数理解析研究所講究録
第2029巻 2017年 78-91

ジャンプ付き平方根過程に従う強度の累積値に関する分布関数計算とCDSのCVAへの応用*

金融庁監督局　安達 哲也
Tetsuya Adachi
Supervisory Bureau, Financial Services Agency

東京工業大学情報理工学院　末重 拓己
Takumi Sueshige
School of Computing, Tokyo Institute of Technology

日本銀行金融研究所　吉羽 要直
Toshinao Yoshiba
Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan

1 はじめに

2007～08年の金融危機では、カウンターパーティ（Counterparty、以下Cpty）の信用水準の低下により、デリバティブを保有していた金融機関は、信用評価調整（Credit Valuation Adjustment: CVA）の増大による時価評価損を積み上げ、市場全体で巨額な損失を計上した。こうしたことから、CVA管理の重要性が高まり、特にその評価において誤方向リスクのモデル化と実装がリスク管理実務上の大きな課題となっている。誤方向リスクは、デリバティブ取引のエクスポージャーとCptyの信用水準が負の相互依存関係を持つ場合に生じる。このとき、エクスポージャーの上昇とCptyの信用水準の低下が同時に起こるため、CVA評価値が加速度的に膨らんで巨額の時価損失に繋がる可能性がある。

こうした背景から安達・末重・吉羽[2016]では、誤方向リスクを捉えたCVA評価のモデル化手法を概観した。安達・末重・吉羽[2017]では、そのうち、構造モデルとデフォルト強度モデル、さらに接合関数アプローチを組み合わせた3手法の実装方法を詳述し、モデル化手法の差異を考察した。本報告では、安達・末重・吉羽[2017]で示した手法のうち、デフォルト強度モデルと接合関数アプローチを組み合わせてCDSのCVAを評価する際の技術的問題を論じる。CDSのエクスポージャーは参照体の信用水準の低下に伴って増大するため、デフォルト強度モデルでCptyとCDSの参照体のデフォルトについて誤方向リスクを表現するには、Cptyの信用水準の低下と参照体の信用水準の低下が同時に起こる状況を表現する必要がある。その方法としては、ブラウン運動間の相関や同時ジャンプで表現することが考えられるが、こうした方法ではCptyデフォルト後には参照体のデフォルトとの依存関係を表現できないという問題がある。解決方法としては、Cptyデフォルト後の参照体のCDSを再評価する際に、Cptyデフォルト直前のCptyの累積デフォルト

*本稿は、「平成28年度数理解析研究所研究集会（2016年11月28～30日）」で報告した研究の途中段階の内容を纏めたものであり、最終的な研究成果を示すものではない。また、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、金融庁あるいは日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

強度を所与として、参照体の累積デフォルト確率について接合関数（copula）を用いて依存関係を表現する方法が考えられる（Brigo and Chourdakis [2009]）。安達・末重・吉羽 [2017] ではこの手法を接合関数アプローチと呼んでいる。

Brigo and Chourdakis [2009] では、Cpty と参照体の非負のデフォルト強度をジャンプのない平方根過程で表現して誤方向リスクを考慮した CDS の CVA を評価している。一方、信用スプレッドのリスクプレミアムは、ジャンプを用いて説明する必要性も高く（Jarrow, Lando, and Yu [2005]）、デフォルト強度にジャンプを導入したモデルで分析がなされることも多い（Duffie and Gârleanu [2001]、Brigo and El-Bachir [2010] など）。本報告では、Brigo and El-Bachir [2010] で扱われた（シフトした）ジャンプ付き平方根過程（Shifted Square Root Jump Diffusion: SSRJD）に従うデフォルト強度を想定する。ここで、ジャンプは上向きで与えられ、指数分布に従うものとする。SSRJD は、アフィン・ジャンプ拡散過程（Duffie, Pan, and Singleton [2000]）の一種である。

