数理解析研究所講究録
第2028巻 2017年 98-108

区間上のランダム力学系における周期点の個数の増大度について

浅岡正幸

京都大学大学院理学研究科

1 ランダム力学系とその周期点の個数の増大度

以下，$\mathbb{N}$ で正の整数全体を表わすものとする．また，集合 S に対して，S の元を要素とする有限列の全体を S^*, (片側) 無限列の全体を $S^{\mathbb{N}}$ で表すものとする．S^* の元 $\omega=\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$ に対して ω の長さ n を $|\omega|$ で表し，$S^{\mathbb{N}}$ の元 $\bar{\omega}=\omega_1\omega_2\ldots$ と $n\in\mathbb{N}$ に対して $\bar{\omega}|_n\in S^*$ を $\bar{\omega}|_n=\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$ で定める．$k\in\mathbb{N}$ と多様体 M からそれ自身への写像の k 個の組 $\rho=(f_1,\ldots,f_k)$, $\omega=\omega_1\omega_2\ldots\omega_n\in\{1,\ldots,k\}^*$ に対して，写像 ρ^s を

$$\rho^{\omega}=f_{\omega_n}\circ\cdots\circ f_{\omega_2}\circ f_{\omega_1}$$

で定める[1]．$\{1,\ldots,k\}$ 上の確率測度 μ に対して，μ の直積として定まる $\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度を μ_∞ とすると，$\omega\in\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$ が定める写像列 $(\rho^{\bar{\omega}|_n})_{n\in\mathbb{N}}$ の測度 μ_∞ に関する確率的な振舞いはランダム力学系の理論の基本的な研究対象の一つである．

ここでは，次のような問題を考えてみたい．

Problem 1.1. χ を M からそれ自身への写像全体のなす空間の上の函数とする．上のように $\rho=(f_1,\cdots,f_k)$ と μ が与えられたとき，μ_∞-a.e. $\bar{\omega}\in\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$ に対して，$\chi(\rho^{\bar{\omega}|_n})$ は $n\to+\infty$ でどのような振舞いをするだろうか？また，この振舞いは，$\chi(\rho^{\bar{\omega}|_n})$ の Σ_k 上の平均

$$\int_{\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}}\chi(\rho^{\bar{\omega}|_n})d\mu_\infty$$

の $n\to+\infty$ における振舞いと同じだろうか？

[1]論文 [AST] と逆の順に合成していることに注意．

本稿ではランダム力学系を生成する写像 $f_1,\ldots,f_k$ が単位区間 $[0,1]$ 上の臨界点を持たない写像，χ が写像の周期点である場合に，どのような現象が観察されるかについて述べる．なお，本稿の内容はすべて D.Turaev 氏，篠原克寿氏との共同研究に基づくものである．

まず簡単な例から見ていこう．以下，$1 \le r \le \infty$ とし，$\mathcal{E}^r$ を $[0,1]$ からそれ自身への C^r 級写像 f で，$f' > 0$ をみたすようなもの全体のなす集合とする．$(\mathcal{E}^r)^k$ で $\mathcal{E}^r$ の k 個の元の組の全体を表わす．$f \in \mathcal{E}^r$ に対して，$\mathrm{Fix}(f)$ で f の不動点集合を，$\#\,\mathrm{Fix}(f)$ でその元の数を表わすものとする．

Example 1.2. $\rho = (f_1,\ldots,f_k) \in (\mathcal{E}^r)^k$ すべての i について $0 < f_i' < 1$ をみたすとする．このとき，すべての $\omega \in \{1,\ldots,k\}^*$ に対して $0 < (\rho^\omega)' < 1$. 縮小写像原理より，$\#\,\mathrm{Fix}(\rho^\omega) = 1$. 特に，

$$\int_{\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}} \#\,\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n})\mu_\infty(\bar{\omega}) = 1$$

となり，すべての $\bar{\omega} \in \{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$ に対する数列 $(\#\,\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ の振舞いは平均のそれと一致する．

Example 1.3. $\rho = (f_1,\ldots,f_k)$ について，すべての f_i が次数が L 以下の多項式であるとする．このとき，すべての $\omega \in \{1,\ldots,k\}^*$ について，ρ^ω の次数は $L^{|\omega|}$ 以下となり，$\#\,\mathrm{Fix}(\rho^\omega) \le L^{|\omega|}$. すなわち，$\#\,\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n})$ は高々指数的な増大度 [2] を持つ．特に，$\#\,\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n})$ の $\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$ 上の平均も高々指数的な増大度を持つ．

