

# DLA に関する数学の話題

矢野孝次 (京都大学大学院理学研究科)  
Graduate School of Science, Kyoto University.

DLA は Diffusion-Limited Aggregation の略で、日本語では拡散律速凝集と呼ばれる (cf. [30]). 始めに一点に置かれた粒子を核とし、無限遠からランダムに放たれた粒子が吸着していくことでクラスターが成長していく過程を言う。それは1981年に Witten-Sander ([28],[29]) によりパターン形成の単純なモデルとして導入されたもので、シミュレーションによって樹木のような形状が現れることから、フラクタル的な性質が注目された。

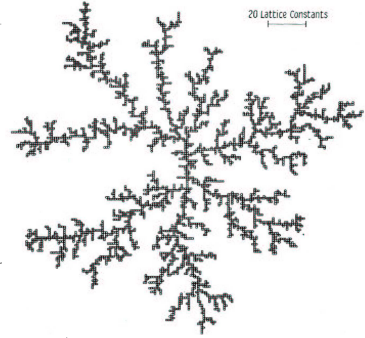


図 1: Witten-Sander [28], pp.1401 より. 平面正方形格子上で 3600 粒子のランダム凝集.

本稿では、DLA とその類似のモデルに関する数学的研究について概観する (証明手法に踏み込まず結果の羅列でしかなくことを予めお断りします). なお、DLA の解説として [4] および [31] も参照されたい。

## 1 正方形格子

粒子は格子点を中心にして配置された幅 1 の立方体とみなし、粒子同士が側面で接触したときに吸着することでクラスターが成長する過程を考える。集合  $A \subset \mathbb{Z}^d$  の境界を、 $A$  の隣接点の全体、すなわち

$$\partial A = \{y \in A^c : \exists x \in A, |y - x| = 1\} \tag{1.1}$$

で定める。但し、 $A^c = \mathbb{Z}^d \setminus A$  とし、 $|\cdot|$  は Euclid ノルムを表す。集合  $A$  ごとに境界  $\partial A$  上の確率分布  $\mu_{\partial A}$  (以下では仮に境界分布と呼ぶ) が与えられたとき、クラスター成長の過程  $\{A_n\}$  が次のように定まる。それは  $\mathbb{Z}^d$  の部分集合値のマルコフ過程であって、クラスターの推移確率、すなわちクラスター  $A_n$  の隣接点  $y$  に新しい粒子が一つ吸着してクラスター  $A_{n+1}$  に成長する確率が、

$$P(A_{n+1} = A_n \cup \{y\} \mid A_n) = \mu_{\partial A_n}(y) \tag{1.2}$$

によって与えられるものである。但し、左辺は確率変数  $A_n$  による条件付き確率を表す。言い換えると、各時刻に粒子が吸着する場所  $Y_1, Y_2, \dots$  が

$$P(Y_{n+1} = y \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) = \mu_{\partial\{0, y_1, \dots, y_n\}}(y) \tag{1.3}$$

を満たすということに他ならない。以下では、初期値  $A_0$  は原点の一点集合としておく。

Witten-Sander [29] で引き合いに出されているが、クラスター成長の最も単純なモデルに **Eden モデル** ([10],1961) がある。それは境界点のうちから一様分布に従って一点ずつ選んで粒子が吸着していく過程であり、言い換えると、境界分布として  $\partial A$  上の一様分布を選ぶことによって得られる、すなわち、推移確率が

$$P(A_{n+1} = A_n \cup \{y\} \mid A_n) = \frac{1}{|\partial A_n|} \quad (1.4)$$

によって与えられるものである。但し、 $|B|$  は集合  $B$  の点の個数を表す。

Witten-Sander の DLA を数学的に定式化するには、「無限遠からランダムに放たれた粒子の吸着」を境界分布によって表現する必要がある。これは格子上のランダムウォークの到達確率の極限として捉えることができる。Kesten ([15],[16],1987;[17],1990) および Lawler ([20, §2],1991) の数学モデル(これを仮に **DLA 過程**と呼ぶ)と結果を紹介する。

( $\{S_n\}, P_x$ ) を  $\mathbb{Z}^d$  上の  $x$  出発単純ランダムウォークとする。空でない  $B \subset \mathbb{Z}^d$  に対し

$$T_B = \inf\{n \geq 1 : S_n \in B\} \quad (1.5)$$

と定め、これを集合  $B$  への到達時刻と呼ぶ。但し、 $\inf \emptyset = \infty$  と約束、すなわち到達しないことを到達時刻が無限大と理解する。従って  $T_B < \infty$  ならば、到達点  $S_{T_B}$  は  $B$  に属する点である。二点  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  に対し

$$H_B(x, y) = P_x(S_{T_B} = y \mid T_B < \infty) := \frac{P_x(S_{T_B} = y, T_B < \infty)}{P_x(T_B < \infty)} \quad (1.6)$$