Brigo and Chourdakis [2009] で示された接合関数アプローチを適用するには、参照体の残存満期までの累積デフォルト強度の確率分布（周辺分布）が必要である。強度をアフィン・ジャンプ拡散過程で考えている場合、特性関数は指数アフィン形式で求められ、フーリエ逆変換と数値積分によって分布関数に変換できる。特性関数は形式的には解析的に求められるものの、特性関数に含まれる複素関数が多価関数である場合には，リーマン面を考慮しないと実質的に誤った解析解となってしまう。この点はあまり言及されていないが、実務上、留意すべき点である。特に、リーマン面を考慮しない計算は、ジャンプを含む場合に問題となることが多いので注意を要する。

本報告では、CDS の CVA を評価する際にデフォルト強度モデルやそれに接合関数アプローチを組み合わせる際に生じる実務的な問題を論じたうえで、ジャンプ付き平方根過程に従う強度の累積値に関する分布関数計算における特性関数の多価性の問題にに焦点を当てて報告を行う。

2 CDS の CVA 評価

本節では、CDS の CVA をデフォルト強度モデルを用いてシミュレーションで評価する。この際、接合関数アプローチを組み合わせると、参照体の残存満期までの累積デフォルト強度の確率分布が必要になることを示したうえで、この確率分布の近似計算に関する工夫を提示する。実際の市場データを参照してデフォルト強度モデルをキャリブレートしたうえで、デフォルト強度モデルの中でのモデル化の違いによって CVA がどの程度変化するかを考察する。

2.1 評価対象とシミュレーションによる評価

A 銀行（プロテクションの買い手）と C 銀行（Cpty となる本邦銀行、プロテクションの売り手）の間の元本 100 百万円の CDS 契約を想定し、R 事業会社（本邦事業会社）を参照体とする。評価時点を t_0、満期を t_m として、t_j $(j=1,\ldots,m)$ の離散グリッドに分けて、片方向の CVA を評価する。本稿では時間グリッドは 1 カ月 $\Delta = t_j - t_{j-1} = 1/12$ とする。C 銀行のデフォルト時刻 τ_C が各時間間隔 $(t_{j-1}, t_j]$ 内に入っているか N =10 万のパスでのシミュレーションで評価し、デフォ

ルト判定したシミュレーション・パスを集計することで、デフォルト時エクスポージャーを計算する愚直な方法（Brute Force法）を採用する。すなわち、リスク中立測度$\mathbb{Q}$のもとでの時点tでの期待値を$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\cdot]$として、(2.1)式のように評価する。

$$
\begin{aligned}
CVA(t_0) &= LGD_C \sum_{j=1}^{m} DF(t_0,t_j)\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}\left[E(t_j)|\tau_C \in (t_{j-1},t_j]\right] PD_{C,0}(t_{j-1},t_j),\\
E(t_j) &= V^{NoCVA}(t_j)^+ = \max\left(V^{NoCVA}(t_j),0\right)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ただし、$V^{NoCVA}(t_j)$はCVAを考慮しない場合の時点t_jでのCDS価値であり、

$$
V^{NoCVA}(t_j) = 100\sum_{l=j+1}^{m}\left\{LGD_R PD_{R,j}(t_{l-1},t_l) - sp_R\Delta(1-PD_{R,j}(t_j,t_{l-1}))\right\} \tag{2.2}
$$

と評価される。$PD_{k,j}(t_{l-1},t_l)$は時点t_jで評価したCptyか参照体（$k=C,R$）の期間$(t_{l-1},t_l]$でのデフォルト確率であり、割引率$DF(t_0,t_j)$は$r_d=0.136\%$の確定的な割引金利で$DF(t_0,t_j)=\exp(-r_d(t_j-t_0))$とする。デフォルト時損失率は$LGD_C=LGD_R=0.65$で確定的とする。$sp_R$は取引対象のCDSのスプレッドである。

