

チュートリアル招待論文

リアルオプションの確率モデル

北海道大学・大学院経済学研究科 後藤 允

Makoto Goto

Graduate School of Economics and Business Administration,
Hokkaido University

1 はじめに

本稿では、チュートリアル講演の内容の中から特に、資金調達モデルについて議論を展開する。リアルオプションの資金調達モデルは、そのほとんどが時間・状態ともに連続で扱われている。代表的な研究は、Merton (1974), Leland (1994), Longstaff (1995), Leland and Toft (1996), Anderson and Sundaresan (1996), Fan and Sundaresan (2000) などが挙げられ、今日ではこれらを発展させた連続モデルによる理論研究・実証研究が数多く見られる。一方、離散モデルにおいては連続モデルと同じような発展は見られない。そこで本稿では、離散モデルによって議論を展開し、連続モデルとの比較を試みる。

リアルオプションにおける連続モデルと離散モデルのもっとも大きい違いは、満期の有無にあるといえる。連続モデルにおいて満期を設けることは、問題が偏微分方程式に帰着し、必然的に解析解をあきらめて数値計算によって解を求めることを意味する。すなわち、連続モデルの満期はモデルの扱いを飛躍的に難しくする。一方、離散モデルにおいて無期限とすることは、問題が差分方程式に帰着することを意味する。リアルオプションに限らずファイナンスの問題を差分方程式を用いて詳細に分析した研究は見当たらず、離散モデルの満期はモデルの扱いを容易にする。

本稿では、これ以外にも資金調達モデル特有の違いを明らかにする。具体的には、1期間の離散モデルは最適資本構成が求まらないこと、多期間モデルでは株主の最適倒産にも適用できることを示す。

2 資金調達の離散モデル

2.1 負債がない場合

まず、負債がない企業を考える。この企業の1期間あたり利益 X が、パラメータ (p, u, d) の1期間二項モデルに従い、1期間後以降はその水準が永久に続く と仮定する。すなわち、利益 X は

$$\begin{array}{l} X \begin{cases} \nearrow p \\ \searrow 1-p \end{cases} \begin{array}{l} uX \longrightarrow \\ dX \longrightarrow \end{array} \end{array} \quad (1)$$

という推移をもつとする。このとき、割引率を ρ として

$$V_u = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{uX}{(1+\rho)^t} = \frac{1+\rho}{\rho} uX \quad (2)$$

$$V_d = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{dX}{(1+\rho)^t} = \frac{1+\rho}{\rho} dX \quad (3)$$

とすると、この企業の株式価値は、

$$\bar{S}_0 = X + \frac{pV_u + (1-p)V_d}{1+\rho} = \frac{1+\mu+\rho}{\rho} X \quad (4)$$

となる。ただし、

$$\mu = pu + (1-p)d \quad (5)$$

は X の期待成長率である。一方、負債価値は $\bar{D}_0 = 0$ であるため、企業価値は

$$\bar{V}_0 = \bar{S}_0 + \bar{D}_0 = \frac{1+\mu+\rho}{\rho} X \quad (6)$$

となる。

2.2 負債がある場合

次に、簡単のため利子額 c の永久債を発行する企業を考える。 $t=0$ において発行される負債のキャッシュフローを二項モデルで表すと、

$$0 \begin{cases} \nearrow p & c \longrightarrow \\ \searrow 1-p & c \longrightarrow \end{cases} \quad (7)$$

となり、

$$B = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{c}{(1+\rho)^t} = \frac{1+\rho}{\rho} c \quad (8)$$

とすると、負債価値は

$$D_0 = \frac{B}{1+\rho} = \frac{c}{\rho} \quad (9)$$

となる。一方、株式のキャッシュフローは $t \geq 1$ の利払いを考慮して、

$$X \begin{cases} \nearrow p & uX - c \longrightarrow \\ \searrow 1-p & dX - c \longrightarrow \end{cases} \quad (10)$$

となる。株式価値は

$$S_0 = X + \frac{p(V_u - B) + (1-p)(V_d - B)}{1+\rho} = \frac{1+\rho+\mu}{\rho} X - \frac{c}{\rho} \quad (11)$$

となり、負債がある企業の価値は

$$V_0 = D_0 + S_0 = \frac{1+\rho+\mu}{\rho} X = \bar{V}_0 \quad (12)$$

のように負債のない企業の価値と等しくなる。すなわち、MM 定理が成立している。

2.3 倒産がある場合

前項では倒産を考慮していなかったが、条件

$$dX < c \quad (13)$$

を仮定することで、利益が下がったときに債務不履行となり、企業は倒産することになる。負債の担保請求権と株主有限責任原則から、負債と株式のキャッシュフローはそれぞれ

$$0 \begin{cases} \xrightarrow{p} B \\ \xrightarrow{1-p} V_d \end{cases} \quad X \begin{cases} \xrightarrow{p} V_u - B \\ \xrightarrow{1-p} 0 \end{cases} \quad (14)$$

