数理解析研究所講究録
第2028巻 2017年 109-112

共変リアプノフ解析を用いた雑音環境下における周期的身体運動のシナジー評価

*1 東京工業大学　情報環境学専攻，*2 青森大学　ソフトウェア情報学部
白坂　将 *1，紅林　亘 *2，中尾　裕也 *1
Sho Shirasaka*1, Wataru Kurebayashi*2 and Hiroya Nakao*1
*1Department of Mechanical and Environmental Informatics,
Tokyo Institute of Technology,
*2Faculty of Software and Information Technology, Aomori University

概 要

歩行などの運動タスクを柔軟に達成するために，動物の神経筋骨格系がその冗長自由度をどのように協調させているか，について理解することは身体運動研究の中心的課題とされてきた．この冗長自由度の協調（シナジー）の力学的側面を定量的に扱うための指標（シナジー指標）が提案されており，さかんに実験データにもとづく解析が行われている．しかしながら，運動タスクの背景にある身体ダイナミクスとシナジー指標を理論的に関連付けることは行われていない．本研究では，安定リミットサイクルで記述されるような周期的運動タスクが弱い白色ガウス雑音入力を受ける場合について，シナジー指標の理論的評価を行う．特に，共変リアプノフ（フロケ）解析を用いることでシナジー指標の計算が非常に簡素になることを示す．

1　緒言

動物の神経筋骨格系は膨大な自由度をもち，特定の運動タスクを生成する際にしばしば冗長性を生じる．ここでいう冗長性とは，ある運動のパフォーマンスを実現するために必要でないような，余分な自由度をもつことである．例えば，人間は手足の位置及び姿勢を一つ定めために必要とされるよりも多くの関節をもっている．また，筋収縮の程度を定めるために必要とされるより多くの運動単位を筋はもっている．動物が運動タスクをこなす際に，その冗長自由度をどのように協調，活用しているか（シナジー），という問題は自由度問題またはベルンシュタイン問題とよばれ [1]，身体運動研究における中心的な課題となっている [2]．

Scholz と Schöner は力学系理論，とくに安定性の概念から，運動シナジーの問題にアプローチする着想を得た．彼らは Uncontrolled Manifold (UCM) [3] という概念を導入し，雑音環境下において運動タスクを柔軟に達成できるように冗長自由度が協調しているかどうかの度合いを定量化する指標を提案した．さまざまな運動タスクについてシナジー指標は実験的に評価されているが [2]，運動タスクの背景にあるダイナミクスと協調度を理論的に関連づけるような研究はこれまで行われてこなかった．このような関連づけにより装具や補綴の設計最適化やロバスト性評価，運動障害の病態解明や治療法開発などの促進が期待される [4]．

本研究では，基本的な運動タスクである周期運動に着目し，弱い白色ガウス雑音入力をうける安定なリミットサイクルのシナジー指標を理論的に評価する．外乱の弱い条件下では，変分方程式によってリミットサイクル軌道からのずれを線形のダイナミクスとして表現できるが，共変リアプノフ（フロケ）解析 [5, 6] を用いることでこの解析は非常に簡素化される．

2 UCM 解析とシナジー指標

ある身体運動タスクが n 次元状態変数 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ についての確率過程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in \mathcal{T}\}, \mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ によって記述されるとする．運動タスクに適当な始点と終点（例えば，歩行であれば同側の足の着地）を定め，始点から終点までの時間区間上で定義される標本路が N 本 $\{\boldsymbol{x}_i(t)\}_{i=1}^N$ 得られたとする．これらの標本路が全て同じ時間区間 $[0,T]$ をもつようにスケールした $\{\tilde{\boldsymbol{x}}_i(t)\}_{i=1}^N$，を考え，そのアンサンブル平均を $\bar{\chi} : \bar{\boldsymbol{x}}(t)$ とする．

運動タスクのパフォーマンスを m 次元の変数 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\Omega}_g \subset \mathbb{R}^m$（以下，性能変数と呼ぶ）を用いて評価する．$m < n$ のとき，身体はあるパフォーマンスを達成するのに余分な自由度をもっていると考えられる．性能変数には身体の重心や足先の位置などが選ばれる．

アンサンブル平均 $\bar{\chi}$ に対応する性能変数の時間発展 $\chi_g : \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}(t))$ を考え，各正規化時刻 $t_* \in [0,T]$ において，性能変数のある種の安定性を評価するのが UCM 解析である．時刻 t_* において，アンサンブル平均と同等とパフォーマンスを達成する $\boldsymbol{\Omega}$ 上の点の集合として UCM は以下のように定義される．

$$\mathcal{U}(t_*) \equiv \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}(t_*))) \tag{1}$$