2.2 デフォルト強度のモデル化

C銀行、R事業会社のデフォルトについては、いずれも(2.3)式のようなジャンプ付き平方根過程（Square Root Jump Diffusion）に従う確率的なデフォルト強度$\lambda_k(t)$（$k=C,R$）を想定する。

$$
\begin{aligned}
d\lambda_k(t) &= \kappa_k(\theta_k-\lambda_k(t))\,dt + \sigma_k\sqrt{\lambda_k(t)}dW_k(t) + \nu_k dJ(t),\\
J(t) &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}+} z\,dN^{\eta}(z,s),\ \ z\sim \mathrm{Exp}(1),\\
d\langle W_C,W_R\rangle(t) &= \rho_{C,R}^{jump}dt
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

ここで、ジャンプ$J(t)$の強度はどちらの主体に対してもηとし、各主体$k=C,R$のデフォルト強度$\lambda_k(t)$は同時に共変動で$\mathrm{Exp}(\nu_k)$の指数分布に従ってジャンプし上昇すると仮定している。

比較のため、ジャンプを含まない平方根過程（Square Root Diffusion）に従うデフォルト強度のモデル化として、(2.4)式のモデル化も考察する。

$$
\begin{aligned}
d\lambda_k(t) &= \kappa_k(\theta_k-\lambda_k(t))\,dt + \sigma_k\sqrt{\lambda_k(t)}dW_k(t),\\
d\langle W_C,W_R\rangle(t) &= \rho_{C,R}dt
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ジャンプを含む(2.3)式のブラウン運動間の相関$\rho_{C,R}^{jump}$は、$d\lambda_C(t)$と$d\lambda_R(t)$の相関が(2.4)式のジャンプを含まない場合と一致するように調整する。すなわち、(2.5)式を満たすように$\rho_{C,R}^{jump}$を設定する。

$$
\rho_{C,R}^{jump} = \frac{\rho_{C,R}\sqrt{\sigma_C^2\theta_C+2\eta\nu_C^2}\sqrt{\sigma_R^2\theta_R+2\eta\nu_R^2}-2\eta\nu_C\nu_R}{\sigma_C\sigma_R\sqrt{\theta_C\theta_R}} \tag{2.5}
$$

各主体$k=C,R$の期間$(t_{j-1},t_j]$のデフォルト確率$PD_k(t_{j-1},t_j)$は、CDSプレミアムの市場気配値からキャリブレートする際に生じた確定的なシフト項を含めて評価する。すなわち、デフォルト強度はSSRJD（Shifted Square Root Jump Diffusion）に従うことになる。

2.3 接合関数アプローチ

Cpty と参照体（$k=C,R$）の累積デフォルト強度 $\Lambda_k(t)$ を

$$\Lambda_k(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)\, ds \tag{2.6}$$

と定義し、(2.6) 式を用いて Cpty のデフォルト時までの Cpty、参照体の累積デフォルト確率 U_C、$U_{R|C}$ を (2.7) 式で定義する。

$$U_C = 1 - \exp\{-\Lambda_C(\tau_C)\}, \quad U_{R|C} = 1 - \exp\{-\Lambda_R(\tau_C)\} \tag{2.7}$$

Cpty が時点 $\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]$ でデフォルトしたという条件での参照体の生存確率は、(2.8) 式のようにCpty がデフォルトした後の参照体の累積デフォルト強度についての分布関数 $F_{\Lambda_R(t)-\Lambda_R(\tau_C)}(\cdot)$ と参照体の累積デフォルト確率に関する条件付き接合関数 $C_{R|C}(u_R; U_C)$ を用いて求められる。

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{\{\tau_R>\tau_C\}}\mathbb{Q}(\tau_R > t|\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_R>\tau_C\}} \int_{U_{R|C}}^{1} F_{\Lambda_R(t)-\Lambda_R(\tau_C)}(-\ln(1-u_R) - \Lambda_R(\tau_C))\, dC_{R|C}(u_R; U_C)\end{aligned} \tag{2.8}$$