と定める。従ってとくに  $\sum_{y \in B} H_B(x, y) = 1$  であり、 $H_B(x, \cdot)$  は、点  $x$  から放たれた粒子が集合  $B$  に到達するときの到達点の確率分布を表す。Spitzer ([25],1976) の結果を用いると、 $d \geq 2$  であれば、極限

$$H_B(\infty, y) := \lim_{|x| \rightarrow \infty} H_B(x, y) \quad (1.7)$$

が収束して  $B$  上の確率分布を与えることがわかる。 $H_B(\infty, \cdot)$  は調和測度と呼ばれ、無限遠から放たれた粒子が集合  $B$  に到達するときの到達点の確率分布を表す。 $d \geq 3$  のとき、無限遠から  $B$  への到達点  $y$  である確率は

$$H_B(\infty, y) = \frac{P_y(T_B = \infty)}{\sum_{x \in B} P_x(T_B = \infty)} \quad (1.8)$$

すなわち  $y$  から出発して  $B$  に到達しない確率に比例する。別表現として、

$$g_B(y) = P_y(T'_B = \infty), \quad T'_B = \inf\{n \geq 0 : S_n \in B\} \quad (1.9)$$

および  $\nabla f(y) = E_y[f(S_1) - f(S_0)]$  とおくと、 $\nabla g_B(y) = P_y(T_B = \infty)$  となることから

$$H_B(\infty, y) = \frac{\nabla g_B(y)}{\sum_{x \in B} \nabla g_B(x)} \quad (1.10)$$

と表すこともできる. 式(1.10)は,  $B$ が有限集合ならば,  $d=2$ の場合でも

$$g_B(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \log n \right) P_y(T_B > T_{B_n^c}) \quad (1.11)$$

として成立する. 但し  $B_n$  は半径  $n$  の球  $B_n := \{x \in \mathbb{Z}^d : |x| < n\}$  とした.

こうして得られた  $H_{\partial A}(\infty, \cdot)$  を境界分布として選択することで, 無限遠から  $A$  への吸着点の確率分布を表現することができる. すなわち DLA 過程とは推移確率が

$$P(A_{n+1} = A_n \cup \{y\} \mid A_n) = H_{\partial A_n}(\infty, y) \quad (1.12)$$

によって与えられるものである.

上述の Kesten および Lawler の論文では, クラスタ半径

$$R_n := \max\{|x| : x \in A_n\} \quad (1.13)$$

の増加速度の上からの評価  $R_n \lesssim f(n)$  が確率 1 で成立するような  $f(n)$  を求めている:

	$d=2$	$d=3$	$d \geq 4$
Kesten (1987)	$n^{2/3}$	$n^{2/d}$	
Kesten (1990)	—	$n^{1/2}(\log n)^{1/2}$	$n^{2/(d+1)}$
Lawler (1991)	—	$n^{1/2}(\log n)^{1/4}$	—

但し,  $R_n \lesssim f(n)$  とは, ある (ランダムでない) 定数  $c$  が存在して, 確率 1 で十分大きな  $n$  に対し  $R_n \leq cf(n)$  が成り立つこととする. 評価は年を追って少しずつ改良されているとは言え, シミュレーションによる予想 (cf. [15, Remark 2]) では  $R_n$  の増大度が  $n^{(d+1)/(d^2+1)}$  と見積もられていることと比べると, 数学的に厳密な結果はずっと弱い.

上からの評価を得る途中過程において, 固定した半直線  $U^+$  と伸びていく線分  $U_n^+$

$$U^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^d : x_1 \geq 0\}, \quad U_n^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x_1 < n\} \quad (1.14)$$

を考え, 時刻  $n$  までに  $U^+$  に到達しない確率および半径  $n$  の球  $B_n$  を脱するまでに  $U^+$  に到達しない確率の漸近挙動 (以下で  $f \asymp g$  は  $f \lesssim g$  かつ  $g \lesssim f$  の意味)

$$P_0(T_{U^+} > n) \asymp \begin{cases} n^{-1/4} & (d=2) \\ (\log n)^{-1/2} & (d=3) \end{cases} \quad P_0(T_{U^+} > T_{B_n^c}) \asymp \begin{cases} n^{-1/2} & (d=2) \\ (\log n)^{-1/2} & (d=3) \end{cases} \quad (1.15)$$

を求め, それらを用いて  $U_n^+$  への到達時刻の漸近挙動

$$P_0(T_{U_n^+} > T_{B_{2n}^c}) \asymp \begin{cases} n^{-1/2} & (d=2) \\ (\log n)^{-1/2} & (d=3) \end{cases} \quad (1.16)$$

を導出し、無限遠から  $U_n^+$  への到達点が原点である確率の漸近挙動

$$H_{U_n^+}(\infty, 0) \asymp \begin{cases} n^{-1/2} & (d=2) \\ n^{-1}(\log n)^{1/2} & (d=3) \end{cases} \quad (1.17)$$

