbb{P}_F$ を $\mathbb{P}_F^{\dagger}$ とし、以下のように定義する：

$$\mathbb{P}_F^{\dagger}[\mathcal{X}_t] \equiv \arg\max_{\mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t]} \langle\Psi[\mathcal{Y}_t]\rangle_{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t]}.$$

また、観測 $\mathcal{Z}_t$ を用いて平均集団増殖率を最大化させるような $\mathbb{P}_F$ を $\mathbb{P}_F^*$ とし、以下のように定義する：

$$\mathbb{P}_F^*[\mathcal{X}_t] \equiv \arg\max_{\mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t|\mathcal{Z}_t]} \langle \Psi[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t] \rangle_{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]}.$$

3 主結果

細胞状態変化の経路 $\mathcal{X}_t$ が生成される確率 $\mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t|\mathcal{Z}_t]$ に対して、増殖の影響を考慮し集団を遡及的に観測した場合に、経路 $\mathcal{X}_t$ が観測される遡及的経路確率 $\mathbb{P}_B[\mathcal{X}_t|\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]$ は

$$\mathbb{P}_B[\mathcal{X}_t|\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t] = e^{\mathbb{K}[\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t] - \Psi[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]} \mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t|\mathcal{Z}_t],$$

となる。

まず細胞が $\mathcal{Z}_t$ を利用できない場合を考える。この時、$\mathbb{P}_F^\dagger$ のもとでの増殖率 $\Psi^\dagger$ に対して、$\mathbb{P}_F^\dagger$ と同じサポートを持つ任意の $\mathbb{P}_F$ について、ゆらぎ関係

$$e^{-\Delta\Psi[\mathcal{Y}_t]} = \frac{\left\langle \mathbb{P}_B^\dagger[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t] \right\rangle_{\mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t]}}{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t]}$$

が成り立つ。ここで $\Delta\Psi[\mathcal{Y}_t] \equiv \Psi^\dagger[\mathcal{Y}_t] - \Psi[\mathcal{Y}_t]$ であり、$\mathbb{P}_B^\dagger[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t] \equiv \frac{\mathbb{P}_B^\dagger[\mathcal{X}_t|\mathcal{Y}_t]\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t]}{\sum_{\mathcal{Y}_t} \mathbb{P}_B^\dagger[\mathcal{X}_t|\mathcal{Y}_t]\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t]}$ である。この関係式は集団増殖率の差 $\Delta\Psi[\mathcal{Y}_t]$ がどのようにゆらぐのかについての情報を与え、この式から直ちに

$$\left\langle e^{-\Delta\Psi[\mathcal{Y}_t]} \right\rangle_{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t} = 1, \qquad \langle \Delta\Psi[\mathcal{Y}_t] \rangle_{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t]} = \mathcal{D}[\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t] | \left\langle \mathbb{P}_B^\dagger[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t] \right\rangle_{\mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t]}]$$

が成立することがわかる。ここで $\mathcal{D}$ は Kullback-Leibler 情報量である。

一方、$\Delta\Psi[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t] \equiv \Psi^*[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t] - \Psi[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]$ についても同様に

$$e^{-\Delta\Psi[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]} = \frac{\langle \mathbb{P}_B^*[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t, \mathcal{Z}_t] \rangle_{\mathbb{P}_F[\mathcal{X}_t|\mathcal{Z}_t]}}{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t|\mathcal{Z}_t]}$$

が成立する。$\mathbb{P}_B^*[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t, \mathcal{Z}_t] \equiv \frac{\mathbb{P}_B^*[\mathcal{X}_t|\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]}{\sum_{\mathcal{Y}_t} \mathbb{P}_B^\dagger[\mathcal{X}_t|\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]}$ である。

今、$\Psi[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]$ として $\Psi^\dagger[\mathcal{Y}_t]$ を選ぶことにより、

$$e^{-(\Psi^\dagger[\mathcal{Y}_t] + i[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t] - \Psi^*[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t])} = \frac{\mathbb{P}_B^\dagger[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t]}{\mathbb{P}_B^*[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t, \mathcal{Z}_t]}, \tag{1}$$

が得られる。$i[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t] \equiv \ln \frac{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t]}{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t]\mathbb{Q}[\mathcal{Z}_t]}$ である。ここから

$$\left\langle \Psi^{\dagger}[\mathcal{Y}_t] \right\rangle_{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t]} + \mathcal{I}^{\mathcal{Y},\mathcal{Z}} - \left\langle \Psi^{*}[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t] \right\rangle_{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t,\mathcal{Z}_t]} = \left\langle \mathcal{D}[\mathbb{P}^{*}_{B}[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t] | \mathbb{P}^{\dagger}_{B}[\mathcal{Y}_t|\mathcal{X}_t]] \right\rangle_{\mathbb{P}^{*}_{B}[\mathcal{X}_t]} \geq 0$$

が得られる。$\mathcal{I}^{\mathcal{Y},\mathcal{Z}}$ は $\mathcal{Y}_t$ と $\mathcal{Z}_t$ の相互情報量である。したがって、

$$\left\langle \Psi^{*}[\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t] \right\rangle_{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t,\mathcal{Z}_t]} - \left\langle \Psi^{\dagger}[\mathcal{Y}_t] \right\rangle_{\mathbb{Q}[\mathcal{Y}_t]} \leq \mathcal{I}^{\mathcal{Y},\mathcal{Z}}$$

の様に、選択によって変化する集団増殖率が、観測によって得られる情報量によって定量的に限定されることがわかる。上記は平均的な挙動についてであるが、式 (1) は、各環境および観測の実現ごとに、集団増殖率の差と観測によって得られる情報との間に成り立つ関係を規定する。

4 まとめ

本研究では、生体適応の 2 つの機構に着目し、その両者をつなぐ関係性 (式 1) が、集団の遡及的な経路確率を考えることにより、自然と導かれることを示した。これらの関係を活用して、生体適応におけるゆらぎに成り立つ関連を導き出すことが今後の課題となる。

文献

[1] Tetsuya J. Kobayashi & Yuki Sughiyama, "Fluctuation Relations of Fitness and Information in Population Dynamics", *Phys. Rev. Lett.*, **115**(23), 238102, (2015).