数理解析研究所講究録
第2028巻 2017年 81-90

円周上のランダム拡大写像の歴史的挙動
Historic behaviour for random expanding maps on the circle

大阪市立大学・数学研究所

中野雄史

Advanced Mathematical Institute, Osaka City University
Yushi Nakano

概要

Takens は円周上の拡大写像について，歴史的挙動を示すような初期値全体の集合が相空間上で残留的となることを示した．本稿ではこの円周上の拡大写像の統計的性質が，急冷型ランダム微小摂動によって保存されることを報告する．証明はランダムな Markov 分割を構成することで得られるが，この分割の存在は（折畳み写像との位相共役に関する）ランダムな設定における Shub の定理を示すことにより保証される．この副産物として，円周上のランダム拡大写像の絶対連続でエルゴード的な不変確率測度に関する新しい公式を得る．

1 はじめに

M をコンパクトで滑らかな Riemann 多様体とする．力学系 $f : M \to M$ について，$x \in M$ を初期値とする軌道が歴史的挙動を示すとは，時間平均

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

が存在しないような連続関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}$ が見つかることをいう．様々な統計量は対応する観測量の時間平均として与えられるため，歴史的な挙動を示す初期値の集合が何らかの意味で無視できるかどうかは力学系理論において自然な問題となる；典型的には，正規化された Lebesgue 測度について測度正の集合となるかどうかが問われる．Takens は [11] の中で歴史的挙動を示す初期値の集合が測度正になるような頑強な（persistent）力学系が存在すると予想したが，これは現時点では未解決問題である．この測度論的な歴史的挙動の問題の背景については [5, 10, 11] を参考にされたい；Hofbauer-Keller [6] および Kiriki-Soma [8] による Takens 予想に関する（近年の）重要な進展も参照いただきたい．

歴史的挙動の研究における別の方向性として，Takens [11] は歴史的挙動を示す初期値の集合が相空間で残留的か（residual. つまり，位相的な意味で無視不可能か）どうかを考えた．円周上の二重写像について，彼は記号力学系を用いて歴史的挙動を示す初期値からなる残留的な集合を構成した．記号力学系の方法は任意の

円周上の拡大写像に適用可能なので，この証明はそのまま円周上の拡大写像に利用することができる（拡大写像の歴史的挙動に関するさらに別の研究として [4] も参照）．本稿における目標は彼の歴史的挙動に関する結果（およびその円周上の拡大写像への一般化）のランダムな設定への拡張（の報告）である．測度論的な Takens 予想のランダム版については，Araújo [1] による結果を参照していただきたい；本稿での位相的な設定での結果とは逆に，彼はノイズに関する緩やかな仮定の下，ランダムな Takens 予想を否定的に解決した．

摂動のない場合と同様，証明の鍵となるのは（ランダムな）Markov 分割である．これは拡大写像の折畳み写像との位相共役に関する Shub の定理のランダム版を示すことで与えられる．この拡張の副産物として，ランダム拡大写像の唯一つの絶対連続でエルゴード的な不変確率測度（の密度関数）に関する公式を与える．これは我々の知る限りでは，新公式となっている．

1.1 定義と結果

$\mathbb{S}^1$ を $\mathbb{S}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ によって与えられる円周とする．$\mathscr{C}^r(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1)$ と $\mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1)$ をそれぞれ円周 $\mathbb{S}^1$ 上の $\mathscr{C}^r$ 級写像および同相写像全体の空間とし，それぞれ通常の $\mathscr{C}^r$ および $\mathscr{C}^0$ 距離 $d_{\mathscr{C}^r}(\cdot,\cdot)$ と $d_{\mathscr{C}^0}(\cdot,\cdot)$ が備わっているものとする．ただし $r>1$ である．（$k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$，$0\leq\gamma\leq 1$ で与えられる $r=k+\gamma$ について，$f\in\mathscr{C}^r(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1)$ は f の k 階微分が γ-Hölder であることを意味する．）$\mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$ を $\mathbb{S}^1$ 上の空でない左閉-右開区間全体からなる空間とし，ハウスドルフ距離 $d_H(\cdot,\cdot)$ が備わっているものとする．$\mathscr{C}^r(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1)$, $\mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1)$ および $\mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$ には Borel σ-代数を考えることとする．

Ω を可分完備距離空間であって，Borel σ-代数 $\mathcal{B}(\Omega)$ を備え，確率測度 $\mathbb{P}$ を持つようなものとする．$\mathscr{C}^r$ 級の写像 $f_0:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ について，$\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ を Ω から $\mathscr{C}^r(\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1)$ の連続写像の族であって

$$\sup_{\omega\in\Omega} d_{\mathscr{C}^r}(f_\epsilon(\omega),f_0)\to 0 \quad \text{as } \epsilon\to 0 \tag{1.1}$$

