

# 重み付きバーコフ平均に基づく 準周期軌道に纏わる計算の高速化

Suddhasattwa Das<sup>1</sup>, Yoshitaka Saiki<sup>2\*</sup>, Evelyn Sander<sup>3</sup>, James A Yorke<sup>1</sup>

<sup>1</sup> University of Maryland, <sup>2</sup> Hitotsubashi University, <sup>3</sup> George Mason University.

## 1 はじめに

力学系の振る舞いは、安定周期軌道 (不動点を含む)、準周期軌道、カオスの三つに大きく分類される。それらはしばしばリープマン指数などの平均量によって特徴づけられるが、その収束は非常に遅く、実際に軌道が与えられたときに特に準周期軌道を判別することは難しい。また、準周期軌道の特徴づける回転数やその解析性を高精度で同定することも同様の理由で困難であった。本稿では著者らが最近開発した準周期軌道に纏わるこれらの量を高速で精度良く計算する方法をいくつかの応用例を使って紹介する。また、準周期軌道にノイズが付加されたデータに対する計算例も紹介する。本稿で示す数値計算は4倍精度でおこなった。

## 2 重み付きバーコフ平均

バーコフのエルゴード定理は、エルゴード的な力学系の軌道  $(x_n)$  に対して定義される何らかの量  $f$  に対して、そのバーコフ平均  $B_N(f)(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)/N$  は、軌道長  $N \rightarrow \infty$  で空間平均  $\int f d\mu$  に収束するというものである。但し、 $\mu$  は力学系の物理測度である。我々は、これに修正を加えることによって、準周期軌道に纏わる各種の量の計算を高速化させる。

重み関数  $w : R \rightarrow [0, \infty)$  を無限回微分可能でかつ  $(0, 1)$  で  $w > 0$ 、それ以外で  $w = 0$  となるものとする。以下では、特に

$$w(t) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{t(1-t)}\right), & \text{for } t \in (0, 1) \\ 0, & \text{for } t \notin (0, 1). \end{cases} \tag{1}$$

とする。これを用いて  $f$  の重み付きバーコフ平均  $WB_N$  を

$$WB_N(f)(x) := \sum_{n=0}^{N-1} \hat{w}_{n,N} f(x_n), \tag{2}$$

と定義する。但し、

$$\hat{w}_{n,N} = \frac{w(n/N)}{\sum_{j=0}^{N-1} w(j/N)} \tag{3}$$

である。力学系と  $f$  が  $C^\infty$  で、 $w$  を上で示した性質をもつ  $C^\infty$  重み関数として、更に若干の仮定を加えると、任意の自然数  $m$  に対して、ある  $C_m > 0$  が存在して、

$$\left| WB_N(f)(x) - \int f d\mu \right| \leq C_m N^{-m}$$

\* E-mail:yoshi.saiki@r.hit-u.ac.jp

であることが示される [1].

なお、実際の計算では、例えば 4 倍精度計算では式 (4) で  $p = 2$  とした  $w_2$  を用いるのが経験的に優れている。倍精度計算では  $w_1 (= w)$  でも  $w_2$  でもほぼ変わらない。

$$w_p(t) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{t^p(1-t)^p}\right), & \text{for } t \in (0, 1) \\ 0, & \text{for } t \notin (0, 1). \end{cases} \quad (4)$$

### 3 変数変換

本節では次節以降で用いる用語をまとめておく。相空間  $M$  における準周期軌道  $\{x_n\}$  が与えられたとき、

$$h: S^1 \rightarrow M \quad (5)$$

を考えることができる。ここで  $S^1$  は単位円である。つまり  $\{x_n\}$  は  $h(S^1)$  上を動くことになる。ここで、 $h$  が  $\theta_n = n\rho \pmod{1}$  を  $x_n$  に移すような回転数  $\rho$  を決定できる。 $h(\theta)$  を極座標表示  $(\phi(\theta), r(\theta))$  し、 $\phi(\theta)$  に着目する。 $\phi(\theta)$  は、有界な周期関数  $g(\theta)$  を用いて

$$\phi(\theta) = \theta + g(\theta) \quad (6)$$

と書くことができる。次節以降では、準周期軌道上で  $\phi$  に着目して重み付きバーコフ平均を用いて回転数  $\rho$  を求める。また、得られた  $\rho$  を用いて、周期関数  $g(\theta) (= \phi(\theta) - \theta)$  のフーリエ係数を決定する。無理数  $\rho$  によって  $\theta_n = n\rho \pmod{1}$  が定まるため、フーリエ係数の計算にも重み付きバーコフ平均を用いることができる。