$\mathcal{U}(t_*)$ は一般に非線形な構造をもつため，$\bar{\boldsymbol{x}}(t_*)$ における接空間で近似される．

時刻 t_* において各標本路のアンサンブル平均からの偏差ベクトル $\boldsymbol{\sigma}_i(t_*) \equiv \boldsymbol{x}_i(t_*) - \bar{\boldsymbol{x}}(t_*)$ をこの接空間とその直交補空間方向に分解する．

$$\boldsymbol{\sigma}_i(t_*) = \boldsymbol{\sigma}_i^{\parallel}(t_*) + \boldsymbol{\sigma}_i^{\perp}(t_*) \tag{2}$$

$\boldsymbol{\sigma}_i^{\parallel}(t_*)$ は UCM の接空間方向に対応しており，性能変数に影響を与えない偏差ベクトルの成分である．状態変数について大きくアンサンブル平均からのずれがあっても，この成分が支配的であれば，冗長自由度の働きにより性能変数の変化が抑えられ，柔軟に運動タスクのパフォーマンスを達成できる．

この支配度を定量化したものがシナジー指標である．各成分のユークリッドノルム $\|\cdot\|$ の分散

$$V^{\parallel}(t_*) = \frac{1}{n-m}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{\sigma}_i^{\parallel}(t_*)\| \tag{3}$$

$$V^{\perp}(t_*) = \frac{1}{m}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{\sigma}_i^{\perp}(t_*)\| \tag{4}$$

の比をとったもの

$$S(t_*) = \frac{V^{\parallel}(t_*) - V^{\perp}(t_*)}{V^{\parallel}(t_*) + V^{\perp}(t_*)} \tag{5}$$

をシナジー指標と呼ぶ．

3 シナジー指標の評価

3.1 システム

身体運動を次の伊藤型確率微分方程式でモデル化する．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \epsilon \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}(t) \tag{6}$$

ここで $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ は非摂動系のベクトル場，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は行列値関数，$\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$ はその要素 $\xi_i(t)$ は互いに独立で，平均 0, 分散 1 の白色ガウス雑音，$\epsilon \geq 0$ は雑音の強度を表す．非摂動系 $(\epsilon = 0)$ は周期 T の線形安定なリミットサイクル解 $\chi_0 : \boldsymbol{x}_0(t)$ を持つとする．

3.2 理論的評価

詳細な導出等は省き，主結果のみ述べる．

リミットサイクル軌道 χ_0 上で次を満たす位相 $\phi : \chi_0 \to [0, T)$ を導入する．

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{x}_0(t)) = 1 \tag{7}$$

各位相 ϕ_* に対応する，リミットサイクルの共変リアプノフ（フロケ）ベクトルを $\{\boldsymbol{z}_i(\phi_*)\}_{i=1}^n$ とする．このうち，特性乗数 1 に対応する（すなわち，軌道 χ_0 に接する）ものを $\boldsymbol{z}_1(\phi_*)$ とし，これを除いたものからなる行列を $\boldsymbol{Z}(\phi_*) = (\boldsymbol{z}_2(\phi_*), \boldsymbol{z}_3(\phi_*), \cdots, \boldsymbol{z}_n(\phi_*)) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ とする．共変リアプノフベクトルと双直交関係 $\langle \tilde{\boldsymbol{z}}_i(\phi_*), \boldsymbol{z}_j(\phi_*)\rangle = \delta_{ij}$（ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユークリッド内積）にあるベクトルを導入し，$\tilde{\boldsymbol{Z}}(\phi_*) = (\tilde{\boldsymbol{z}}_2(\phi_*), \tilde{\boldsymbol{z}}_3(\phi_*), \cdots, \tilde{\boldsymbol{z}}_n(\phi_*)) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ とする．

次の座標変換 $\boldsymbol{x} \mapsto (\phi, \boldsymbol{\rho})$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(\phi) + \boldsymbol{Z}(\phi)\boldsymbol{\rho} \tag{8}$$

のもとで，リミットサイクル軌道からの偏差 $\boldsymbol{\rho}$ の（位相 ϕ_* で条件付けられた）平均 $\boldsymbol{\mu}_{\phi_*}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{\phi_*}$ を評価する．$\{\boldsymbol{z}_i(\phi_*)\}_{i=2}^n$ で張られる平面をポアンカレ断面にとると，その上での確率過程の解析 [7] から，これらの ϵ についての 1 次近似が次の関係を満たすことが示せる．

$$\boldsymbol{\mu}_{\phi_*} \simeq \boldsymbol{0} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\phi_*} \simeq \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\phi_*}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \epsilon^2\boldsymbol{\Pi}_{\phi_*} \tag{10}$$