となる。このとき、負債価値と株式価値はそれぞれ

$$D_0 = \frac{pB + (1-p)V_d}{1+\rho} = \frac{(1-p)d}{\rho} X + \frac{pc}{\rho} \quad (15)$$

$$S_0 = X + p \frac{V_u - B}{1+\rho} = \frac{pu + \rho}{\rho} X - \frac{pc}{\rho} \quad (16)$$

となり、企業価値は

$$V_0 = D_0 + S_0 = \frac{1+\rho+\mu}{\rho} X = \bar{V}_0 \quad (17)$$

のように、倒産を考慮しても MM 定理が成立する。

2.4 法人税と倒産コストがある場合

前項までは MM 定理が成立する仮定のもとで議論していたが、ここからは最適資本構成を考えるために、さらに法人税と倒産コストを導入する。法人税については、法定実効税率を λ とし、税額を λX とする。倒産コストについては、倒産したときの企業価値 V のうち α の割合を毀損する、すなわち αV とする。

このとき、株式のキャッシュフローは

$$(1-\lambda)X \begin{cases} \xrightarrow{p} (1-\lambda)(uX - c) \\ \xrightarrow{1-p} 0 \end{cases} \quad (18)$$

となる。1 期間後に利益が上がったときの価値を

$$V_u^* = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)(uX - c)}{(1+\rho)^t} = (1-\lambda) \frac{1+\rho}{\rho} uX - \frac{1+\rho}{\rho} c + \frac{1+\rho}{\rho} \lambda c \quad (19)$$

とする。負債のキャッシュフローは、倒産したときの企業価値が $(1-\lambda)V_d$ であることから、

$$0 \begin{cases} \xrightarrow{p} B \\ \xrightarrow{1-p} (1-\alpha)(1-\lambda)V_d \end{cases} \quad (20)$$

となる。したがって、負債価値と株式価値はそれぞれ

$$\underline{D}_0^* = \frac{pB + (1-p)(1-\alpha)(1-\lambda)V_d}{1+\rho} = \frac{(1-p)(1-\alpha)(1-\lambda)d}{\rho} X + \frac{pc}{\rho} \quad (21)$$

$$\underline{S}_0^* = X + p \frac{V_u^*}{1+\rho} = \frac{pu + \rho}{\rho} (1-\lambda)X - \frac{pc}{\rho} + \frac{p\lambda c}{\rho} \quad (22)$$

となり、企業価値は

$$\underline{V}_0^* = \underline{D}_0^* + \underline{S}_0^* = \frac{1+\rho+\mu}{\rho} (1-\lambda)X + \frac{p}{\rho} \lambda c - \alpha \frac{(1-p)(1-\lambda)d}{\rho} X \quad (23)$$

となる。負債のない企業価値は、法人税を考慮して

$$\bar{V}_0^* = \frac{1+\rho+\mu}{\rho} (1-\lambda)X \quad (24)$$

となるので、法人税と倒産コストを導入すると MM 定理が成立しないことが確認できる。

2.5 節税効果と倒産コストの分析

法人税と倒産コストがある場合の企業価値 (23) から、右辺第 2 項が節税効果、右辺第 3 項が倒産コストを表していることが解釈できる。企業価値を各パラメータで比較静学分析してみると、以下のことが分かる。

(i) p : 業績が良くなる確率が高いほど、価値が高い

$$\lambda c + \alpha(1-\lambda)dX > 0$$

(ii) λ : 税率が高いほど、節税効果が大きい

$$pc + \alpha(1-p)dX > 0$$

(iii) α : 損失率が高いほど、倒産コストが大きい

$$-(1-p)(1-\lambda)dX < 0$$

(iv) c : 負債の発行額が高いほど、節税効果が大きい

$$p\lambda > 0$$

(i)–(iii) は素直な結果で、連続モデルとも整合性があるが、(iv) については既成事実と異なる。負債を possible の限り発行することが最適となるため、最適資本構成を求めることができない。

表 1: 節税効果と倒産コストの比較静学分析 (p, λ, α)