### 4 ジーゲル円板

本節ではまず複素力学系であらわれる準周期軌道 [2, 3] に対して重み付きバーコフ平均を適用してその有効性を確認する。

$$f(z) = z^2 + e^{2\pi i \theta} z \quad (7)$$

に対して  $z_{n+1} = f(z_n)$  を考える。ここで  $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$  とする。前向きに反復で発散しない軌道 (図 1) の特に一番外側 (outer)、外側から二番目 (middle)、一番内側 (inner) の三つの軌道に着目する。図 2 は重み付きバーコフ平均を用いて得られた回転数が軌道長  $N$  を増やすに従って  $(\sqrt{5} - 1)/2$  へ収束する様子を示している。いずれの軌道に対しても重み付きバーコフ平均の効果が確認され、収束が速くなるが、予想されるように歪んでいる外側の軌道の方が“収束”に要する軌道長が長くなる。図 3 は、3 節で説明した変数変換  $\phi$  の周期成分である  $g(\theta) (= \phi(\theta) - \theta)$  のフーリエ係数の大きさをあらわしている。いずれも  $k$  に対して指数的にフーリエ係数が減衰しており、軌道の解析性が 4 倍精度数値計算の範囲内では確認された。

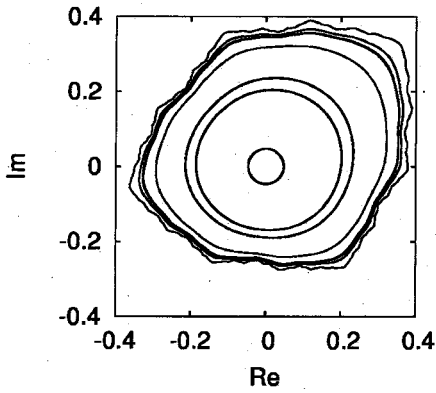


図 1: ジーゲル円板内の準周期軌道. 外側の軌道は歪んでいるが、内側に向かうにしたがって円に近い軌道となる。一番外側 (outer)、外側から二番目 (middle)、一番内側 (inner) の三つの軌道に着目する。

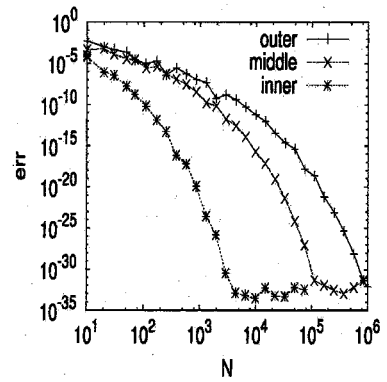


図 2: ジーゲル円板内の準周期軌道の軌道長  $N$  に対する回転数  $((\sqrt{5}-1)/2)$  への収束. 図 1 における三つの軌道 (outer, middle, inner) に対して回転数。