を得ている。これらの式を単純でないランダムウォークに一般化した結果として、深井 [12],[13] (cf. [32]), 内山 [27],[26] がある。

**注 1.1.** 部分集合  $B \subset \mathbb{Z}^d$  に対し、補集合  $B^c$  の有限連結成分を穴と呼び、その数を  $H(B)$  と書く。DLA 過程に対して、 $A_n$  における穴は  $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$  においてもやはり穴であるから、穴の数  $H(A_n)$  は増加する。 $d=2$  において、確率 1 で  $H(A_n) \rightarrow \infty$  が成り立つことが知られている (Eberz-Wagner [9, Corollary 3.1.1])。

• **Directed DLA** (略して DDLA). DDLA 過程とは、DLA 過程に類似のクラスター成長過程であって、 $\mathbb{Z}^2$  の無限遠から放たれた粒子が各時刻で左方向または下方向に等確率で移動 (これを仮に有向ランダムウォークと呼ぼう) してきて原点に吸着していく過程であり、クラスターは第一象限  $\mathbb{Z}_+^2 = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i, j \geq 0\}$  において成長する。

有限集合  $B \subset \mathbb{Z}_+^2$  に対して調和測度は

$$H_B(\infty, y) = P_{U_{L_k}}(S_{T_B} = y \mid T_B < \infty), \quad y \in B \quad (1.18)$$

で与えられる。但し、 $L_k$  は二点  $(0, k), (k, 0)$  を結ぶ線分で、 $k$  は  $L_k$  の下部領域が  $B$  を含むくらい大きい数とし、 $(\{S_n\}, P_{U_{L_k}})$  は初期分布を  $L_k$  上の一様分布とする有向ランダムウォークを表す。DDLA 過程は、 $\mathbb{Z}_+^2$  上のクラスター成長過程であって、推移確率が

$$P(A_{n+1} = A_n \cup \{y\} \mid A_n) = H_{\partial A_n}(\infty, y) \quad (1.19)$$

で与えられる。DDLA 過程のクラスター最大高さ

$$h(A_n) = \inf\{k : L_k \text{ の下部領域が } A_n \text{ を含む}\} \quad (1.20)$$

について、次が知られている。

**定理 1.2** (Martineau [24, Proposition 4.1]).  $\sqrt{2n} \lesssim h(A_n) \lesssim n^{2/3}$  a.s.

• **Internal DLA.** Internal DLA は Diaconis-Fulton ([8], 1982) で初めて導入され、数多くの研究がある (“Internal DLA” で検索すると大量に見つかる)。また、Internal DLA に類似の決定論的モデルに rotor-router モデルがある (例えば Levine-Peres [23] を見よ)。



図 2: Martineau [24, version 2], pp.4 より. DDLA 過程のクラスター, by Vincent Beffara. (反時計回りに 45 度回転したもの。粒子は無限上方から下方に降りて来て吸着していく。)

Internal DLA とは、正方格子上的のクラスター成長過程であって、推移確率が

$$P(A_{n+1} = A_n \cup \{y\} \mid A_n) = H_{\partial A_n}(0, y) \quad (1.21)$$

で与えられるものである。すなわち、新しい粒子は無限遠からではなく原点から発生してクラスターの内部を動き、境界に到達した点に吸着していく過程である。

Internal DLA においては、確率 1 で総クラスター  $A_\infty = \bigcup_n A_n$  が  $\mathbb{Z}^d$  全体に一致する。この意味では、Internal DLA は Eden モデルに近く、DLA 過程とは異なる様相を示す。一方で、クラスターの成長過程における形状に着目すると、次が知られている。

**定理 1.3 (Lawler–Bramson–Griffeath ([21],1992)).** 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、確率 1 で、

$$B(0; n(1 - \varepsilon)) \subset A_{[\omega_d n^d]} \subset B(0; n(1 + \varepsilon)) \quad \text{for large } n \quad (1.22)$$

が成り立つ。但し、 $\omega_d$  は  $d$  次元 Euclid 空間における単位球の体積、 $B(a; r)$  は  $a$  中心で半径  $r$  の球、 $[x]$  は  $x$  を超えない最大の整数を表す。

この定理により、Internal DLA のクラスターは球状になって成長していて、半径の増大度が  $n^{1/d}$  のオーダーであることがわかる。Eden モデルのクラスターは  $d$  が大きいとき球状でない (Dhar [7]) ため、この意味では Internal DLA は Eden モデルとも異なる様相を示す。

## 2 一次元格子

一次元の場合、前節の意味での調和測度は存在しない。実際、正の無限遠から来る粒子は  $B$  の右端の点に、負の無限遠からは左端の点に吸着するから、 $H_B(x, y)$  に対して  $|x| \rightarrow \infty$  の極限が存在しない。一次元の場合は前節とは異なる定式化が必要である。