次の例は一見 Example 1.2 とよく似たものに見える．

Example 1.4. $[0,1]$ 上の連続函数 h に対して $\|h\| = \max_{x\in[0,1]} |h(x)|$ と定める．$\rho = (f_1,\ldots,f_k) \in (\mathcal{E}^r)^k$ が

$$\int_{\{1,\ldots,k\}} \log \|f_i'\| d\mu < 0 \tag{1}$$

をみたすとする．このとき，合成函数の微分の公式と大数の法則から，μ_∞-a.e. $\bar{\omega} = \omega_1\omega_2\cdots \in \{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\rho^{\bar{\omega}|_n})'\| \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \log \|(f_{\omega_m})'\| = \int_{\{1,\ldots,k\}} \log \|f_i'\| d\mu < 0.$$

すなわち，μ_∞-a.e. $\omega \in \{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}$ に対して，n が十分大きければ $\|(\rho^{\bar{\omega}|_n})'\| < 1$，特に，$\lim_{n\to\infty} \#\,\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n}) = 1$ が成り立つ．

[2] 0 以上の数からなる数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，定数 $C > 0$ と $\lambda > 1$ ですべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \le C\lambda^n$ をみたすようなものが存在するとき，数列 (a_n) は高々指数的な増大度を持つという

この設定の下で次の問いは自然なものであろう.

Problem 1.5. $\rho = (f_1, \ldots, f_k)$ が (1) をみたすとき, $\#\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|n})$ の平均について,

$$\int_{\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}} \#\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|n}) d\mu_\infty(\bar{\omega}) = 1 \tag{2}$$

が成り立つか?

次節で述べる本稿の主結果の帰結として, あるシンプルな仮定の下では (1) をみたすようなランダム力学系の多くのものは (2) をみたさないだけでなく, (2) の積分が非常に速く増大していくことを示すことができる. すなわち, 区間上のランダム力学系において, 系の持つ力学系的な量の時間発展の典型的な漸近的な振舞いと, 同じ量の平均の漸近的な振舞いが全く異なるという現象が豊富に起きていることになる.

2 周期軌道の数の平均が速く増大するランダム力学系

本節では $\#\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{s}|n})$ の $\{1, \ldots, k\}^{\mathbb{N}}$ 上の平均の増大度が大きい $\rho = (f_1, \ldots, f_k)$ たちが豊富に存在するような領域を与える.

C^r 位相 $\rho = (f_1, \ldots, f_k), \xi = (g_1, \ldots, g_k) \in (\mathcal{E}^r)^k$ に対して, ρ と ξ の距離 $d_r(\rho, \xi)$ を

$$d_r(\rho, \xi) = \max_{i=1,\ldots,k} \sum_{s=0}^{r} \|f_i^{(s)} - g_i^{(s)}\|$$

で定める. ここで, $f \in \mathcal{E}^r$ に対して $f^{(s)}$ で f の s 階微分を表わすものとする. 距離 d_r が定める $(\mathcal{E}^r)^k$ 上の位相を C^r 位相と言う. $(\mathcal{E}^r)^k$ の開集合 $\mathcal{U}$ の部分集合 $\mathcal{R}$ について, $\mathcal{U}$ の開部分集合の可算族 $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で, 各 O_n の閉包が U を含み, $\mathcal{R} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ となるようなものを取ることができるとき, $\mathcal{R}$ は $\mathcal{U}$ の **residual** な部分集合であると言う. $(\mathcal{E}^r)^k$ の元に関する性質 P が $\mathcal{U}$ のある residual な部分集合で成り立つとき, 性質 P は $\mathcal{U}$ で **C^r-generic** であると言う.

Blender J を開区間 $(0,1)$ に含まれる閉区間とする. $(\mathcal{E}^r)^{k-1}$ の元 $\rho = (f_1, \ldots, f_{k-1})$ が J 上の **blender** をなすとは, すべての $x \in J$ に対して, x の**前方軌道**

$$\{\rho^\omega(x) \mid \omega \in \{1, \ldots, k-1\}^*\}$$

の閉包が J を含むことを言う. ρ が J 上の **C^r-persistent blender** をなすとは, ρ の $(\mathcal{E}^r)^k$ におけるある開近傍 $\mathcal{U}$ において, すべての $\rho' \in \mathcal{U}$ が J 上の blender をなすことを言う. 次が知られている.

Proposition 2.1. $(f_1, f_2) \in (\mathcal{E}^r)^2$ が次をみたすとき，(f_1, f_2) は閉区間 $[a, b]$ 上の C^r*-persistent blender:*

1. 各 $i = 1, 2$ について，$0 < \|f_i'\| < 1$.
2. ある $0 < x_1 < a < b < x_2 < 1$ について，$f_1(x_1) = x_1$，$f_2(x_2) = x_2$，$f_2(x_1) < f_1(x_2)$.