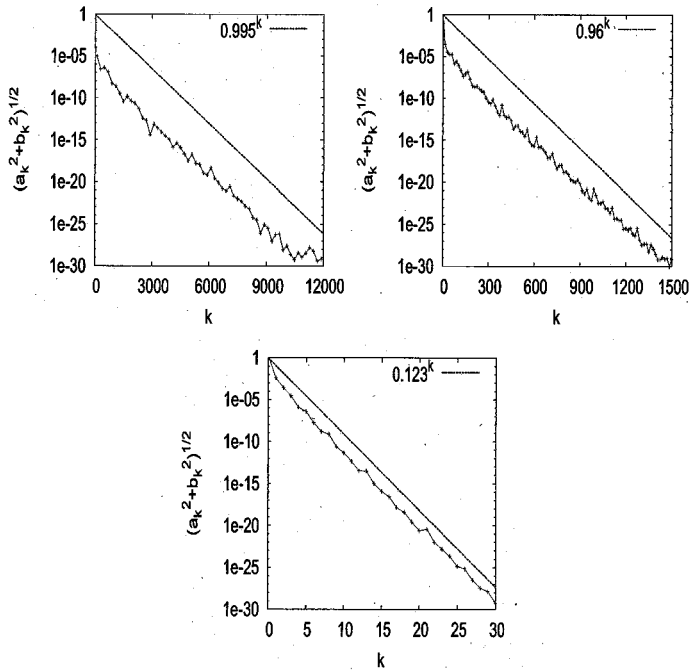


図 3: ジーゲル円板内の準周期軌道に関する  $g$  のフーリエ係数の大きさ. 左上が outer、右上が middle、下が inner に対応する。

## 5 制限三体問題

本節では、微分方程式 (8) であらわされる制限三体問題 [4] の準周期軌道に対して、重み付きパーコフ平均を応用する。

$$\begin{aligned} dq_1/dt &= p_1 + q_2, \\ dq_2/dt &= p_2 - q_1, \\ dp_1/dt &= p_2 - \mu(q_1 - 1 + \mu)d_m^{-3} - (1 - \mu)(q_1 + \mu)d_p^{-3}, \\ dp_2/dt &= -p_1 - \mu q_2 d_m^{-3} - (1 - \mu)q_2 d_p^{-3}. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、

$$d_m = ((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{0.5}, d_p = ((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{0.5}.$$

であり、 $\mu = 0.1$  とする。系のハミルトニアン  $H$  は、

$$H = [(p_1^2 + p_2^2)/2] + [q_2 p_1 - q_1 p_2] - [\mu d_m^{-1} + (1 - \mu) d_p^{-1}] \quad (9)$$

である。 $H$  をおよそ -2.63 の値に設定して、 $q_2 = 0$  かつ  $dq_2/dt > 0$  によって定めたポアンカレ断面上の離散軌道、つまり 2 次元写像の解を調べることにする。数値積分はルンゲ=クッタの 8 次公式 [5]、時間刻みは  $2 \times 10^{-5}$  でおこなった。また、ポアンカレ断面上の軌道を精度良く求めるために、(8) を数値積分して断面を横切る直前の点を求めた後、従属変数  $q_2$  と独立変数  $t$  の役割を入れ替えて、 $q_2$  を独立変数とみなしてポアンカレ断面にちょうど到達するようにルンゲ=クッタの 8 次公式を 1 ステップ分適用した。こ

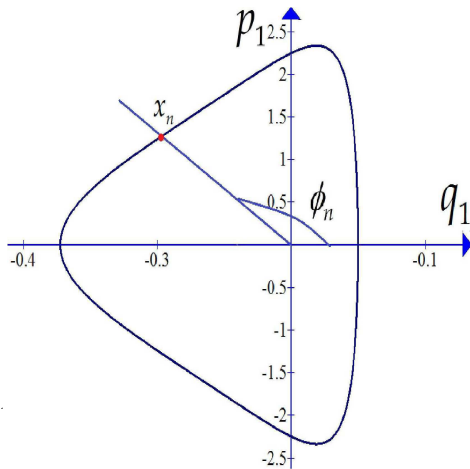


図 4: ポアンカレ断面上の準周期軌道. 時刻  $n$  における軌道上の点  $x_n$  を  $q_1$  軸からのなす角  $\phi_n$  で捉える。