を満たすようなものとする．各 $\epsilon>0$ について，$f_\epsilon(\omega,\cdot)=f_\epsilon(\omega)$ の記法を用いると，任意の $x\in\mathbb{S}^1$ と $\omega,\omega'\in\Omega$ について $f_\epsilon(\omega,x)$ と $f_\epsilon(\omega',x)$ の距離は $d_{\mathscr{C}^r}(f_\epsilon(\omega),f_\epsilon(\omega'))$ でおさえられる．それゆえ，$f_\epsilon:\Omega\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ が連続写像（特に可測写像）であることがすぐにわかる．簡便さのため，$f_0:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ を定数関数 $\Omega\ni\omega\mapsto f_0$ と同一視することにする．

f_0 を円周上の拡大写像とする．つまり，定数 $\lambda_0>1$ があって $\inf_x\left|\frac{d}{dx}f_0(x)\right|\geq\lambda_0$．拡大写像の性質については，例えば [7] を参照されたい．$k\geq 2$ を被覆写像 f_0 の写像度とする．このとき (1.1) により，ϵ が十分小さいならば任意の $\omega\in\Omega$ について $f_\epsilon(\omega)$ は拡大写像となる．実際，$\lambda_0=\inf_x\left|\frac{d}{dx}f_0(x)\right|$ として $\lambda=(\lambda_0+1)/2$ とおけば，$\lambda>1$ であって

$$\inf_\omega\inf_x\left|\frac{\partial}{\partial x}f_\epsilon(\omega,x)\right|\geq\lambda,\quad 0\leq\epsilon<\epsilon_0 \tag{1.2}$$

となる $\epsilon_0>0$ が見つかる．$\delta_0<\frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})$ を正の実数とし，η を正の実数であって

$$\eta<\min\{1,(\lambda-1)\delta_0\} \tag{1.3}$$

を満たすようなものとする．ここで ϵ_0 は十分小さく

$$\sup_{\omega\in\Omega} d_{\mathscr{C}^0}(f_\epsilon(\omega),f_0)<\frac{\eta}{2},\quad 0\leq\epsilon<\epsilon_0 \tag{1.4}$$

が成り立つようなものとする．特に，$f_\epsilon(\omega)$ は各 $\omega\in\Omega$ について写像度 k の $\mathbb{S}^1$ の被覆写像となる．

f_0 は写像度 $k\geq 2$ の $\mathbb{S}^1$ の被覆写像なので，f_0 の不動点 $p_0\in\mathbb{S}^1$ が存在する．(1.1) と (1.2)，および f_0 が円周上の局所微分同相写像であることから，p_0 を含むような閉区間 $B=B_\epsilon$ であって，$0\leq\epsilon<\epsilon_0$ のとき任

意の $\omega \in \Omega$ について $f_\epsilon(\omega): B \to f_\epsilon(\omega)(B)$ が微分同相写像であって $B \subset f_\epsilon(\omega)(B)$ となるようなものが（必要ならば ϵ_0 を十分小さく取り直すことで）得られる．ϵ_0 は

$$\mathrm{diam}(B) \leq \delta_0 \tag{1.5}$$

がすべての $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ について成り立つほど十分小さいものと仮定する．ただし，$\mathrm{diam}(B)$ は $\mathbb{S}^1$ の通常の距離に関する B の直径である．条件 (1.5) から，$\mathbb{S}^1$ の点であってしかし B の点ではないものがある．簡単のためにこの点を 0 にうつし，$\mathbb{S}^1$ の通常の距離に関数する $x, y \in B$ の距離が $|x-y|$ と一致するようにする．

注意．曖昧でない限り，ノイズ強度 ϵ は表記上からたびたび省略することとする（特にノイズ変数 $\omega \in \Omega$ への依存がすでに明示されているとき）．本稿の全体を通して ϵ_0 を (1.2), (1.4) および (1.5) が成り立つような $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ の範囲の上限を表すために（仮にその値が文脈ごとに変化しても）使用することとする．この規約は特に定理 11 で利用されることになる．

$f: \Omega \to \mathscr{C}^r(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ を可測写像とし，$\theta: \Omega \to \Omega$ を $(\Omega, \mathbb{P})$ 上の測度保存的な同相写像とする（この条件については定理 5 の証明の後の注意も参照いただきたい）．簡単のため，さらに θ はエルゴード的であると仮定する．任意の $n \geq 1$ について，$f^{(n)}(\omega, x)$ を歪積写像

$$\Theta(\omega, x) = (\theta\omega, f(\omega, x)), \quad (\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{S}^1$$