Heteroclinic 軌道　$f \in \mathcal{E}^r$ と $p, q \in [0, 1]$ について，(p, q) が f の **repeller-attractor pair** であるとは次をみたすことを言う：

1. p は f の反発的不動点．すなわち，$f(p) = p$, $f'(p) > 1$.
2. q は f の吸引的不動点．すなわち，$f(q) = q$, $f'(q) < 1$.
3. $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n([0, 1])$ で，$\lim_{n \to -\infty} f^n(z) = p$, $\lim_{n \to +\infty} f^n(z) = q$ をみたすものが存在する (z を対 (p, q) の **heteroclinic 点**という).

$(f_1, \ldots, f_k) \in (\mathcal{E}^1)^k$ で，$(f_1, \ldots, f_{k-1})$ がある閉区間 $J \subset (0, 1)$ 上の C^1-persistent blender をなし，f_k が $p, q \in \operatorname{Int} J$ となるような repellor-attractor pair を持つようなもの全体のなす $(\mathcal{E}^1)^k$ の部分集合を $\mathcal{W}^1$ と定める．$\mathcal{W}^1$ が $(\mathcal{E}^1)^k$ の開部分集合であることは容易にわかる．

Nonlinearity, Schwarz 微分　ある区間 I 上の臨界点を持たない C^2 級函数 h と $x \in I$ について，x における h の **nonlinearity** $A(h)_x$ を

$$A(h)_x = \frac{h''(x)}{h'(x)} = (\log h)'(x)$$

で定める．また，h が C^3 級のとき，x における **Schwarz 微分** $S(h)_x$ を

$$S(h)_x = \left(\frac{f'''(x)}{f'(x)}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

で定める．(p, q) を $f \in \mathcal{E}^r$ の repellor-attractor pair とする．このとき，p, q をそれぞれ含む開区間 I_p^u, I_q^s と C^r 級微分同相写像 $\varphi_p : I_p^u \to \mathbb{R}$，$\varphi_q : I_q^s \to \mathbb{R}$ で次をみたすものを取ることができる：

1. $f(I_p^u) = I_p^u$, $f(I_q^s) = I_q^s$,
2. $\varphi_p(p) = \varphi_q(q) = 0$, $\varphi_p'(p) = \varphi_q'(q) = 1$,
3. $\varphi_p \circ f = L_{f'(p)} \circ \varphi_p$, $\varphi_q \circ f = L_{f'(q)} \circ \varphi_q$. ただし，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $L_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $L_\alpha(y) = \alpha y$ で定めるものとする．

φ_p, φ_q を p, q における (正規化された) **線型化座標**という．(φ_p, φ_q) はただ一組取ることができることが知られており，$I_p^u \cap I_q^s$ が対 (p, q) の homoclinic 点全体となることもわかる．対 (p, q) の homoclinic 点 z について，f が C^2, C^3 級のとき，それぞれ，

$$\sigma(z,f) = \operatorname{sgn}\left[A(\varphi_q \circ \varphi_p^{-1})_{\varphi_p(z)}\right]$$
$$\tau(z,f) = \operatorname{sgn}\left[S(\varphi_q \circ \varphi_p^{-1})_{\varphi_p(z)}\right]$$

と定める．ここで $\operatorname{sgn}(x) \in \{0, \pm 1\}$ は $\mathbb{R}$ 上の符号函数とする．

$\mathcal{W}^2$ を次をみたす $(f_1, \ldots, f_k) \in (\mathcal{E}^2)^r$ の全体のなす $(\mathcal{E}^2)^k$ の部分集合とする：

1. $(f_1, \ldots, f_{k-1})$ はある閉区間 $J \subset (0, 1)$ 上の C^r-persistent blender.
2. f_k の repeller-attractor pair (p_1, q_1)，(p_2, q_2) とそれぞれの heteroclinic point z_1, z_2 で，$p_1, p_2, q_1, q_2 \in \operatorname{Int} J$, $\sigma(z_1, f_k) \cdot \sigma(z_2, f_k) = -1$ となるものが存在する．

$3 \leq r \leq \infty$ に対して，$\mathcal{W}^r$ を次をみたす $(f_1, \ldots, f_k) \in (\mathcal{E}^r)^k$ の全体のなす $(\mathcal{E}^r)^k$ の部分集合とする：

1. $(f_1, \ldots, f_k)$ は $\mathcal{W}^2$ に属する．
2. J を $\mathcal{W}^2$ の定義にある閉区間としたとき，f_k の repeller-attractor pair (p_3, q_3)，(p_4, q_4) とそれぞれの heteroclinic point z_3, z_4 で，$p_3, p_4, q_3, q_4 \in \operatorname{Int} J$, $\tau(z_3, f_k) \cdot \tau(z_4, f_k) = -1$ となるものが存在する [3]．