ここで、条件付き接合関数 $C_{R|C}(u_R; U_C)$ は (2.9) 式のように与えられる。

$$C_{R|C}(u_R; U_C) \equiv \frac{\left.\frac{\partial C_{C,R}(u_C,u_R)}{\partial u_C}\right|_{u_C=U_C} - \left.\frac{\partial C_{C,R}\left(u_C,U_{R|C}\right)}{\partial u_C}\right|_{u_C=U_C}}{1 - \left.\frac{\partial C_{C,R}\left(u_C,U_{R|C}\right)}{\partial u_C}\right|_{u_C=U_C}} \tag{2.9}$$

接合関数として $\rho = \rho_{C,R}^{copula}$ をパラメータとする正規接合関数 $C_{C,R}^{G}(u_C, u_R; \rho)$ を用いる場合、(2.9) 式の条件付き接合関数に含まれる接合関数の偏微分は、(2.10) 式で与えられる。

$$\frac{\partial C_{C,R}^{G}(u_C, u_R; \rho)}{\partial u_C} = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_R) - \rho\Phi^{-1}(u_C)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \tag{2.10}$$

ただし、$\Phi(\cdot)$ は 1 変量の標準正規分布の分布関数である。Cpty が時点 $\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]$ でデフォルトしたパスについて、参照体の残存満期までの生存確率を求めれば、デフォルト時エクスポージャー $V^{NoCVA}(t_j)^+$ を算出できる。

2.4 参照体の残存満期までの生存確率

$\mathbb{Q}(\tau_R > t|\tau_C \in (t_{j-1}, t_j])$ を $t = t_{j+1}, \ldots, t_m$ について接合関数を考慮してすべて精緻に評価すると、時間がかかってしまう（Cpty がデフォルトした 1 つのパスについて 1 分程度）。そこで本報告では、Li [2000] が CDO（Collateralized Debt Obligation）の評価で満期でのデフォルトのみを接合関数で考慮したことに倣い、$\mathbb{Q}(\tau_R > t_m|\tau_C \in (t_{j-1}, t_j])$ は接合関数を考慮して精緻に求め、$t_l,\ l = j+1, \ldots, m-1$ については、解析的に評価できる生存関数 $\mathbb{Q}(\tau_R > t_l|\lambda_R(t_j))$ を用いて、(2.11) 式のように評価する。

$$\mathbb{Q}(\tau_R > t_l|\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) = \mathbb{Q}(\tau_R > t_m|\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) \frac{\mathbb{Q}(\tau_R > t_l|\lambda_R(t_j))}{\mathbb{Q}(\tau_R > t_m|\lambda_R(t_j))} \tag{2.11}$$

2.5 キャリブレーション

CDS は、5 年満期を中心として、短期では 6ヵ月、長期では 10 年程度の取引がなされている。2015 年 2 月の市場気配値を参考に表 1 の CDS プレミアムから C 銀行、R 事業会社それぞれのデフォルト強度モデルのパラメータをキャリブレートする。

表 1: CDS プレミアム（bp 表示）

	6M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y
C 銀行	9.1	13.1	24.1	33.5	49.0	63.7	80.9	91.4
R 事業会社	47.6	76.9	101.5	131.4	155.1	181.1	201.0	210.2

各主体のデフォルト強度について、市場気配値が存在する $(t_{b_1}, t_{b_2}, \ldots, t_{b_8}) = (0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10)$（年）のグリッド間はデフォルト強度は変化しないと仮定し、各満期でのインプライド生存確率 $\widehat{\mathbb{Q}}(\tau_k > t_b)$ を求める（Brigo and Mercurio [2006] の 22.3 節における piecewise constant intensity のモデル化）。次に、求めるパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ に対し、$b = b_1, \ldots, b_7$ で $\psi(t_b, \boldsymbol{\beta})$ を (2.12) 式のように計算する。

$$\psi(t_b, \boldsymbol{\beta}) = \ln\left(\widehat{\mathbb{Q}}(\tau_k > t_b)\right) - \ln\left(\mathbb{Q}(\tau_k > t_b)\right) \tag{2.12}$$