の n 回合成のファイバー成分とする．ただし $\theta\omega$ は $\theta(\omega)$ を意味する．$f_\omega = f(\omega, \cdot)$，$f_\omega^{(n)} = f^{(n)}(\omega, \cdot)$ と表記すると，$f_\omega^{(n)}$ の明示的な形は

$$f_\omega^{(n)} = f_{\theta^{n-1}\omega} \circ f_{\theta^{n-2}\omega} \circ \cdots \circ f_\omega.$$

となっている．さらに，任意の $\omega \in \Omega$ について $f_\omega^{(0)} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ とする．$\{f_\omega^{(n)}(x)\}_{n \geq 0} = \{x, f_\omega(x), f_\omega^{(2)}(x), \ldots\}$ を f の $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{S}^1$ からの**ランダム軌道**と呼ぶ．Takens [11] による摂動のない場合での扱い同様，軌道の歴史的挙動を定義する．

定義 1. （f の）(ω, x) からの軌道が**歴史的挙動**を示すとは，経験分布

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f_\omega^{(j)}(x)}$$

がどのような円周上の確率測度にも弱-* 位相で収束しないことを言う．ただし δ_x は点 x における Dirac 測度である．

以下の定理が本稿の主結果となる．

定理 2. $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ とする．$\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について，$\mathbb{S}^1$ の残留的な部分集合 $\mathcal{R}^\omega$ が存在して，任意の $x \in \mathcal{R}^\omega$ について f_ϵ の (ω, x) からのランダム軌道は歴史的挙動を示す．

2 証明の概略

まず Dowker の定理のランダム版を考えることから証明をはじめる．この定理は（摂動のない力学系の）歴史的挙動を示す稠密な軌道が見つかれば，相空間の残留的な部分集合が存在して，その集合の中の任意の点の軌道が歴史的挙動を示すと主張するものである．この目標のためには，ランダム軌道の歴史的挙動と稠密性

についてより強い定義が必要になる．混乱がないときは，一度 $0 \le \epsilon < \epsilon_0$ が与えられれば $f = f_\epsilon$ について $f_\omega^{(n)} = f^{(n)}(\omega, \cdot)$ の表記を利用することにする．連続関数 $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{S}^1$ および $n \ge 1$ について，観測量 φ の時間平均 $B_n(\varphi; \omega, x)$ を

$$B_n(\varphi; \omega, x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f_\omega^{(j)}(x).$$

によって定義する．ある連続関数 $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ について $B_n(\varphi; \omega, x)$ が収束しないとき，(ω, x) からの軌道が歴史的挙動を示すことに注意していただきたい．

定義 3. $f : \Omega \to \mathscr{C}^r(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ を可測写像とする．X を Ω 上の $\mathbb{S}^1$-値確率変数とする．

$$\{X(\omega), f_{\theta^{-1}\omega}(X(\theta^{-1}\omega)), f_{\theta^{-2}\omega}^{(2)}(X(\theta^{-2}\omega)), \ldots\}$$

を X の ω における**ランダム軌道**と呼ぶ．

(ω に依存しない) 実数 α, β および連続関数 $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\liminf_{n\to\infty} B_n(\varphi; \omega, X(\omega)) < \alpha < \beta < \limsup_{n\to\infty} B_n(\varphi; \omega, X(\omega))$$

が $\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての ω について成立するとき，X は**歴史的挙動**を示すと言う．

以下の命題から，定理 2 は，その軌道がほとんど確実に稠密で歴史的挙動を示すような X をただ一つ見つけることに帰着される．

命題 4. $f : \Omega \to \mathscr{C}^r(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ を可測写像とする．ある可測写像 $X : \Omega \to \mathbb{S}^1$ が存在して，X のランダム軌道が $\mathbb{P}$ に関してほとんど確実に $\mathbb{S}^1$ で稠密であり，X が歴史的挙動を示すと仮定する．このとき，$\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について，$\mathbb{S}^1$ の残留的な部分集合 $\mathcal{R}^\omega$ が存在して，任意の $x \in \mathcal{R}^\omega$ について (ω, x) からのランダム軌道は歴史的挙動を示す．

証明．[9, Proposition 4] を参照していただきたい．

2.1 Shub の定理と Markov 分割

次の副節で，f_ϵ の**ランダム** *Markov* **分割**に沿ったグラフのコード化を与えるが，これが証明の主要な道具となる．この目標のために，拡大写像と，それと写像度を同じくする折畳み写像の位相共役に関する Shub の定理の，以下のランダムな設定への拡張が必要となる．(1.4) より，$0 \le \epsilon < \epsilon_0$ のとき，任意の $\omega \in \Omega$ について $f_\epsilon(\omega, \cdot) : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ の写像度は k となることを思い出していただきたい．