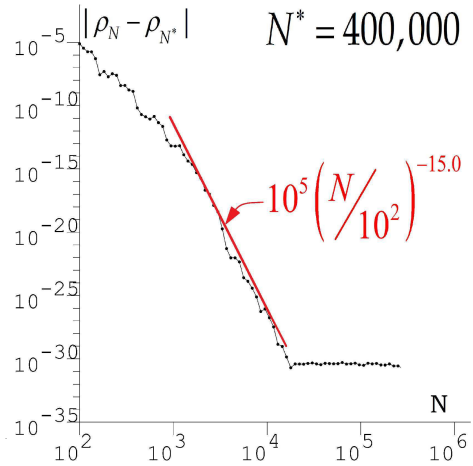


図 5: 図 4 に示した準周期軌道の回転数  $\rho_N$  の誤差 (軌道長  $N$  との対比). 誤差  $|\rho_N - \rho_{N^*}|$  (但し、 $N^* = 400,000$ ) が 4 倍精度計算の計算精度の限界、すなわち丸め誤差のオーダー  $10^{-30}$  程度にまで誤差が減少すると数値計算上は収束したとみなせる。

のようにして得られた準周期離散軌道 (軌道長  $N$ ) の時刻  $n$  における点を  $x_n$  としたとき、図 4 で示すよ

うに  $(q_1, p_1)$  平面上で  $q_1$  軸とのなす角  $\phi_n$  を定め、時刻が 1 だけ進む毎の角の進み具合の平均 (回転数) を重み付きパーコフ平均を用いて求めた. 図 5 はこの計算で得られた回転数  $\rho_N$  の想定される厳密値 (軌道長  $N^* = 400,000$  の場合の値で代用) からの誤差を軌道長  $N$  の関数として示したものである. これから,  $N = 20,000$  程度において, 4 倍精度の計算精度の限界に近い  $10^{30}$  にまで, 誤差が減少していることがわかる. また, 誤差の収束レートは  $1/N^{15}$  程度であることがわかる.  $N$  が十分大きくならないうちに 4 倍精度の計算精度に到達してしまうために収束レートは理論値 ( $N$  が十分大きいときには  $N$  に関する任意次の多項式より速く収束する) ほどには速くなっていないものの, パーコフ平均  $B_N$  を用いた場合の誤差の収束レートである  $1/N$  よりも圧倒的に高速化されていることがわかる. 実際, 例えば 30 桁の精度で回転数を求めることを考えると, 重み付きパーコフ平均  $WB_N$  を用いた場合には, パーコフ平均  $B_N$  を用いた場合に比べて,  $1/10^{25}$  程度の長さの軌道で済む, すなわちそれだけ高速化されていることとなる.

## 6 ノイズをもつ準周期データ

本節では重みつきパーコフ平均がノイズを含む準周期軌道に対しても一定程度有効であることを述べる. 以下であらわされる準周期データ [8] にノイズを付加して解析する.  $x \in [0, 1] \pmod{1}$  から複素平面への写像  $\gamma$

$$\gamma(x) := \hat{\gamma}_{-1}z^{-1} + \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1z + \hat{\gamma}_2z^2 \quad (10)$$

を考える. ここで  $z = z(x) := e^{i2\pi x}$  であり, パラメタは  $\hat{\gamma}_{-1} := 1.4 - 2i$ ,  $\hat{\gamma}_0 := 4.1 + 1.34i$ ,  $\hat{\gamma}_1 := -2 + 2.412i$ ,  $\hat{\gamma}_2 := -2.5 - 1.752i$  とする ([8] における Fig.5 ならびに eq.(31)). また,  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  として  $n = 0, 1, \dots$  に対して  $\gamma_n = \gamma(n\rho)$  を考える. これによって生成される軌道は図 6 で示されるように交差をもつ. 図 7 で示されるようにこの準周期軌道に対しても重み付きパーコフ平均を用いることにより, 回転数の収束が速くなる. パーコフ平均との差は非常に大きい.  $\gamma_n = \gamma(n\rho)$  に対して振幅  $10^{-m}$  ( $m = 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ ) の一様乱数をノイズとして付加した軌道に対して重み付きパーコフ平均を適用すると一定程度まではノイズがない場合と同じ程度の収束を示したのち, 収束速度が落ちてパーコフ平均と同じ程度となる.