$\psi(t_b, \boldsymbol{\beta}) > 0$ の制約で $\sum \psi(t_{b_i}, \boldsymbol{\beta})^2$ を最小化することで、パラメータ $\boldsymbol{\beta}$ とシフト項 $\psi(t, \boldsymbol{\beta})$ を求める。

上記のキャリブレーション方法に基づき、各主体（$k = C, R$）のデフォルト強度のモデルをキャリブレートする。モデルとしては、ジャンプ付き平方根過程モデルで、(1) ジャンプを含まないもの（SSRD）と (2) ジャンプを含むもの（SSRJD）の 2 種類をキャリブレートする。

まず、(2.4) 式で与えられるジャンプを含まないモデル、すなわち、

$$d\lambda_k(t) = \kappa_k(\theta_k - \lambda_k(t))\,dt + \sigma_k\sqrt{\lambda_k(t)}\,dW_k(t) \tag{2.13}$$

のモデルについては、パラメータ $\boldsymbol{\beta}_k = (\kappa_k, \theta_k, \sigma_k, \lambda_k(0))$ とシフト項 $\psi(t, \boldsymbol{\beta})$ を上記の手順で定める。その結果は、表 2 のように与えられる。

表 2: SSRD のキャリブレーション

k	κ_k	θ_k	σ_k	$\lambda_k(0)$
C 銀行	0.128	0.029	0.082	1.0×10^{-6}
R 事業会社	0.462	0.039	0.191	1.0×10^{-6}

(2.3) 式で与えられるジャンプを含むモデル、すなわち、ジャンプの強度を η とし、

$$
\begin{aligned}
d\lambda_k(t) &= \kappa_k(\theta_k - \lambda_k(t))\,dt + \sigma_k\sqrt{\lambda_k(t)}dW_k(t) + dJ_k(t), \\
J(t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} z dN^{\eta}(z,s),\ z \sim \mathrm{Exp}(\nu_k)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

で与えられるモデルについては、パラメータ $\boldsymbol{\beta}_k = (\kappa_k, \theta_k, \sigma_k, \lambda_k(0), \nu_k, \eta)$ のうち、$\nu_k = 0.05, \eta = 0.05$ を前提として、残りのパラメータとシフト項 $\psi(t, \boldsymbol{\beta})$ をジャンプを含まないモデルと同様にキャリブレートする。その結果は、表 2 のように与えられる。

表 3: SSRJD のキャリブレーション

k	κ_k	θ_k	σ_k	$\lambda_k(0)$	ν_k	η
C 銀行	0.094	0.013	0.047	1.0×10^{-6}	0.05	0.05
R 事業会社	0.467	0.034	0.169	1.0×10^{-6}		

2.6 CVA の比較

以下の 5 つの設定で、満期 5 年、7 年、10 年の R 事業会社の CDS に対する CVA を算出した結果は、図 1 のように与えられる。デフォルト強度モデルのみでは CVA は低く評価されるが、Cpty の累積デフォルト確率と参照体の累積デフォルト確率を正規接合関数によって接合すると、誤方向リスクを考慮しない場合に比べて、CVA が約 4.1 倍に上昇することがわかる。同時ジャンプによって誤方向リスクを考慮している場合に比べても CVA は約 2.6 倍に上昇していることがわかる。

1. No WWR : 誤方向リスクを考慮しないモデルで、具体的には (2.4) 式で与えられるジャンプを含まないモデルでかつ $\rho_{C,R} = 0$ として、λ_C と λ_R に依存性を想定しない。

2. ジャンプなし : (2.4) 式で与えられるジャンプを含まないモデルでブラウン運動間の相関を $\rho_{C,R} = 0.3$ として誤方向リスクを考慮する。