定理 5. $0 \le \epsilon < \epsilon_0$ と仮定する．このとき連続写像（特に，可測写像）$h : \Omega \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ が存在して，$\mathbb{P}$ に関してほとんど確実に

$$h(\theta\omega) \circ E_k = f_\epsilon(\omega) \circ h(\omega)$$

を満たす．ただし $E_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ は $E_k(x) = kx \mod 1$ で定義される k-折畳み写像である．

さらに，$\mathbb{P}^2$ に関してほとんどすべての (ω, ω') について

$$d_{\mathscr{C}^0}(h(\omega), h(\omega')) \le \delta_0$$

となる．ここで δ_0 は (1.3) で与えられた定数である．

証明．[9, Theorem 5] を参照していただきたい．

注意．一般にノイズ空間 $(\Omega, \mathbb{P})$ 上のベース変換 θ に関する位相的な条件（本稿では，θ の連続性）は取り除かれる方が望ましい．これが実際に取り除けるかどうかは，最終的にはランダムな位相共役 $h : \Omega \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ の可測性が θ に連続性を仮定しなくても得られるかどうかに帰着される．しかし現在のところ，θ の連続性の仮定が本質的なものなのか構成上の人工的なものなのかは不明である．

$\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ とする．以下のランダムな Markov 分割に関する命題が必要となる．

定義 6. $f : \Omega \to \mathscr{C}^r(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ を可測写像とし $f(\omega)$ を f_ω と表記する．Ω 上 $\mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$-値の，有限個の確率変数 $\{\mathcal{I}_j^{(\cdot)}\}_{j \in \mathcal{A}}$ は以下の条件を満たすとき f の *Markov* 分割と言われる：

- $\mathcal{I}_j^\omega$ は任意の $j \in \mathcal{A}$ について，$\mathbb{P}$ についてほとんど確実に空でない左閉-右開区間，
- $\mathbb{S}^1 \cong [0, 1)$ の同一視の下，$\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について $\bigsqcup_{j \in \mathcal{A}} \mathcal{I}_j^\omega = \mathbb{S}^1$，
- 任意の $j \in \mathcal{A}$ と $\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について，$f_\omega(\mathcal{I}_j^\omega) = \mathbb{S}^1$ であって $f_\omega : \mathcal{I}_j^\omega \to \mathbb{S}^1$ は $\mathscr{C}^r$ 微分同相写像，
- 任意の $i, j \in \mathcal{A}$ と $\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について，$(f_\omega)^{-1}(\mathcal{I}_i^{\theta\omega}) \cap \mathcal{I}_j^\omega$ は空でない左閉-右開区間．

命題 7. $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ と仮定する．このとき f_ϵ の *Markov* 分割 $\{\mathcal{I}_j^{(\cdot)}\}_{j=0}^{k-1}$ が存在して，任意の $0 \leq j \leq k-1$ について空でない開区間 J' が存在して $\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について $\mathcal{I}_j^\omega$ は J' と交わらない．

証明．[9, Proposition 7] を参照していただきたい．

2.2 グラフのコード化

この副節を通して，$0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ を固定し，$\{\mathcal{I}_j^{(\cdot)}\}_{j=0}^{k-1}$ を定理 7 の中の f_ϵ の Markov 分割とする．$s = (s_0, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}) \in \mathcal{A}^n$ と $\omega \in \Omega$ について，$\mathbb{S}^1$ の部分集合 $\mathcal{I}_s^\omega$ を

$$\mathcal{I}_s^\omega = \bigcap_{j=0}^{n-1} \left(f_\omega^{(j)}\right)^{-1} \left(\mathcal{I}_{s_j}^{\theta^j \omega}\right)$$

と定義する．

補題 8. 任意の $n \geq 1$，$s \in \mathcal{A}^n$ および $\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について，$\mathcal{I}_s^\omega$ は $\mathbb{S}^1$ の空でない左閉-右開区間である．さらに，Ω から $\mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$ への写像 $\omega \mapsto \mathcal{I}_s^\omega$ は可測となる．