$\sigma(z, f)$, $\tau(z, f)$ が f を摂動しても変化しないことを示すことができ，そのことから $\mathcal{W}^r$ が $(\mathcal{E}^r)^k$ の開部分集合であることが従う．

次の定理が本稿における主結果である．

Theorem 2.2 (浅岡-Turaev-篠原 [AST])**.** *$1 \leq r \leq \infty$ と正の数からなる数列 $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとき，$\mathcal{W}^r$ において，次をみたす $\rho = (f_1, \ldots, f_k)$ は C^r-generic:*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{c_n} \int_{\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}} \#\operatorname{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n}) d\mu_\infty(\bar{\omega}) = +\infty.$$

例えば $c_n = n!$ とすれば，$\#\operatorname{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n})$ の平均の増大度が指数的よりも速いものが $\mathcal{W}^r$ において C^r-generic であることがわかる．また，(f_1, f_2) として Proposition 2.1 のものを取れば $\|f_1'\| < 1$, $\|f_2'\| < 1$ であるので，f_3 とし

[3] $(p_1, q_1), \ldots, (p_4, q_4)$ はすべて同じでも構わない．

て $\|f_3' - 1\|$ が十分小さいものを取ることで Example 1.4 の条件 (1) をみたすようにできる．従って，$k=3$ の場合，$\mathcal{W}^r$ の元で (1) をみたすものの全体を $\mathcal{U}^r$ とすると，$\mathcal{U}^r$ は $(\mathcal{E}^r)^3$ の空でない開部分集合．$\mathcal{U}^r$ に属するすべての ρ は μ_∞-a.e. $\omega \in \{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ について

$$\lim_{n\to+\infty} \#\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n}) = 1$$

をみたす一方で，与えられた正数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して C^r-generic な $\rho \in \mathcal{U}^r$ については，$\#\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n})$ の μ_∞ に関する平均は $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ よりも速い増大度を持つことになる．

Theorem 2.2 は C^r-摂動による分岐が r によって大幅に異なる例も与える．すべての i について $A(f_i) > 0$ となるような $\mathcal{W}^1 \cap (\mathcal{E}^2)^k$ の元 $\rho = (f_1, \ldots, f_k)$ を構成することは難しくない．Nonlinearity が cocycle property

$$A(f\circ g)_x = g'(x)\cdot A(f)_{g(x)} + A(g)_x \tag{3}$$

をみたすことから，$A(\rho^\omega) > 0$ がすべての $\omega \in \{1,\ldots,k\}^*$ について成り立つ．これは ρ^ω が下に凸であることを意味しており，特に $\#\mathrm{Fix}(\rho^\omega) \le 2$ となる．一方で，Theorem 2.2 の $r=1$ の場合から，C^1 位相におけるある近傍では generic には $\#\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n})$ の平均は速く増大する．Schwarz 微分についても，

$$S(f\circ g)_x = (g'(x))^2 S(f)_{g(x)} + S(g)_x \tag{4}$$

が成り立つことから，$\mathcal{W}^2 \cap (\mathcal{E}^3)^k$ の元 $\rho = (f_1,\ldots,f_k)$ で $S(f_i) > 0$ となるものを取れば，同様の議論により，ρ の C^3 近傍に属するすべての ρ' と $\omega \in \{1,\ldots,k\}^*$ に対して $\#\mathrm{Fix}(\rho^\omega) \le 2$ が成り立つ一方で，ρ のある C^2-近傍では $\#\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n})$ の平均が速い増大度を持つことを示すことができる．

3 普遍力学系

$\mathcal{W}^r$ の C^r-generic な元はその周期点の平均増大度が非常に大きいという意味で複雑なだけではなく，次の定理で見るように，$(\mathcal{E}^k)^r$ の稠密部分集合に属するダイナミクスがそのスケール変換によって実現できてしまうという意味でも非常に複雑なものとなる．

$k, l \in \mathbb{N}$ と $(\mathcal{E}^r)^k$ の元 $\rho = (f_1,\ldots,f_k)$，$(\mathcal{E}^r)^l$ の元 $\xi = (g_1,\ldots,g_l)$ について，ρ が ξ を**実現する**とは，$\eta_1,\ldots,\eta_l \in \{1,\ldots,k\}^*$ と閉区間 $I \subset [0,1]$，C^r 級微分同相写像 $h: I \to [0,1]$ で，$\rho^{\eta_j}(I) \subset I$, $g_j = h\circ\rho^{\eta_j}\circ h^{-1}$ がすべての $j = 1,\ldots,l$ について成り立つものを取ることができることを言う．ρ が ξ をこのように実現しているとき，$\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n \in \{1,\ldots,l\}$ に対して，

$$\xi^\omega = h\circ\rho^{\eta_{\omega_1}\eta_{\omega_2}\cdots\eta_{\omega_n}}\circ h^{-1}$$

が成り立つ.