3. 同時ジャンプ : (2.3) 式で与えられる同時ジャンプで誤方向リスクを考慮したモデルで、ブラウン運動間の相関については (2.5) 式に $\rho_{C,R} = 0.3$ を代入して得た $\rho_{C,R}^{jump}$ を設定してモデル化する。

4. 正規接合関数 : Cpty がデフォルトした後の残存満期までについて、$\rho_{C,R}^{copula} = 0.3$ のパラメータの正規接合関数で Cpty と参照体の累積デフォルト強度を結び付ける。Cpty がデフォルトする前については、ジャンプなし、同時ジャンプのいずれかでモデル化する。

   (a) ジャンプなし : (2.4) 式で与えられるジャンプを含まないモデルで $\rho_{C,R} = 0.3$ とする。

   (b) 同時ジャンプ : (2.3) 式で与えられる同時ジャンプを含むモデルで (2.5) 式に $\rho_{C,R} = 0.3$ を代入して $\rho_{C,R}^{jump}$ を算出し、設定する。

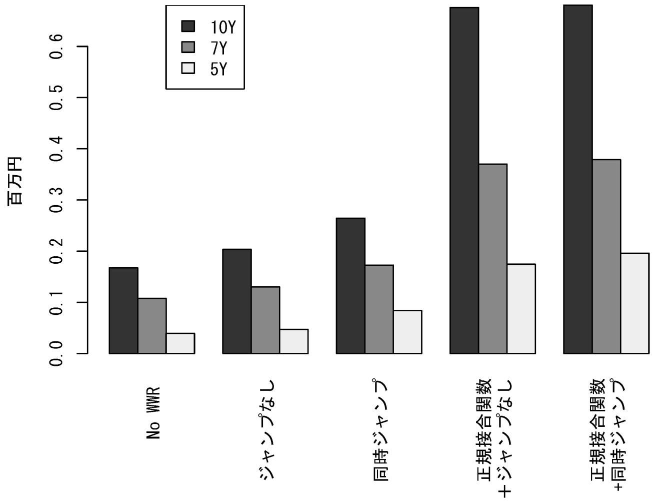

図 1: 各モデルでの CVA

3 ジャンプ付き平方根過程の累積値の分布関数

3.1 生存確率

主体 $k = C, R$ の生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_k > t|\tau_k > s)$ は、累積デフォルト強度を

$$\Lambda_k(s,t) \equiv \int_s^t \lambda_k(y)\,dy \tag{3.1}$$

と定義すると、(3.2) 式のように表現される。

$$\mathbb{Q}(\tau_k > t|\tau_k > s) = \mathbb{E}_s^Q[\exp(-\Lambda_k(s,t))] \tag{3.2}$$

SSRJD はアフィン・ジャンプ拡散過程の 1 つであるため、(3.2) 式の生存確率は (3.3) 式のように指数アフィン形式で解析的に表現される。

$$\mathbb{Q}(\tau_k > t|\tau_k > s) = \exp\left(\bar{\alpha}_J(s,t) + \bar{\alpha}_D(s,t) - \bar{B}(s,t)\lambda_k(s)\right) \tag{3.3}$$

ここで、

$$\bar{h}_k = \sqrt{\kappa_k^2 + 2\sigma_k^2} \tag{3.4}$$

と置くと、シフト項を除いて、係数 $\bar{\alpha}_J(s,t)$、$\bar{\alpha}_D(s,t)$、$\bar{B}(s,t)$ は、以下のように表現される（導

出については、補論Aを参照)。

$$\bar{\alpha}_J(s,t)=\frac{2\eta\nu_k}{\sigma_k^2-2\kappa_k\nu_k-2\nu_k^2}\ln\frac{2\bar{h}_k\exp\left\{\frac{\left(\kappa_k+\bar{h}_k+2\nu_k\right)(t-s)}{2}\right\}}{2\bar{h}_k+\left(\kappa_k+\bar{h}_k+2\nu_k\right)\left(\exp\left\{\bar{h}_k\left(t-s\right)\right\}-1\right)} \tag{3.5}$$