X	u	d	p	ρ	c	α	λ	節税	倒産	合計
								効果	コスト	
20	1.5	0.5	0.3	0.25	11	0.4	0.3	4.0	-7.8	-3.8
			0.5					6.6	-5.6	1.0
			0.7					9.2	-3.3	5.9
20	1.5	0.5	0.5	0.25	11	0.4	0.2	4.4	-6.4	-2.0
							0.3	6.6	-5.6	1.0
							0.4	8.8	-4.8	4.0
20	1.5	0.5	0.5	0.25	11	0.2	0.4	6.6	-2.8	3.8
							0.4	6.6	-5.6	1.0
							0.6	6.6	-8.4	-1.8

表 2: 節税効果と倒産コストの比較静学分析 (c)

X	uX	dX	p	ρ	c	α	λ	節税	倒産	合計
								効果	コスト	
20	30	10	0.5	0.25	11	0.4	0.3	6.6	-5.6	1.0
20	30	10			15			9.0	-5.6	3.4
20	30	10			19			11.4	-5.6	5.8
10	15	5	0.5	0.25	6	0.4	0.3	3.6	-2.8	0.8
10	15	5			7.5			4.5	-2.8	1.7
10	15	5			9			5.4	-2.8	2.6

3 数値例

本節では、前項の結果を具体的に数値例で確認する。表 1 は、

$$\mu < \rho \quad (25)$$

を条件に p, λ, α に関して節税効果と倒産コストを比較静学分析したものである。前項の結果が数値として表れている。次に表 2 は、負債の発行額に関して

$$dX < c < X \quad (26)$$

を条件に比較静学分析したものである。前項のとおり、負債を多く発行するほど企業価値が増加するという結果になっている。ただし、業績に応じて発行額に上限があるため、現在の業績ぎりぎりまで負債を発行することが最適となる。現実的には、負債が多くなれば倒産リスクが増加するため、この結果は正しくない。次節でこの問題点を解決する。

4 多期間モデルへの拡張

4.1 最適資本構成

本節では、モデルを2期間へ拡張する。パラメータを $X = 20$, $u = 1.5$, $d = 0.5$, $p = 0.5$, $\rho = 0.25$, $c = 11$, $\alpha = 0.4$, $\lambda = 0.3$ とすると、企業の税引後利益のキャッシュフローは

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 0.7 \times 20 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 0.5 \quad 0.5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \rightarrow 0.7 \times (30 - 11) \\
 \rightarrow 10 - 11
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \swarrow \quad \searrow \\
 0.7 \times (45 - 11) \rightarrow \\
 0.7 \times (15 - 11) \rightarrow \\
 5 - 11 \rightarrow
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (27)$$

となり、負債と株式のキャッシュフロー

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 0.5 \quad 0.5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \rightarrow 11 \\
 \rightarrow 0.42V_d
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 14 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 0.5 \quad 0.5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \rightarrow 13.3 \\
 \rightarrow 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \swarrow \quad \searrow \\
 23.8 \rightarrow \\
 2.8 \rightarrow
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (28)$$

はとなる。企業価値は、

$$B = \frac{1.25}{0.25} \times 11 = 55 \quad (29)$$

$$0.42V_d = 0.42 \times \frac{1.25}{0.25} \times 10 = 21 \quad (30)$$

$$\underline{D}_0^* = 0 + \frac{0.5 \times 55 + 0.5 \times 21}{1.25} = 30.4 \quad (31)$$

$$\underline{S}_0^* = 14 + \frac{0.5 \times 13.3}{1.25} + \frac{0.5^2 \times \frac{1.25}{0.25} \times 23.8 + 0.5^2 \times \frac{1.25}{0.25} \times 2.8}{1.25^2} = 40.6 \quad (32)$$

$$\underline{V}_0^* = 71 \quad (33)$$

となる。

次に、負債発行額を $c = 16$ に増加した場合を考える。企業の税引後利益のキャッシュフローは

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 0.7 \times 20 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 0.5 \quad 0.5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \rightarrow 0.7 \times (30 - 16) \\
 \rightarrow 10 - 16
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \swarrow \quad \searrow \\
 0.7 \times (45 - 16) \rightarrow \\
 15 - 16 \rightarrow \\
 5 - 16 \rightarrow
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (34)$$

となり、負債と株式のキャッシュフローは

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 0.5 \quad 0.5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \rightarrow 16 \\
 \rightarrow 0.42V_{ud}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 14 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 0.5 \quad 0.5
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \rightarrow 9.8 \\
 \rightarrow 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \swarrow \quad \searrow \\
 20.3 \rightarrow \\
 0 \rightarrow
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (35)$$