$\rho = (f_1, \ldots, f_k)$ が C^r-**普遍力学系**であるとは，すべての $l \in \mathbb{N}$ に対して，ρ が実現するような $(\mathcal{E}^r)^l$ の全体が $(\mathcal{E}^r)^k$ の稠密部分集合となることを言う．このようなある力学系のクラスの稠密部分集合を座標変換によってすべて実現するような系が豊富に存在することは，微分同相写像の反復合成による通常の力学系の場合には Bonatti-Diaz [BD] や Turaev [Tu] によって証明されている．区間上のランダム力学系に関しては，Theorem 2.2 の証明とほぼ同じ手法で次の定理を得ることができる

Theorem 3.1 (浅岡-篠原-Turaev [AST]). $\mathcal{W}^r$ の C^r-*generic* な元は C^r-普遍力学系である．

また，定理の証明から次の結果を得ることもできる．

Theorem 3.2. $\mathcal{W}^r$ の空でない任意の開部分集合 $\mathcal{U}$ と $(\mathcal{E}^r)^l$ の元 $(g_1, \ldots, g_l)$ に対して，$\mathcal{U}$ の元で $(g_1, \ldots, g_l)$ を実現するものが存在する．

この結果は，$\mathcal{W}^r$ の元の分岐を調べることは，すべての $l \in \mathbb{N}$ について $(\mathcal{E}^r)^l$ のすべてのダイナミクスを調べることと同値であるということであり，それを遂行することはほぼ絶望的であるということを意味している．

4 Theorem 2.2 の証明について

以下，$1 \leq r \leq \infty$ と $\mathcal{W}^r$ の元 $\rho = (f_1, \ldots, f_k)$ を固定する．$[0,1]$ 上の向きを保つ C^r 級微分同相写像の全体を $\mathrm{Diff}_+([0,1])$ で表し，$h \in \mathrm{Diff}^r_+([0,1])$ に対して，$(\mathcal{E}^r)^k$ の元 ρ_h を $\rho_h = (f_1, \ldots, f_{k-1}, h \circ f_k)$ で定める．$f \in \mathcal{E}^r$ に対して，$\mathrm{Fix}_*(f)$ で f の双曲的な不動点の全体のなす集合とする．

以下の定理を示せば Theorem 2.2 が得られる：

Theorem 4.1. 正の数からなる数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$\mathrm{Diff}^r_+([0,1])$ における恒等写像の C^r-近傍 $\mathcal{U}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ が与えられたとき，$\mathcal{U}$ の元 h と $\omega \in \{1, \ldots, k\}^*$ で，$|\omega| \geq n_0$,

$$\#\,\mathrm{Fix}_*(\rho_h^\omega) \geq c_n$$

をみたすものが存在する．

実際，Theorem 4.1 から Theorem 2.2 は次のようにして得られる: μ^n を直積集合 $\{1, \ldots, k\}^n$ 上の μ が定める積測度として，$\alpha_n = \min_{\omega\in\{1,\ldots,k\}^n} \mu^n(\{\omega\})$ と置く．与えられた数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，

$$\mathcal{U}_n = \left\{ \rho \in \mathcal{W}^r \,\middle|\, \max_{\omega\in\{1,\ldots,k\}^n} \#\,\mathrm{Fix}(\rho^\omega) \geq \frac{n c_n}{\alpha_n} \right\}$$

と定める．双曲的不動点の安定性から $\mathcal{U}_n$ は $\mathcal{W}^r$ の開部分集合．また，Theorem 4.1 を数列 $(nc_n/\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に適用することで，$\bigcup_{m\geq n}\mathcal{U}_m$ が $\mathcal{W}^r$ の稠密部分集合であることもわかる．また，$\rho\in\mathcal{U}_n$ ならば，

$$\begin{aligned}\int_{\{1,\dots,k\}^{\mathbb{N}}}\#\operatorname{Fix}(\rho^{\bar{\omega}|_n})d\mu_\infty(\bar{\omega}) &= \int_{\{1,\dots,k\}^n}\#\operatorname{Fix}(\rho^{\omega})d\mu^n(\omega)\\ &\geq \max_{\omega\in\{1,\dots,k\}^n}\#\operatorname{Fix}(\rho^{\omega})\cdot\alpha_n\\ &\geq nc_n\end{aligned}$$