Kesten–Sidoravicius ([18],[19],2008) は、一次元格子上でランダムウォークをする多数の粒子が原点に吸着していくときの速さを論じている。ここでは詳しく触れない。

Amir–Angel–Benjamini–Kozma [1], Amir–Angel–Kozma [2], Amir [3] は一次元格子上的のクラスター成長が長距離ランダムウォークによって与えられる場合を論じた。長距離 (long range) というのは、いくらでも大きな跳びを持ち得ることを表す。このモデルでは、まず等確率で正と負の無限遠を選択しそこから長距離ランダムウォークする粒子が、前のクラスターに到達する直前の場所で固着することでクラスターが成長する。ここで言うクラスターは必ずしも連結性を持たないことに注意しよう。以下でもう少し詳しく述べる。

$(\{S_n\}, P_x)$  は  $\mathbb{Z}$  上の再帰的なランダムウォークとし、 $p(x) := P_0(S_1 = x)$  とおく (このとき推移確率は  $p(y - x) = P_x(S_1 = y)$  で与えられる)。Spitzer ([25],1976) の結果を用いると、有限集合  $A \subset \mathbb{Z}$  と  $a \in A$  および  $y \in A^c$  に対し、二つの極限

$$H_A(+\infty, y) := \lim_{x \rightarrow +\infty} P_x(S_{T_A-1} = y), \quad H_A(-\infty, y) := \lim_{x \rightarrow -\infty} P_x(S_{T_A-1} = y) \quad (2.1)$$

がともに存在する ([1, Lemma 2.1]). そこで

$$H_A(\infty, y) := \frac{1}{2} \{H_A(+\infty, y) + H_A(-\infty, y)\} \quad (2.2)$$

と定め, クラスター成長の過程  $\{A_n\}$  の推移確率を

$$P(A_{n+1} = A_n \cup \{y\} \mid A_n) = H_{A_n}(\infty, y) \quad (2.3)$$

によって与える. こうして得られた  $\{A_n\}$  を long range DLA 過程と呼ぶ. クラスター半径  $R_n$  を式 (1.13) で定める.

**定理 2.1** ([1, Theorem 1],[2, Theorem 1]). ランダムウォークは対称 (すなわち推移確率が  $p(-x) = p(x)$  を満たす) とし, かつ定数  $\alpha, c > 0$  に対して

$$p(k) = (c + o(1))k^{-1-\alpha} \quad \text{as } k \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

と仮定する. このとき, 以下の  $(\alpha, \beta)$  の値に対し, 確率 1 で  $R_n = n^{\beta+o(1)}$  が成り立つ:

$0 < \alpha < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < \alpha < 1$	$1 < \alpha < 2$	$2 < \alpha < 3$	$\alpha \geq 3$
$\beta = \frac{1}{\alpha}$		$\beta = 2$	$\beta = \frac{2}{\alpha-1}$	$\beta = 1$

なお,  $\frac{1}{3} < \alpha < 1$  のときは少し弱い評価であるが,  $\beta = \max\{2, \frac{1}{\alpha}\}$ ,  $\beta' = \frac{2}{\alpha(2-\alpha)}$  として  $n^{\beta+o(1)} \leq R_n \leq n^{\beta'+o(1)}$  が成り立つ.

$\alpha > 2$  のときは分散が有限であるからランダムウォークのスケール極限はブラウン運動に収束するが, long range DDL 過程のクラスター半径の増大速度は  $\alpha = 3$  の前後で異なる様相を示す. また, 総クラスター  $A_\infty = \bigcup_n A_n$  の密度について次が得られている.

**定理 2.2** ([3, Theorems 1 and 2]). 仮定 (2.4) の下で, 確率 1 で次が成り立つ:

(i)  $\alpha > 3$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_\infty \cap [-n, n]|}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{R_n}$  (ランダムでない定数に収束)

(ii)  $2 < \alpha < 3$  のとき,  $|A_\infty \cap [-n, n]| = n^{\frac{\alpha-1}{2}+o(1)}$

### 3 有限グラフのシリンダー

Benjamini-Yadin ([6], 2008) は有限グラフを底面とするシリンダー上で DLA 過程の類似を考察した. 彼らのモデルと結果を紹介する.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  とする.  $G = (V(G), E(G))$  を有限無向グラフとし,  $G$  を底面とするシリンダー  $G \times \mathbb{N}$  を以下で定まる無限無向グラフとする. 頂点集合は直積  $V(G \times \mathbb{N}) =$