## 7 まとめ

本稿では, エルゴード的な力学系における各種平均量を計算するために用いられるパーコフのエルゴード定理に修正を加えて, なめらかな重みを用いた重み付きパーコフ平均を導入した. それを用いると準周期軌道に纏わる回転数, フーリエ係数などの量が高速かつ高精度でおこなえることが確認された. この高速化はカオス軌道に対しては実現されないため, 収束スピードの差を用いてカオス軌道と準周期軌道の分類にも利用可能である [6]. また, 重み付きパーコフ平均の適用方法や特性に関する詳細, 制限三体問題以外の力学系に対する結果等は [7] を, 理論的背景に関しては [1] を参照いただきたい.

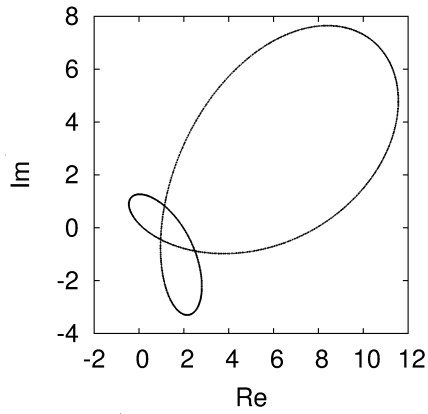


図 6: 準周期軌道  $\gamma_n$ .

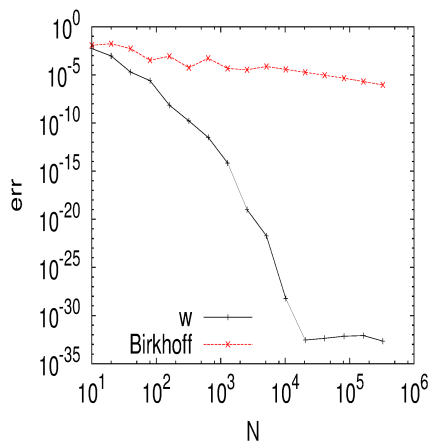


図 7: 準周期軌道  $\gamma_n$  の回転数の  $(\sqrt{5}-1)/2$  への収束 (バーコフ平均と重み付きバーコフ平均).

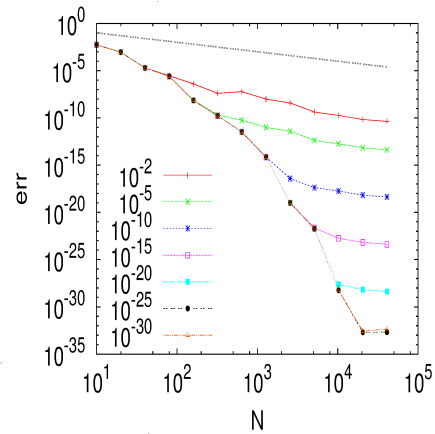


図 8: 準周期軌道  $\gamma_n$  にさまざまなサイズのノイズを付加したデータに関する回転数の収束 (平均 0 で振幅  $10^{-m}$  ( $m = 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ ) の一様乱数をノイズとして付加).

## 参考文献

- [1] S. Das and J. A. Yorke. Super convergence of ergodic averages for quasiperiodic orbits, preprint, arXiv:1506.06810.
- [2] R. Llave and N. P. Petrov. Boundaries of Siegel disks: Numerical studies of their dynamics and regularity, *Chaos* 18, 2008, 033135:1-11.
- [3] 稻生啓行, 上野康平, 川平友則. 滑らかな境界をもつ Siegel 円板 -Avila-Buff-Cheritat の論文紹介- (<http://www.cajpn.org/refs/smoothSD.pdf>).
- [4] J. B. Greene. Poincaré and the Three Body Problem, Amer. Math. Soc, 1996.
- [5] J. C. Butcher. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Willy, 2nd edition, 2008.
- [6] S. Das, C. B. Dock, Y. Saiki, M. Salgado-Flores, E. Sander, J. Wu and J. A. Yorke. Measuring quasiperiodicity, preprint, arXiv:1512.07286.
- [7] S. Das, Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke. Quantitative Quasiperiodicity, preprint, arXiv:1601.06051.
- [8] A. Luque and J. Villanueva. Numerical computation of rotation numbers of quasi-periodic planar curves, *Physica D* 238, 2009, 2025-2044.