$$\bar{\alpha}_D(s,t)=\frac{2\kappa_k\theta_k}{\sigma_k^2}\ln\frac{2\bar{h}_k\exp\left\{\frac{\left(\kappa_k+\bar{h}_k\right)(t-s)}{2}\right\}}{2\bar{h}_k+\left(\kappa_k+\bar{h}_k\right)\left(\exp\left\{\bar{h}_k\left(t-s\right)\right\}-1\right)} \tag{3.6}$$

$$\bar{B}(s,t)=\frac{2\left(\exp\left\{\bar{h}_k\left(t-s\right)\right\}-1\right)}{2\bar{h}_k+\left(\kappa_k+\bar{h}_k\right)\left(\exp\left\{\bar{h}_k\left(t-s\right)\right\}-1\right)} \tag{3.7}$$

3.2 特性関数とリーマン面

(3.1) 式で定義される累積強度 Λ_k の特性関数

$$\phi_{s,t}(u)\equiv\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\mathrm{i}u\Lambda_k\left(s,t\right)\right)\right],\quad \mathrm{i}\equiv\sqrt{-1} \tag{3.8}$$

も生存確率と同様に (3.9) 式のように指数アフィン形式で解析的に表現される(Duffie, Pan, and Singleton [2000])。

$$\phi_{s,t}(u)=\exp\left(\alpha_J(s,t)+\alpha_D(s,t)+\mathrm{i}uB(s,t)\lambda_k\left(s\right)\right) \tag{3.9}$$

ここで、

$$h_k=\sqrt{\kappa_k^2-2\mathrm{i}u\sigma_k^2} \tag{3.10}$$

と置くと、シフト項を除いて、係数 $\alpha_J(s,t)$、$\alpha_D(s,t)$、$B(s,t)$ は、以下のように表現される。

$$\alpha_J(s,t)=\frac{2\eta\nu_k}{\sigma_k^2-2\kappa_k\nu_k+2\mathrm{i}u\nu_k^2}\log\frac{2h_k\exp\left\{\frac{\left(\kappa_k+h_k-2\mathrm{i}u\nu_k\right)(t-s)}{2}\right\}}{2h_k+\left(\kappa_k+h_k-2\mathrm{i}u\nu_k\right)\left(\exp\left\{h_k\left(t-s\right)\right\}-1\right)} \tag{3.11}$$

$$\alpha_D(s,t)=\frac{2\kappa_k\theta_k}{\sigma_k^2}\log\frac{2h_k\exp\left\{\frac{\left(\kappa_k+h_k\right)(t-s)}{2}\right\}}{2h_k+\left(\kappa_k+h_k\right)\left(\exp\left\{h_k\left(t-s\right)\right\}-1\right)} \tag{3.12}$$

$$B(s,t)=\frac{2\left(\exp\left\{h_k\left(t-s\right)\right\}-1\right)}{2h_k+\left(\kappa_k+h_k\right)\left(\exp\left\{h_k\left(t-s\right)\right\}-1\right)} \tag{3.13}$$

特性関数 $\phi_{s,t}(u)$ は複素関数であり、複素空間では対数関数は無限多価関数となり、平方根は2価関数となる。平方根で決まる h_k は、2価のいずれも計算に同じ寄与となるが(補論Bで確認する)、$\alpha_J\left(s,t\right)$ と $\alpha_D\left(s,t\right)$ に含まれる対数関数は無限多価関数のため、リーマン面の層を特定しないと正確に計算できない。

リーマン面の層を特定しないで対数関数を計算した場合(リーマン面非考慮)と特定して計算した場合(リーマン面考慮)の $\left|\exp\left(\alpha_J\left(s,t\right)\right)\right|$(本来1以下)をそれぞれ u に対してプロットすると、図2のようになる($t-s=10$ 年)。