ここで

$$\boldsymbol{A} = \exp\int_0^T \boldsymbol{\Lambda}(\phi_* + \phi)\mathrm{d}\phi = \exp\int_0^T \boldsymbol{\Lambda}(\phi)\mathrm{d}\phi \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{\phi_*} = \boldsymbol{A}\left(\int_0^T \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\phi_*}(\phi)\tilde{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}}(\phi_*+\phi)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0(\phi_*+\phi))\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0(\phi_*+\phi))\tilde{\boldsymbol{Z}}(\phi_*+\phi)\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\phi_*}^{\mathrm{T}}(\phi)\mathrm{d}\phi\right)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(\phi) = \tilde{\boldsymbol{Z}}(\phi)^{\mathrm{T}} D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0(\phi))\boldsymbol{Z}(\phi) - \tilde{\boldsymbol{Z}}(\phi)^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\boldsymbol{Z}(\phi) \tag{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\phi_*}(\phi) = \exp\int_0^\phi -\boldsymbol{\Lambda}(\phi_* + u)\mathrm{d}u \tag{14}$$

であり，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{A}$ の転置，$D\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列を表す．

共変リアプノフベクトルのダイナミクスに対する共変性から，$\boldsymbol{A}$ は特性（フロケ）乗数を（ブロック）対角成分にもつ行列となる．式 (10) は離散型リアプノフ方程式 [8] であり，$\boldsymbol{\Sigma}_{\phi_*}$ を求めることは，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}$（$\otimes$ はクロネッカー積）を係数行列にもつ線形方程式を解くことに帰着されるが，$\boldsymbol{A}$ のブロック対角性より $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}$ もブロック対角行列となるため，その扱いを非常に簡素化することができる．

式 (9) より前章のアンサンブル平均 χ はリミットサイクル軌道 χ_0 で近似でき，χ_0 上の点からの偏差ベクトルのノルムの分散は共分散行列 $\mathbf{\Sigma}_{\phi_*}$ を用いて

$$V^{\parallel}(\phi_*) = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\phi_*)(\mathbf{I} - \boldsymbol{J}^{+}(\phi_*)\boldsymbol{J}(\phi_*))\boldsymbol{Z}(\phi_*)\mathbf{\Sigma}_{\phi_*})}{n-m} \tag{15}$$

$$V^{\perp}(\phi_*) = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\phi_*)\boldsymbol{J}^{+}(\phi_*)\boldsymbol{J}(\phi_*)\boldsymbol{Z}(\phi_*)\mathbf{\Sigma}_{\phi_*})}{m} \tag{16}$$

と求められ，シナジー指標が評価できる．ここで $\mathrm{tr}(\cdot)$ は行列のトレース，$\mathbf{I}$ は単位行列，$\boldsymbol{J}(\phi_*)$ は $Dg(\boldsymbol{x}_0(\phi)_*)$，$\boldsymbol{J}^{+}$ は $\boldsymbol{J}$ のムーア・ペンローズ一般化逆行列である．

4 結言

身体運動が弱い白色ガウス雑音入力を受ける安定リミットサイクルとしてモデル化されるような場合について，そのシナジー指標をダイナミクスの重要な特性を表す特性乗数や共変リアプノフベクトルと結びつける理論を構築した．

謝辞

本研究の一部は，JSPS 科学研究費補助金 (No. 25540108，26103510，26120513，15J12045) の援助により行われました．ここに謝意を表します．

参考文献

[1] N. A. Bernstein, "The coordination and regulation of movements", *Pergamon Press* (1967).

[2] M. L. Latash, J. P. Scholz and G. Schöner, "Toward a new theory of motor synergies", *Motor Control*, **11** (2007), pp.276–308.

[3] J. P. Scholz and G. Schöner, "The uncontrolled manifold concept: identifying control variables for a functional task", *Experimental Brain Research*, **126** (1999), pp.289–306.

[4] M. Santello and C. E. Lang, "Are movement disorders and sensorimotor injuries pathologic synergies? When normal multi-joint movement synergies become pathologic", *Frontiers in Human Neurosciene*, **8** (2015), pp.1–13.

[5] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, "Chaos: Classical and Quantum", *Niels Bohr Institute* (2012).

[6] F. Ginelli, H. Chaté, R. Livi and A. Politi, "Covariant Lyapunov vectors", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **46** (2013), 254005.

[7] P. Hitczenko and G. S. Medvedev, "The poincaré map of randomly perturbed periodic motion", *Nonlinear Science*, **23** (2013), pp.835–861.

[8] V. L. Syrmos, P. Misra and R. Aripirala, "On the discrete generalized Lyapunov equation", *Automatica*, **31** (1995), pp.297–301.