より，$\mathcal{W}^r$ の generic な元 $(f_1,\dots,f_k)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}\mathcal{U}_m$ は (2.2) をみたす．

Kaloshin [K] と同様に，Theorem 4.1 の証明は r-flat な周期点をつくること，すなわち，恒等写像に C^r-位相で近い h と，$s\in\{1,\dots,k\}^*$, $x_*\in[0,1]$ で，$|\omega|\geq n_0$, $\rho_h^{\omega}(x)=x$, $(\rho_h^{\omega})'(x)=1$, かつ，$s=2,\dots,r$ に対して $(\rho_h^{\omega})^{(s)}=0$ となるものを見つけることに帰着される．このような r-flat な周期点の構成は，まず 1-flat な周期点をいくつか作り，それを用いて 2-flat なものを，さらに 2-flat なものたちから 3-flat なものを…といった帰納的な方法によってなされるが，その際に基本となるのは周期点たちを繋いで一つの周期軌道にすることを可能にする次の Connecting Lemma である．J を $\mathcal{W}^r$ の定義にある閉区間とする．このとき，$f_1,\dots,f_{k-1}$ は J 上の blender であるが，後方軌道

$$\{(\rho^{\omega})^{-1}(x)\mid\omega\in\{1,\dots,k-1\}^*\}$$

が J で稠密であるような点を J の **generic** 点であるという．generic 点は J の稠密部分集合となることが知られている．$h\in\operatorname{Diff}^r_+(0,1)$ に対して，h の台 $\operatorname{supp}(h)$ を $\{x\in[0,1]\mid h(x)\neq x\}$ の閉包として定める．

Lemma 4.2 (Connecting Lemma). *J の点 x_0,x_1 と開区間 U について x_1 が J の generic 点で $U\cap\operatorname{Int}J\cap f_k(\operatorname{Int}J)\neq\emptyset$ をみたすとする．このとき，任意の $\operatorname{Diff}^r_+([0,1])$ における恒等写像の開近傍 $\mathcal{U}$ に対して，$\eta,\eta'\in\{1,\dots,k-1\}^*$ と $h\in\mathcal{U}$ で，$\rho_h^{\eta k\eta'}(x_0)=x_1$，$\operatorname{supp}(h)\subset U$ となるものが存在する．*

blender と generic 点の定義に基いて，$\rho^{\eta_0}(x_0)$ が $f_k^{-1}(U)\cap\operatorname{Int}J\cap f_k^{-1}(\operatorname{Int}J)$ に入るような $\eta\in\{1,\dots,k-1\}^*$ と，$f_k(\rho^{\eta'}(x_0))$ に十分近い $x_*\in U$ と $\eta'\in\{1,\dots,k-1\}^*$ で $\rho^{\eta'}(x_*)=x_1$ となるものを取ったあとで，$\mathcal{U}$ の元 h で $h(f_k(\rho^{\eta}(x_0)))=x_*$ となるものを取れば補題は証明できる．

その証明から，Lemma 4.2 において，x_0', x_1' がそれぞれ x_0, x_1 に十分近ければ，h に十分近い h' で $\rho_{h'}^{\eta k\eta'}(x_0')=x_1'$ となるものが取れることに注意する．

1-flat な周期点の構成　J を $f_1,\dots,f_{k-1}$ が blender となる閉区間とし，(p,q) を f_k の repeller-attractor pair で $p,q\in\mathrm{Int}\,J$ であるものとする．f_k を p の周りで摂動することで，p が generic 点であり，また，$f_k'(p)=\lambda_p$, $f_k'(q)=\lambda_q$ と置いたときに，$\log\lambda_p/\log\lambda_q$ が無理数であるとしてよい．(p,q) の heterclinic 点 z_* に対して，$\mathrm{Int}\,J\cap f_k^{-1}(J)$ に含まれる開区間 U を，その閉包が $\{p,q\}\cup\{f_k^n(z_*)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ と交わならいように取る．Lemma 4.2 より，$\eta,\eta'\in\{1,\dots,k-1\}$ と恒等写像に十分近い $h\in\mathrm{Diff}^r_+([0,1])$ で，$\rho_h^{\eta k\eta'}(q)=p$, $\mathrm{supp}(h)\subset U$ となるものがある．φ_p, φ_q を f_k に関する p,q における線型化座標として，

$$\alpha=(\varphi_q\circ\varphi_p^{-1})'(\varphi_p(z_*)),$$
$$\beta=(\varphi_p\circ\rho_h^{\eta k\eta'}\circ\varphi_q^{-1})'(\varphi_q(q))$$