となる。負債発行額が $c = 11$ のときの (28) 式と比べて、2 期間後に業績が下がると倒産し、倒産

するノードが1つ増えていることが分かる。企業価値は、

$$B = \frac{1.25}{0.25} \times 16 = 80 \quad (36)$$

$$0.42V_{ud} = 0.42 \times \frac{1.25}{0.25} \times 15 = 31.5 \quad (37)$$

$$\underline{D}_0^* = 0 + \frac{0.5 \times 16 + 0.5 \times 21}{1.25} + \frac{0.5^2 \times 80 + 0.5^2 \times 31.5}{1.25^2} = 32.64 \quad (38)$$

$$\underline{S}_0^* = 14 + \frac{0.5 \times 9.8}{1.25} + \frac{0.5^2 \times \frac{1.25}{0.25} \times 20.3}{1.25^2} = 34.16 \quad (39)$$

$$\underline{V}_0^* = 66.8 \quad (40)$$

となり、負債発行額が増加すると、倒産コストの増加によって企業価値が減少することが分かる。すなわち2期間モデルでは、節税効果と倒産コストが最適になる負債発行額が存在することが示された。

4.2 株主の最適倒産

最後に、株主の最適倒産を考える。すなわち、株主が赤字を補填して利払いしてキャッシュフローが負になっても事業継続し、業績が回復すればより大きい利益を得ることを考える。(28)式において、1期間後に業績が悪化したときに株主が増資すると仮定すると、負債と株式のキャッシュフローは

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 0.5 \rightarrow \\
 0 \swarrow \quad \searrow \\
 0.5 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 11 \rightarrow \\
 11 \rightarrow \\
 11 \rightarrow \\
 0.42V_{dd}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 0.5 \rightarrow \\
 14 \swarrow \quad \searrow \\
 0.5 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13.3 \rightarrow \\
 -1 \rightarrow \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 23.8 \rightarrow \\
 2.8 \rightarrow \\
 0
 \end{array}
 \quad (41)$$

となる。企業価値は、

$$0.42V_{dd} = 0.42 \times \frac{1.25}{0.25} \times 5 = 10.5 \quad (42)$$

$$\underline{D}_0^{**} = 0 + \frac{0.5 \times 55 + 0.5 \times 11}{1.25} + \frac{0.5^2 \times 55 + 0.5^2 \times 10.5}{1.25^2} = 36.88 \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_0^{**} &= 14 + \frac{0.5 \times 13.3}{1.25} + \frac{0.5^2 \times \frac{1.25}{0.25} \times 23.8 + 0.5^2 \times \frac{1.25}{0.25} \times 2.8}{1.25^2} \\
 &\quad + \frac{0.5 \times (-1)}{1.25} + \frac{0.5^2 \times \frac{1.25}{0.25} \times 2.8}{1.25^2} = 42.12 \quad (44)
 \end{aligned}$$

$$\underline{V}_0^{**} = 79 \quad (45)$$

となり、増資によって企業価値は

$$\underline{V}_0^{**} - \underline{V}_0^* = 79 - 71 = 8 \quad (46)$$

だけ増加している。

5 まとめ

本稿では、資金調達の際の離散モデルを分析し、資金調達モデル特有の問題点を指摘した。1 期間モデルにおいては、負債発行額の増加が倒産確率に影響しないため、倒産コストが増加せず最適資本構成が求まらないという問題点を示した。これを解決するために多期間モデルに拡張し、負債発行額の増加が倒産ノードを増加させるため倒産確率が増加した。これによって離散モデルにおいても最適資本構成が求まることを示した。さらに、多期間モデルにおいて株主の増資による倒産の延期を考慮し、株主の最適倒産を表現できることを示した。

参考文献

- Anderson, R.W. and Sundaresan, S.M. (1996). The design and valuation of debt contracts. *Review of Financial Studies*, **9**, 37–68.
- Fan, H. and Sundaresan, S.M. (2000). Debt valuation, renegotiation, and optimal dividend policy. *Review of Financial Studies*, **13**, 1057–1099.
- Leland, H.E. (1994). Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *Journal of Finance*, **49**, 1213–1252.
- Leland, H.E. and Toft, K.B. (1996). Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *Journal of Finance*, **51**, 987–1019.
- Longstaff, F.A. and Schwartz, E.S. (1995). A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *Journal of Finance*, **50**, 789–819.
- Merton, R.C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, **29**, 449–470.

Graduate School of Economics and Business Administration,
Hokkaido University, Sapporo 060-0809, Japan
E-mail address: goto@econ.hokudai.ac.jp

北海道大学・大学院経済学研究科 後藤 允