$V(G) \times \mathbb{N}$ である. 各  $i \in \mathbb{N}$  に対して  $G_i = \{(v, i) : v \in V(G)\}$  と書き, これを第  $i$  階層と呼ぶ.  $G \times \mathbb{N}$  内の二点の隣接条件を以下で定める:

$$\begin{cases} (v, i) \sim (v', i) \iff v \sim v' & (\text{同一階層では } G \text{ 内での隣接と同値}) \\ (v, i) \sim (v', i+1) \iff v = v' & (\text{隣接階層では } G \text{ 成分が一致するときに隣接}) \\ k \geq 2 \implies (v, i) \not\sim (v', i+k) & (\text{2以上離れた階層の点は隣接しない}) \end{cases}$$

以下では,  $G$  は連結かつ  $d$ -正則グラフ ( $G$  の各頂点はちょうど  $d$  個の隣接点を持つ) と仮定する. このとき,  $G$  上の単純ランダムウォーク (隣接点に等確率で移動するマルコフ連鎖) の状態分布は一様分布に収束する. このことに着目すると, 有限部分集合  $B \subset V(G \times \mathbb{N})$  に対し,  $B$  の点が属する最大階層を  $G_m$  とすると, 調和測度は

$$H_B(\infty, (v, i)) = P_{U_{G_m}}(S_{T_B} = (v, i)), \quad (v, i) \in B \quad (3.1)$$

で与えられることがわかる. 但し,  $(\{S_n\}, P_{U_{G_m}})$  は初期分布を  $G_m$  上の一様分布とする  $G \times \mathbb{N}$  上の単純ランダムウォークである.  $G \times \mathbb{N}$  上の DLA 過程  $\{A_n\}$  は, 集合値のマルコフ連鎖であって, 初期値を  $A_0 = G_0$  とし, 推移確率が

$$P(A_{n+1} = A_n \cup \{(v, i)\} \mid A_n) = H_{\partial A_n}(\infty, (v, i)) \quad (3.2)$$

で与えられる. 下図のように, シミュレーションで樹木状のクラスターが現れる.

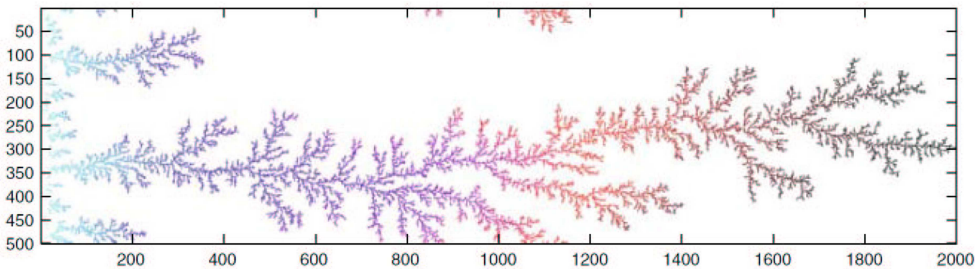


図 3: Benjamini-Yadin [6], pp.190 より.  $G$  が 500 個の点からなるサイクルグラフとした場合の DLA 過程のクラスター. 粒子数は約 64,400. (オリジナルはカラーで, 吸着した時間によって色分けされていると思われる.)

正方格子上の DLA 過程に対するクラスター半径  $R_n$  に相当するものとして, シリンダー上の DLA 過程に対してはクラスターの最大階層

$$M_n = \max\{i \in \mathbb{N} : A_n \cap G_i \neq \emptyset\} \quad (3.3)$$

が考えられるが, その代わりに, Benjamini-Yadin [6] は各階層へのクラスターの到達時間

$$T_m = \min\{n \geq 0 : A_n \cap G_m \neq \emptyset\} = \min\{n \geq 0 : M_n = m\} \quad (3.4)$$

の期待値の増大度を調べた。これもクラスター成長速度を測る尺度の一つと考えられる。 $G$  の混合時間  $m(G)$  を次で定める (よく用いられる定義 (cf. [22]) とは異なる):

$$m(G) = \min \left\{ n > 0 : \forall i, j \in V(G), \forall k \geq n, P(X_k = i \mid X_0 = j) \geq \frac{1}{2|G|} \right\}. \quad (3.5)$$

但し,  $|G|$  は  $G$  の頂点数を表す。

**定理 3.1 (Benjamini–Yadin [6, Theorem 2.1]).**  $d \geq 2$  とする。このとき, ある  $s_0 = s_0(d)$  が存在し,  $s > s_0$  で以下が成り立つ:  $G$  が頂点数  $s$  の  $d$ -正則グラフで

$$m(G) \leq \frac{(\log s)^2}{(\log \log s)^5} \quad (3.6)$$

ならば, 任意の  $m$  で

$$E[T_m] < \frac{4ms}{\log \log s} \quad (3.7)$$

が成り立つ。

[6] ではクラスをさらに限定して下からの評価も導いている ([6, Theorem 5.1]). また, 総クラスター  $A_\infty = \bigcup_n A_n$  に対する密度も論じている。エルゴード理論によって

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m|G|} \sum_{i=1}^m |A_\infty \cap G_i| \quad (3.8)$$

の右辺の極限が存在して a.s. で定数であり,

$$D = E[D] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m|G|} E[T_m] \quad (3.9)$$

が成り立つ ([6, Theorem 4.2]).