と置く．$\log\lambda_p/\log\lambda_q$ が無理数なので，自然数の増大列 $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{j\to\infty}\lambda_p^{m_j}\lambda_q^{n_j}=(\alpha\beta)^{-1}$ となるものが存在する．$f_k^{-m_j}(z_*)$ と $f_k^{n_j}(z_*)$ は $j\to\infty$ でそれぞれ p,q に近づくので，h に近づく $\mathrm{Diff}^r_+([0,1])$ の元の列 $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ で $\rho_{h_j}^{\eta k\eta'}(f^{n_j}(z_*))=f_k^{-m_j}(z_*)$ となるものが存在する．このとき，$y_*=\varphi_q(z_*)$, $y_j^-=\varphi_p(f_k^{-m_j}(z_*))$, $y_j^+=\varphi_p(f_k^{n_j}(z_*))$, $\omega_j=k^{n_j}\,\eta\,k\,\eta'\,k^{m_j}$ (k^n で文字 k の n 回繰り返しを表わす) と置くと，

$$\begin{aligned}
(\rho_{h_j}^{\omega_j})'(z_*)&=(\varphi_q\circ\rho_{h_j}^{\omega_j}\circ\varphi_q^{-1})'(y_*)\\
&=(\varphi_q\circ\varphi_p^{-1})(y_*)\cdot(\varphi_p\circ f_k^{m_j}\circ\varphi_p^{-1})'(y_j^-)\\
&\quad\cdot(\varphi_p\circ\rho_{h_j}^{\eta k\eta'}\circ\varphi_q^{-1})'(y_j^+)\cdot(\varphi_q\circ f^{n_j}\circ\varphi_q^{-1})'(y_*)\\
&=\alpha\cdot\lambda_p^{m_j}\cdot(\varphi_p\circ\rho_{h_j}^{\eta k\eta'}\circ\varphi_q^{-1})'(y_j^+)\cdot\lambda_q^{n_j}\\
&\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}\alpha\beta(\alpha\beta)^{-1}=1.
\end{aligned}$$

従って，j を十分大きく取り，h_j の摂動 $\bar{h}$ をうまく選ぶことで，$\rho_{\bar{h}}^{\omega_j}(z_*)=z_*$, $(\rho_{\bar{h}}^{\omega_j})'(z_*)=1$ となるようにすることができる．また，上と同様の式変形をして (3), (4) を用いると $A(\rho_{\bar{h}}^{\omega_j})_{z_*}$, $S(\rho_{\bar{h}}^{\omega_j})_{z_*}$ の符号がそれぞれ $A(z_*,f_k)$, $S(z_*,f_k)$ と一致し，$S(\rho_{\bar{h}}^{\omega_j})_{z_*}/A(\rho_{\bar{h}}^{\omega_j})_{z_*}$ を好きなだけ大きくすることができることもわかる．

2-flat, 3-flat な周期点の構成　恒等写像に十分近いある $h\in\mathrm{Diff}^r_+([0,1])$ と k をどこかに含む $\gamma_1,\dots,\gamma_4\in\{1,\dots,k\}^*$ に対して，$p_1,\dots,p_4$ がそれぞれ $\rho_h^{\gamma_1}$ の 1-flat な不動点であり，$A(\rho_h^{\gamma_1})_{p_1}>0>A(\rho_h^{\gamma_3})_{p_3}$ をみたしているとする (1-flat な周期点を作る議論から，このような状況を作ることはできる)．h を摂動して，$A(\rho_h^{\gamma_1})_{p_1}/A(\rho_h^{\gamma_3})_{p_3}$ は無理数であるとしてよい．Lemma 4.2 により，h をその摂動で置き換えて $\rho_h^{\eta_j k\eta_j'}(p_j)=p_{j+1}$ をみたす $\eta_j,\eta_j'\in\{1,\dots,k-1\}^*$

$(j=1,\ldots,4$, ただし $p_5=p_1$ とする$)$ があるとしてよい．十分大きな l をとり，h をさらに p_2, p_4 のまわりで摂動することで，$\rho_h^{\gamma_{2i}}(p_{2i})=p_{2i}$, かつ,

$$(\rho_h^{\gamma_{2i}})'(p_{2i})=\left[(\rho_h^{\eta_{2i-1}k\eta'_{2i-1}})(p_{2i-1})\cdot(\rho_h^{\eta_{2i}k\eta'_{2i}})(p_{2i})\right]^{-1/l}$$