証明．[9, Lemma 8] を参照していただきたい．

長さ無限の $s = (s_0, s_1, \ldots) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ について，$\mathcal{I}_s^\omega$ を $\mathcal{I}_s^\omega = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{I}_{[s]_n}^\omega$，によって定義する．ここで $[s]_n = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ である．このとき，f_ω の逆枝は (1.2) より縮小的であるので，補題 8 から $\mathcal{I}_s^\omega$ は 1 点集合となる．この点を $X_s(\omega)$ と表記する．このとき，補題 8 における可測性から，Ω から $\mathcal{F}(\mathbb{S}^1)$ への写像 $\omega \mapsto \{X_s(\omega)\}$ は可測となり，それゆえ写像 $X_s : \Omega \to \mathbb{S}^1$ も可測となる．

次の X_s のグラフに関する 2 つの補題は単純であるが定理 2 の証明において本質的である．$\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0} \to \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ を $\sigma(\omega) = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$，$\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ によって定義される一方向シフト写像とする．

補題 9. 任意の $s \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ について，$\mathbb{P}$ についてほとんど確実に

$$f_\omega(X_s(\omega)) = X_{\sigma(s)}(\theta\omega)$$

となり，空でない開区間 J' が存在して $X_s(\omega)$ は $\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について J' と交わらない．

証明．[9, Lemma 9] を参照していただきたい．

補題 10. x を $\mathbb{S}^1$ の点とし $s = s(x) = (s_0, s_1, \ldots) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ を x の E_k によるコードとする．つまり，任意の $j \geq 0$ について $E_k^j(x) \in I_{s_j}$．このとき，$\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega \in \Omega$ と $x \in \mathbb{S}^1$ について $h(\omega)(x) = X_s(\omega)$ となる．ただし h は定理 5 で与えられた可測写像である．

証明．[9, Lemma 10] を参照していただきたい．

2.3 不変測度

定理 2 の証明に移る前の最後の準備として，$X_{s''}$ の軌道が $\mathbb{P}$ についてほとんど確実に稠密であり，$(\omega, X_{s''}(\omega))$ からの軌道に沿った経験分布がほとんど確実に f_ϵ の唯一つの絶対連続でエルゴード的な不変確率測度に収束するような s'' を見つける必要がある．この目的のために，Arnold [2, Chapter 1] からいくつか用語を準備する．

$f : \Omega \to C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ を可測写像とする．$\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ を $\mathbb{S}^1$ 上の Borelσ-代数とする．$\Omega \times \mathbb{S}^1$ 上の測度 μ が f-不変であるとは μ が歪積写像 $\Theta(\omega, z) = (\theta\omega, f(\omega, z))$ について不変であって周辺分布 $\pi_\Omega\mu$（ここで $\pi_\Omega : \Omega \times \mathbb{S}^1 \to \Omega$ は Ω への射影）が $\mathbb{P}$ と一致することを言う．μ が f-不変な確率測度であるとき，唯一つ関数 $\mu_\cdot(\cdot) : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{S}^1) \to [0,1]$, $(\omega, B) \mapsto \mu_\omega(B)$ が存在して，

1. $\omega \mapsto \mu_\omega(B)$ は任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ について可測，
2. $\mathbb{P}$ に関してほとんど確実に μ_ω は $\mathbb{S}^1$ 上の確率測度，
3. $\int u d\mu = \int u d\mu_\omega dP$ が任意の $u \in L^1(\mu)$ について成立する

ことが知られている．さらに，θ は双可測であると仮定していたので，μ_ω の $f(\omega)$ による送出し $f(\omega)\mu_\omega$ はほとんど確実に $\mu_{\theta\omega}$ と一致することが知られている ([2, Chapter 1])．$\mu_\cdot(\cdot)$ を μ の（$\mathbb{P}$ に関する）条件付き確率と呼ぶ．

次の唯一つの絶対連続なエルゴード的な不変測度 (absolutely continuous ergodic invariant measure, *aceip* と略される）に関する定理は Baladi et al. [3] による結果から直ちに導かれる．

定理 11. 正の実数 ϵ_0 が存在して任意の $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ について，$\Omega \times \mathbb{S}^1$ 上の f_ϵ-不変確率測度 μ^ϵ が存在し，$\mu^\epsilon_\cdot(\cdot)$ を μ^ϵ の条件付き確率測度とするとき μ^ϵ_ω は $\mathbb{P}$ についてほとんど確実に $\mathbb{S}^1$ 上の正規化された *Lebesgue* 測度 m と同値になる．さらに，$(\mathbb{P} \times m)$ に関してほとんどすべての (ω, x) について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f_\epsilon^{(j)}(\omega, x) = \int \varphi d\mu^\epsilon \tag{2.1}$$