## 4 Poincaré 円板

Eldan ([11], 2015) は双曲平面上で DLA 過程の類似を考察した。それは, 粒子を半径 1 の球とみなし, 無限遠から Brown 運動する粒子が吸着していくモデルである。[11] では Poincaré 上半平面モデルで説明しているが, ここでは Poincaré 円板モデルで説明する。

双曲平面  $\mathbb{H}^2$  とは, (記号を濫用すると) 集合としては  $\mathbb{R}^2$  における単位円板  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  であり, 異なる二点  $a, b \in \mathbb{H}^2$  の間の距離を

$$d_{\mathbb{H}^2}(a, b) = \log \frac{d_{\mathbb{R}^2}(a, \beta) d_{\mathbb{R}^2}(b, \alpha)}{d_{\mathbb{R}^2}(a, \alpha) d_{\mathbb{R}^2}(b, \beta)} \quad (4.1)$$



と定めたものである。但し、 $d_{\mathbb{R}^2}$  は  $\mathbb{R}^2$  における Euclid 距離とし、二点  $\alpha, \beta \in \mathbb{H}^2(\infty) := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  を  $\alpha, a, b, \beta$  の順に通る円が  $\mathbb{H}^2(\infty)$  と直交するようにとる。例えば、原点  $o = (0, 0)$  と点  $a \in \mathbb{H}^2$  との距離は、 $r = d_{\mathbb{R}^2}(o, a)$  とおくと  $d_{\mathbb{H}^2}(o, a) = \log \frac{1+r}{1-r}$  で与えられ、 $r = d_{\mathbb{R}^2}(o, a) \uparrow 1$  とすると  $d_{\mathbb{H}^2}(o, a) \uparrow +\infty$  となる。集合  $\mathbb{H}^2(\infty)$  は Euclid 位相の意味では  $\mathbb{H}^2$  の境界であるが、距離  $d_{\mathbb{H}^2}$  に関しては無限遠点の集合 (理想境界) である。

無限遠点の一つでないため、調和測度が意味を持たないから、その類似物を考える。 $B \subset \mathbb{H}^2$  は (距離  $d_{\mathbb{H}^2}$  に関する) 球の有限和とし、 $\partial B$  上の関数  $m_{B, \mathbb{H}^2(\infty)}(a)$  を

$$m_{B, \mathbb{H}^2(\infty)}(a) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P \left( \begin{array}{l} \exp_a(\varepsilon v) \text{ を出発した Brown 運動が} \\ B \text{ に達することなく } \mathbb{H}^2(\infty) \text{ に達する} \end{array} \right) \quad (4.2)$$

とおく。ここで、 $T_a$  は  $a$  における  $\mathbb{H}^2$  の接空間、 $v \in T_a$  は  $a$  における  $\partial B$  の外向き法線ベクトル、 $\exp_a : T_a \rightarrow \mathbb{H}^2$  は指数写像とする ( $\mathbb{H}^2$  における Brown 運動については、例えば [14] を見よ)。 $\ell$  を  $\partial B$  上の standard length measure とし、

$$\mathcal{M}_B(D) := \mathcal{M}_{B, \mathbb{H}^2(\infty)}(D) := \int_D m_{B, \mathbb{H}^2(\infty)}(a) d\ell(a), \quad D \subset \partial B \quad (4.3)$$

と定める。これが調和測度の役割を果たす (式 (4.2) は式 (1.8) の類推である)。

$\mathbb{H}^2$  上の DLA 過程  $\{A_n\}$  は、集合値のマルコフ過程であって各  $n$  で  $A_n$  は  $n+1$  個の点からなるとし、初期値は  $A_0 = \{o\}$  で、推移確率が

$$P(A_{n+1} \in A_n \cup D \mid A_n) = \frac{\mathcal{M}_{B_n}(D)}{\mathcal{M}_{B_n}(\partial B_n)} \quad (4.4)$$

で与えられるものである。但し、

$$B_n = \bigcup_{a \in A_n} B(a; 2) \quad (4.5)$$

とし、 $B(a; r)$  は  $a$  中心で半径  $r$  の球を表すとする。各  $A_n$  はクラスターをなす粒子の中心点の集合を表しており、 $\tilde{A}_n := \bigcup_{a \in A_n} B(a; 1)$  がクラスターである。 $\tilde{A}_n$  に吸着した粒子の中心が  $a$  であることは、無限遠から Brown 運動してきて  $\partial B_n$  に到達した点が  $a$  であることに他ならない。