$(i=1,2)$ となるようにできる．$\omega_i=\eta_{2i-1}k\eta'_{2i-1}(\gamma_{2i})^l\eta_{2i}k\eta'_{2i}$ と置くと，$\rho_h^{\omega_i}(p_{2i-1})=p_{2i+1}$, $(\rho_h^{\omega_i})'(p_{2i-1})=1$ が成り立つ．特に，$\rho_h^{\gamma_1^m\omega_1\gamma_3^n\omega_2}(p_1)=p_1$, $(\rho_h^{\gamma_1^m\omega_1\gamma_3^n\omega_2})'(p_1)=1$. (3) より $m,n\in\mathbb{N}$ に対して

$$A(\rho_h^{\gamma_1^m\omega_1\gamma_3^n\omega_2})_{p_1}=A(\rho_h^{\omega_2})_{p_3}+nA(\rho_h^{\gamma_3})_{p_3}+A(\rho_h^{\omega_1})_{p_1}+mA(\rho_h^{\gamma_3})_{p_1}$$

となるので，$A(\rho_h^{\gamma_1})_{p_1}>0>A(\rho_h^{\gamma_3})$, かつ $A(\rho_h^{\gamma_1})_{p_1}/A(\rho_h^{\gamma_3})$ が無理数であることを思い出すと，自然数の増大列 $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ で

$$\lim_{j\to\infty}A(\rho_h^{\gamma_1^{m_j}\omega_1\gamma_3^{n_j}\omega_2})_{p_1}=0$$

となるものを取ることができる．あとは十分大きい j を取り，h を p_1 の周りで摂動することで，p_1 を $\rho_h^{\gamma_1^{m_j}\omega_1\gamma_3^{n_j}\omega_2}$ の 2-flat な不動点にすることができる．さらに，この不動点での Schwarz 微分を評価することで，Schwarz 微分が正，負の 2-flat な周期点がそれぞれ構成できることを示すこともできる．いったんそのような 2-flat な周期点を構成できれば，3-flat な周期点の構成は (4) を用いれば 2-flat な周期点の構成とほぼ同様である．

s-flat $(s>3)$ な周期点の構成　$s>3$ のときも上と同様にいくつかの $(s-1)$-flat な周期点を Lemma 4.2 を用いてつなぐことで得ることができるが，$s=2,3$ の場合と違い，s 階微分についての条件は $\mathcal{W}^r$ にはないので，s 階微分が正と負である二つの $(s-1)$-flat な周期点を用いて $(s-1)$ 階微分を消すという方法は使えない．しかし，$s>3$ ならば，$G(x)=x+tx^2+o(x^2)$, $H(x)=x+ctx^{s-1}+o(x^{s-1})$ に対して

$$G\circ H\circ G^{-1}\circ H^{-1}(x)=x-(s-3)ct^2x^s+o(x^s)$$

が成り立つという事実を用いることで，s 階微分が正と負である $(s-1)$-flat な周期点を使わなくても $(s-1)$ 階までの微分を消すことができることができる．詳しくは論文 [AST] の Lemma 3.7 を参照してほしい．

5　実解析的な場合

閉区間上 I の (臨界点も持ちうる) 実解析的写像 $f:I\to I$ については，Martens, de Melo, Van strien による結果 [MMS] から，$\#\mathrm{Fix}(f^n)$ の増大度は高々指数

的であることを示すことができる．一方で，最近，著者 [A] は閉曲面上の実解析的面積保存写像で周期点の数が速く増大するようなものが豊富にあることを示した．次の自然な問題は著者の知る限りでは未解決である．

Problem 5.1. $f_1, \ldots, f_k$ を閉区間 I からそれ自身への実解析的写像，μ を $\{1, \ldots, k\}$ 上の確率測度とする．このとき，$\rho = (f_1, \ldots, f_k)$ について，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\{1,\ldots,k\}^{\mathbb{N}}} \#\mathrm{Fix}(\rho^{\bar{\omega}}) d\mu_\infty(\bar{\omega})$$

は常に有限の値を取るか？

References

[A] M.Asaoka, *Fast growth of the number of periodic points in generic families of two-dimensional real-analytic area-preserving diffeomorphisms*, arXiv:1603.08639.

[AST] M.Asaoka, D.Turaev, and K.Shinohara, *Degenerate behavior in non-hyperbolic semigroup actions on the interval: fast growth of periodic points and universal dynamics*, arXiv:1506.07279.

[BD] C. Bonatti and L. Díaz, *On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **96** (2002), 171–197.

[K] V. Kaloshin, *Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic orbits*, Comm. Math. Phys. **211** (2000), No. 1, 253–271.

[MMS] M. Martens, W. de Melo and S. van Strien, *Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics*, Acta Math., **168** (1992), 273–318.

[Tu] D.Turaev, *Maps close to identity and universal maps in the Newhouse domain*, Comm. Math. Phys. **335** (2015), 1235–1277.