が任意の連続関数 $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ について成り立つ．

証明．[9, 定理 11] を参照していただきたい．

定理 11 は一般には，$(\omega, X_{s''}(\omega))$ が (2.1) における x を $X_{s''}(\omega)$ に置き換えた条件を，$\mathbb{P}$ についてほとんど確実に満たすような $s'' \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ が存在することを意味するわけではないことに注意していただきたい．それゆえに，$X_{s''}$ の軌道が $\mathbb{P}$ に関してほとんど確実に稠密になるような s'' の存在を保証する以下の定理 12 が必要となる．

定理 12 を述べるための用語を準備する．$0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ を固定し $h = h_\epsilon$ を定理 5 で与えられた写像とする．このとき，$h : \Omega \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ の連続性より $(\omega, x) \mapsto h(\omega)(x)$ は $\Omega \times \mathbb{S}^1$ から $\mathbb{S}^1$ への連続写像となる．それゆえ任意の連続関数 $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ に関して， $\Phi_h(\omega, x) = \varphi(h(\omega)(x))$, $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{S}^1$ で与えられる関数 $\Phi_h : \Omega \times \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{R}$ は連続，特に可測となる．さらに，$\|\Phi_h\|_{L^1_{m\times\mathbb{P}}} \leq \|\varphi\|_{\mathscr{C}^0}$ であり，Φ_h が積測度 $m \times \mathbb{P}$ について可積分関数であることが簡単にわかる．ゆえに Fubini の定理から $\omega \mapsto \int \Phi_h(\omega, \cdot) dm$ は可測となる．さらに，φ は任意の連続関数であったので，Riesz の表現定理より $\mathbb{S}^1$ 上の確率測度 $(h(\omega))_* m$ が存在して $\int \Phi_h(\omega, \cdot) dm = \int \varphi d[(h(\omega))_* m]$ が任意の $\omega \in \Omega$ について成立する．（この確率測度は m の $h(\omega)$ による送出しと呼ばれる．）

定理 12. 任意の連続関数 $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ について，$(\Omega, \mathbb{P})$ と $(\mathbb{S}^1, m)$ の測度 *1* の集合 Γ，A が存在して，任意の $(\omega, x) \in \Gamma \times A$ について，$s = s(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ を補題 *10* で与えられた x の E_k によるコードとすると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f_\omega^{(j)}(X_s(\omega)) = \int \left(\int \varphi d\left[(h(\cdot))_* m\right] \right) d\mathbb{P}$$

が成り立つ．

証明. [9, 定理 12] を参照していただきたい．

注意. 定理 12 と定理 11 により (2.1) が成立するような点の集合の幾何に関する情報が得られる．つまり，測度 1 の集合 $\{(\omega, h(\omega)(x)) \mid (\omega, x) \in \Gamma \times A\}$ は (2.1) (補題 10 を思い出していただきたい) を満たす点の集合に含まれている．さらに，これらの結果はただ一つの aceip である μ^ϵ の条件付き確率に関する公式を導く：$\mathbb{P}$ についてほとんど確実に

$$\mu_\omega^\epsilon = (h(\omega))_* m.$$

2.4 証明の終り

X_s が命題 4 の仮定を満たすような列 $s \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ を構成しよう．Takens [11, Section 4] による扱い同様，この列は周期的な列と唯一つの aceip を生み出す列を適当に組み合わせたものとなる．

$s' \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ を周期的な列とする．簡単のため，$s' = (00\ldots)$ とおく．命題 7 と補題 9 により，空でない 2 つの開区間 $J \subset J' \subset \mathbb{S}^1$ が存在して，どちらも $\mathcal{I}_0^\omega$ と（特に，$X_{s'}(\omega) = X_{(00\ldots)}(\omega)$ と）$\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての ω について交わらない．ここで $J \subset J'$ は真部分集合の意味での包含関係である．$\varphi_0 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ を $\mathscr{C}^1$ 級関数であって

- φ_0 の台は J' に含まれている，
- すべての $x \in J$ について $\varphi_0(x) = 1$,
- すべての $x \in \mathbb{S}^1$ について $0 \leq \varphi(x) \leq 1$

となるようなものとする．

$j \geq 0$, $m \geq 0$ を整数とする．このとき正の整数 $n_1(j,m)$ が存在して $\mathbb{P}$ についてほとんど確実に

$$\sup_{t\in\mathcal{A}^m}\sup_{\tilde{t}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}}\left|B_{n+m}(\varphi_0;\omega,X_{t[s']_n\tilde{t}}(\omega))\right| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \tag{2.2}$$