**定理 4.1** (Eldan [11, Theorem 1.1]). ある universal constant  $c > 0$  が存在して、確率 1 で、総クラスター  $A_\infty = \bigcup_n A_n$  の upper density は  $c$  以上である。すなわち、ある点  $a \in \mathbb{H}^2$  と数列  $r_n \uparrow \infty$  が存在して

$$|A_\infty \cap B(a; r_n)| \geq c\mu(B(a; r_n)), \quad \forall n \quad (4.6)$$

が成り立つ。但し、 $\mu$  は  $\mathbb{H}^2$  における standard Riemannian volume である。

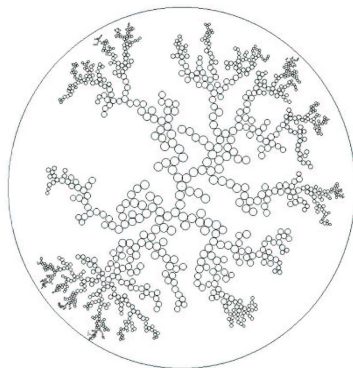


図 4: Eldan [11], pp.2086 より。Poincaré 円板モデルで見た粒子数 1000 の DLA 過程のクラスター。

## 5 tree

この節では, Barlow–Pemantle–Perkins ([5],1997) に基づき, tree 上の DLA 過程について述べる.

$\mathbb{B}$  を  $d$ -ary tree とする (2-ary=binary, 3-ary=trinary). すなわち,  $\mathbb{B}$  は root  $o \in \mathbb{B}$  を持つ無限無向グラフであって,  $o$  は  $d$  個の子と隣接していて,  $o$  以外の  $\mathbb{B}$  のすべての点の一つの親および  $d$  個の子と隣接しており, かつどの点からも親を辿っていくと  $o$  に辿り着く.

この場合も無限遠点の一つでないため, 調和測度の類似物を考えるのだが, ここでは「無限遠からの吸着」に拘らないことに注意しておこう. 固定したパラメタ  $\alpha > 0$  に対し,  $\mathbb{B}$  上の DLA 過程  $\{A_n\}$  は次のように定まる. それは集合値マルコフ連鎖であって, 初期値は  $A_0 = \{o\}$  であり, 推移確率が次で与えられるものである:

$$P(A_{n+1} = A_n \cup \{y\} \mid A_n) = \frac{\alpha^{-|y|}}{\sum_{x \in \partial A_n} \alpha^{-|x|}}. \quad (5.1)$$

但し,  $|x|$  は高さと呼ばれ,  $x$  と  $o$  とを結ぶ最短経路の長さを表す. この DLA 過程に対してクラスターの最大高さ  $R_n$  およびクラスターの補集合の最小高さ  $L_n$ ,

$$R_n = \max\{|x| : x \in A_n\}, \quad L_n = \min\{|x| : x \in A_n^c\} \quad (5.2)$$

の増加速度に着目する. 以下では,  $a_n \sim b_n$  は  $a_n/b_n \rightarrow 1$  を表すとし, 結果を列挙しよう. 文献については [5] を参照されたい.

**定理 5.1** (Pittel (1984), Devroye (1986)).  $d = 2$  かつ  $\alpha = 1$  のとき, 確率 1 で

$$R_n \sim \beta_1 \log_2 n, \quad L_n \sim \beta_0 \log_2 n. \quad (5.3)$$

但し,  $\beta_1 = 4.311\dots$  および  $\beta_0 = 0.373\dots$  はいずれも方程式  $\frac{1}{2}\beta e^{(1-\beta)/\beta} = 1$  の解.

**定理 5.2** (Aldous–Shields (1988)).  $d = 2$  かつ  $\alpha > 1$  のとき, 確率 1 で

$$R_n \sim L_n \sim \log_2 n. \quad (5.4)$$

**定理 5.3** (Barlow–Pemantle–Perkins (1997)).  $d \geq 2$  かつ  $0 < \alpha < 1$  のとき,

$$R_n \sim \mu_0(\alpha, d)n, \quad \sup_n L_n < \infty \quad (5.5)$$

が確率 1 で成り立つ. 但し,  $\mu_0(\alpha, d)$  は  $\alpha$  と  $d$  に依存する正の定数である. また,  $R_n$  について中心極限定理も成立する.

$\alpha > 1$  のときは, 高さが大きいほど吸着しにくい.  $\alpha = 1$  のときは, 吸着しやすさが境界点について一様であるので, Eden モデルの類似と言える. いずれの場合も  $L_n$  が発散するので, 総クラスター  $A_\infty$  は tree 全体  $\mathbb{B}$  に一致しており, Eden モデルに近く, 正方格子上の DLA 過程とは異なる様相を示す.  $0 < \alpha < 1$  のときは高さが大きいほど吸着しやすく, 正方格子上の DLA 過程に近いと言えそうである.

## 参考文献

- [1] G. Amir, O. Angel, I. Benjamini, and G. Kozma. One-dimensional long-range diffusion-limited aggregation I. *Ann. Probab.*, 44(5):3546–3579, 2016.
- [2] G. Amir, O. Angel, and G. Kozma. One-dimensional long-range diffusion limited aggregation II: the transient case. Preprint. arXiv:1306.4654.
- [3] G. Amir. One-dimensional long-range diffusion-limited aggregation III – the limit aggregate. Preprint. arXiv:0911.0122.
- [4] M. T. Barlow. Fractals, and diffusion-limited aggregation. *Bull. Sci. Math.*, 117(1):161–169, 1993.
- [5] M. T. Barlow, R. Pemantle, and E. A. Perkins. Diffusion-limited aggregation on a tree. *Probab. Theory Related Fields*, 107(1):1–60, 1997.
- [6] I. Benjamini and A. Yadin. Diffusion limited aggregation on a cylinder. *Comm. Math. Phys.*, 279(1):187–223, 2008.
- [7] D. Dhar. Asymptotic shape of Eden clusters. In: *On growth and form; Fractal and non-fractal patterns in physics*, pages 288–292. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- [8] P. Diaconis and W. Fulton. A growth model, a game, an algebra, Lagrange inversion, and characteristic classes. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 49(1):95–119 (1993), 1991. Commutative algebra and algebraic geometry, II (Italian) (Turin, 1990).
- [9] D. M. Eberz-Wagner. *Discrete growth models*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1999. Thesis (Ph.D.)—University of Washington.
- [10] M. Eden. A two-dimensional growth process. In *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Vol. IV*, pages 223–239. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1961.
- [11] R. Eldan. Diffusion-limited aggregation on the hyperbolic plane. *Ann. Probab.*, 43(4):2084–2118, 2015.
- [12] Y. Fukai. Hitting time of a half-line by two-dimensional random walk. *Probab. Theory Related Fields*, 128(3):323–346, 2004.
- [13] Y. Fukai. Hitting time of a half-line by a two-dimensional non-symmetric random walk. *Kyushu J. Math.*, 69(1):145–171, 2015.
- [14] N. Ikeda and H. Matsumoto. Brownian motion on the hyperbolic plane and Selberg trace formula. *J. Funct. Anal.*, 163(1):63–110, 1999.
- [15] H. Kesten. How long are the arms in DLA? *J. Phys. A*, 20(1):L29–L33, 1987.
- [16] H. Kesten. Hitting probabilities of random walks on  $\mathbf{Z}^d$ . *Stochastic Process. Appl.*, 25(2):165–184, 1987.
- [17] H. Kesten. Upper bounds for the growth rate of DLA. *Phys. A*, 168(1):529–535, 1990.
- [18] H. Kesten and V. Sidoravicius. A problem in one-dimensional diffusion-limited aggregation (DLA) and positive recurrence of Markov chains. *Ann. Probab.*, 36(5):1838–1879, 2008.

- [19] H. Kesten and V. Sidoravicius. Positive recurrence of a one-dimensional variant of diffusion limited aggregation. In *In and out of equilibrium. 2*, volume 60 of *Progr. Probab.*, pages 429–461. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [20] G. F. Lawler. *Intersections of random walks*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- [21] G. F. Lawler, M. Bramson, and D. Griffeath. Internal diffusion limited aggregation. *Ann. Probab.*, 20(4):2117–2140, 1992.
- [22] D. A. Levin, Y. Peres, and E. L. Wilmer. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. With a chapter by James G. Propp and David B. Wilson.
- [23] L. Levine and Y. Peres. Spherical asymptotics for the rotor-router model in  $\mathbb{Z}^d$ . *Indiana Univ. Math. J.*, 57(1):431–449, 2008.
- [24] S. Martineau. Directed diffusion-limited aggregation. arXiv:1411.3667.
- [25] F. Spitzer. *Principles of random walk*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1976. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 34.
- [26] K. Uchiyama. The hitting distributions of a half real line for two-dimensional random walks. *Ark. Mat.*, 48(2):371–393, 2010.
- [27] K. Uchiyama. The hitting distributions of a line for two dimensional random walks. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(5):2559–2588, 2010. Erratum: *Ark. Mat.*, 50(1):199–200, 2012.
- [28] T. A. Witten and L. M. Sander. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 47(19):1400–1403, 1981.
- [29] T. A. Witten and L. M. Sander. Diffusion-limited aggregation. *Phys. Rev. B* (3), 27(9):5686–5697, 1983.
- [30] 高安秀樹・本田勝也・佐野雅己・田崎晴明・村山和郎・伊藤敬祐. フラクタル科学. 朝倉書店, 1987.
- [31] 服部哲弥. DLA 関連講演に寄せて. 科研費研究会 (1994.1) 報告.  
<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/dla.pdf>.
- [32] 深井康成. DLA モデルとランダムウォークの到達確率. 応用数理, 13(2):104–113, 2003.