が任意の $n \geq n_1(j,m)$ について成り立つ．ただし，$t=(t_0,t_1,\ldots,t_{m-1})\in\mathcal{A}^m$ と $\tilde{t}=(\tilde{t}_0,\tilde{t}_1,\ldots)\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ について $t[s']_n\tilde{t}=(t_0,t_1,\ldots,t_{m-1},s'_0s'_1,\ldots,s'_{n-1},t_0,t_1,\ldots)$ である（$\mathcal{A}^0$ は空集合と解釈する）．実際

$$B_{n+m}(\varphi_0;\omega,x)=\frac{m}{n+m}B_m(\varphi_0;\omega,x)+\frac{n}{n+m}B_n(\varphi_0;\theta^m\omega,f_\omega^{(m)}(x)) \tag{2.3}$$

がすべての $x\in\mathbb{S}^1$ について成り立つことに注意していただきたい．さらに，もし $x\in\mathcal{I}^\omega_{t[s']_n}$ がある $t\in\mathcal{A}^m$ について成り立てば，$f_\omega^{(m+\ell)}(x)\notin J'$ がすべての $0\leq\ell\leq n-1$ と $\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega\in\Omega$ について成り立つ（$f_\omega^{(m+\ell)}(x)\in\mathcal{I}_0^{\theta^{m+\ell}\omega}$ であり $\mathcal{I}_0^{\theta^{m+\ell}\omega}\cap J'=\emptyset$ なので）．ゆえに $B_n(\varphi_0;\theta^m\omega,f_\omega^{(m)}(x))=0$ となり，ただちに主張を得る．

一方で，定理 11 と 12 およびこれらの定理の後の注意から，$\mathbb{P}$ に関してほとんどすべての $\omega\in\Omega$ について $B_n(\varphi_0;\omega,X_{s''}(\omega))$ が n が無限大となるとき $\int\varphi_0 d\mu^\epsilon$ に収束するような $s''\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}$ を見つけることができる．また (2.3) より，任意の長さ m の列 $t\in\mathcal{A}^m$ について，$B_{[\frac{n}{2}]+m}(\varphi_0;\omega,X_{ts''}(\omega))$ も $\mathbb{P}$ についてほとんど確実に $\int\varphi_0 d\mu^\epsilon$ に収束する．ここで $[\frac{n}{2}]$ は $\frac{n}{2}$ の整数部分である．この考察から，整数 $n\geq 1$, $j\geq 0$ および $m\geq 0$ について $\Gamma_n(j,m)$ を

$$\Gamma_n(j,m)=\bigcap_{t\in\mathcal{A}^m}\left\{\omega\in\Omega:\left|B_{[\frac{n}{2}]+m}(\varphi_0;\omega,X_{ts''}(\omega))-\int\varphi_0 d\mu^\epsilon\right|\leq\frac{1}{2^j}\right\}, \tag{2.4}$$

によって定義するとき，任意の整数 $j\geq 0$ と $m\geq 0$ について正の整数 $n_2(j,m)$ が存在して

$$\mathbb{P}(\Gamma_n(j,m))\geq 1-\frac{1}{2^{j-1}} \tag{2.5}$$

が任意の $n\geq n_2(j,m)$ について成立する．

さらに，すべての $j\geq 0$ と $m\geq 0$ に大して，正の整数 $\tilde{n}_3(j,m)$ が存在して，$\mathbb{P}$ についてほとんど確実に

$$\sup_{t\in\mathcal{A}^m}\sup_{\tilde{t}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}}\left|B_{[\frac{n}{2}]+m}(\varphi_0;\omega,X_{ts''}(\omega))-B_{[\frac{n}{2}]+m}(\varphi_0;\omega,X_{t[s'']_n\tilde{t}}(\omega))\right|\leq\frac{1}{2^j}$$

がすべての $n\geq\tilde{n}_3(j,m)$ について成り立つ．実際，すべての $0\leq j\leq[\frac{n}{2}]$ について $\mathcal{I}^\omega_{[s'']_{n-j}}$ の長さは $\mathbb{P}$ についてほとんど確実に $\lambda^{-n-j}\leq\lambda^{-\frac{n}{2}+1}$ 以下となる．ゆえに，平均値定理から

$$\left|B_{[\frac{n}{2}]}(\varphi_0;\theta^m\omega,f^{(m)}(x))-B_{[\frac{n}{2}]}(\varphi_0;\theta^m\omega,f^{(m)}(y))\right|\leq\lambda^{-\frac{n}{2}+1}\|\varphi\|_{\mathscr{C}^1}$$

が任意の $x\in\mathcal{I}^\omega_{ts''}$ と $y\in\mathcal{I}^\omega_{t[s'']_n\tilde{t}}$ について成り立つ．よって (2.3) よりただちに主張が従う．この評価と (2.4) の中の不等式を組み合わせると，任意の $m\geq 0$ と $j\geq 0$ について正の整数 $n_3(j,m)$ が存在して

$$\sup_{t\in\mathcal{A}^m}\sup_{\tilde{t}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}}\left|B_{[\frac{n}{2}]+m}(\varphi_0;\omega,X_{t[s'']_n\tilde{t}}(\omega))-\int\varphi_0 d\mu^\epsilon\right|\leq\frac{1}{2^{j-1}},\quad\omega\in\Gamma_n(j,m) \tag{2.6}$$

が任意の $n\geq n_3(j,m)$ について成り立つことがわかる．

最後に，経験分布

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f_\omega^{(j)}(X_{s''}(\omega))}$$

は定理 11 と 12 により，$\mathbb{P}$ についてほとんど確実に

$$\bar{\mu}^{\epsilon}(A)=\int \mu_{\omega}^{\epsilon}(A)d\mathbb{P} \quad \text{for } A\in\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$$

で定義される滑らかな測度 $\bar{\mu}^{\epsilon}$ に収束するため，$X_{s''}$ は $\mathbb{S}^1$ で稠密となることに注意していただきたい．

それでは歴史的挙動を示す軌道をつくるような s を構成しよう．これは

$$s=(s_0,\ldots,s_{N_1-1},s_{N_1},\ldots,s_{N_2-1},s_{N_2},\ldots),$$

の形となっており，各々の $(s_{N_{j-1}},\ldots,s_{N_j-1})$ は，j が偶数のときは s' のはじめの部分，j が奇数のときは s'' のはじめの部分となっている．各部分の長さ $\{\tilde{N}_j\}_{j\geq 0}$（つまり，$\tilde{N}_j=N_j-N_{j-1}$）は j に関して帰納的に選ばれる：$\tilde{N}_1,\tilde{N}_2,\ldots,\tilde{N}_{j-1}$ が与えられたとするとき，$\tilde{N}_j$ を $n_1(j,N_{j-1})$，$n_2(j,N_{j-1})$，$n_3(j,N_{j-1})$ の最大値より大きい正の整数とする．ただし $N_{j-1}=\tilde{N}_1+\tilde{N}_2+\cdots+\tilde{N}_{j-1}$ であり，$N_0=0$ である．

$$\Gamma_0=\bigcup_{j\geq 1}\Gamma_{\tilde{N}_j}(j,[s]_{N_{j-1}})$$

とおく．このとき，(2.5) より $\mathbb{P}(\Gamma_0)=1$ であり，(2.6) より

$$\limsup_n B_n(\varphi_0;\omega,X_s(\omega))\geq\int\varphi_0 d\mu>0,\quad \omega\in\Gamma_0$$

を得る．また，(2.2) より

$$\liminf_n B_n(\varphi_0;\omega,X_s(\omega))\leq 0,\quad \omega\in\Gamma_0$$

である．つまり，X_s は歴史的挙動を示す．さらに，$X_{s''}$ の軌道は $\mathbb{P}$ についてほとんど確実に稠密であったので，X_s も $\mathbb{P}$ についてほとんど確実に稠密である．したがって，命題 4 から定理 2 が証明された．

謝辞

今回は，このような素晴らしい研究集会で講演をする機会を与えて下さり，関係者の皆様に心からお礼申し上げます．また参加者の方々から様々なご意見等をいただきましたおかげで，大変有意義な時間を過ごすことができました．改めて，心よりお礼の言葉を申し上げます．

参考文献

[1] V. Araújo, *Attractors and time averages for random maps*, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis **17** (2000), no. 3, 307–369.
[2] L. Arnold, *Random dynamical systems*, Springer, 1998.
[3] V. Baladi, A. Kondah, and B. Schmitt, *Random correlations for small perturbations of expanding maps*, Random Comput. Dynam. **4** (1996), 179–204.
[4] L. Barreira and J. Schmeling, *Sets of "non-typical" points have full topological entropy and full hausdorff dimension*, Israel Journal of Mathematics **116** (2000), no. 1, 29–70.
[5] C. Bonatti, L. Díaz, and M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective*, Springer, 2004.
[6] F. Hofbauer and G. Keller, *Quadratic maps without asymptotic measure*, Communications in mathematical physics **127** (1990), no. 2, 319–337.
[7] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995.
[8] S. Kiriki and T. Soma, *Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains*, arXiv preprint arXiv:1503.06258 (2015).

[9] Y. Nakano, *Historic behaviour for quenched random expanding maps on the circle*, arXiv preprint arXiv:1510.00905 (2015).
[10] D. Ruelle, *Historical behaviour in smooth dynamical systems*, Global analysis of dynamical systems (2001), 63–66.
[11] F. Takens, *Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages*, Nonlinearity **21** (2008), no. 3, T33–T36.