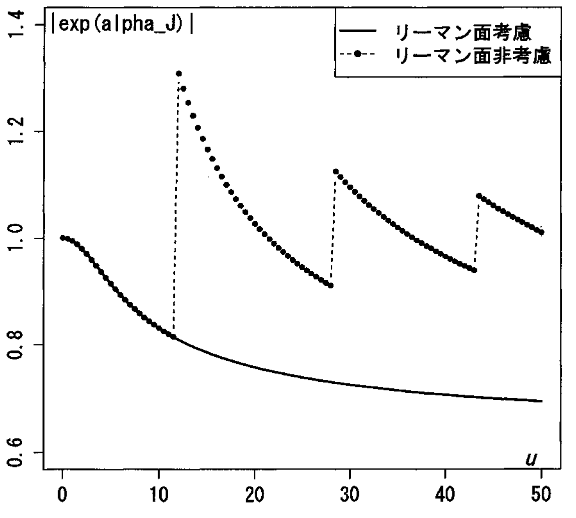

図 2: リーマン面の考慮・非考慮

3.3 リーマン面の定義

特性関数 $\phi_{s,t}(u)$ には、(3.11) 式のとおり u を引数とする複素関数 $z(u)$ に対する対数関数を評価する部分がある。MATLAB や R など多くの統計分析ソフトは、複素数に対しても対数を評価できるようになっているが、これは無限多価の対数のうち、虚部が $[0\mathrm{i}, 2\pi\mathrm{i})$ の主値を求めるものとなっている。この主値を $\mathrm{Log}(z(u))$ と書き表すこととして、$z(u)$ の対数関数についてリーマン面を定義する。それには、$n(z(u))$ を u の増加とともに $z = |z|$ となる点を何回通過したかを示す整数関数とし、主値の偏角を $\mathrm{Arg}(z(u))$ として、(3.14) 式で対数関数 log のリーマン面を定義すればよい。

$$
\begin{aligned}
\log(z(u)) &\equiv \mathrm{Log}(z(u)) + 2\pi \mathrm{i} n(z(u)) \\
&= \mathrm{Log}(|z(u)|) + \mathrm{i}\left\{\mathrm{Arg}(z(u)) + 2\pi n(z(u))\right\}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

実装上は $n(u)$ の計算が問題となるが、Matlab や R の signal パッケージでは、u を昇順に与えた際の $z(u)$ を並べたベクトル $\boldsymbol{z}$ を与えたうえで、unwrap 関数および Arg 関数を適用することにより、(3.15) 式のように回転数および主値の偏角を含めた値を求めることができる。

$$
\mathrm{unwrap}(\mathrm{Arg}(\boldsymbol{z})) = \mathrm{Arg}(\boldsymbol{z}) + 2\pi n(\boldsymbol{z}) \tag{3.15}
$$

このようにしてリーマン面を考慮した特性関数の絶対値、実部、虚部は、図 3 のようになる。パラメータは、図 3 の R 事業会社のデフォルト強度のパラメータで設定し、$t - s = 10$ 年で評価した。

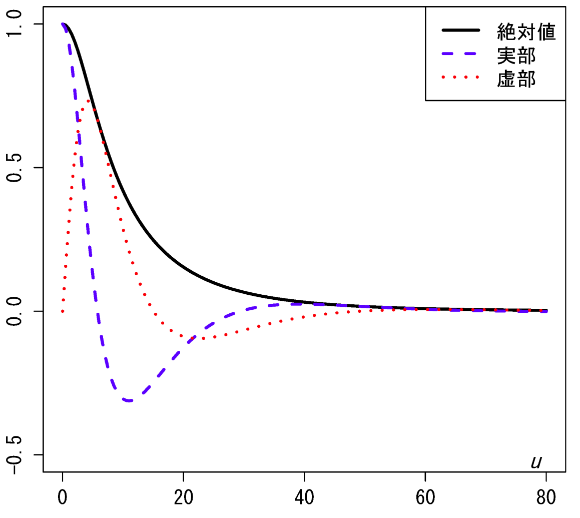

図 3: リーマン面を考慮した特性関数

3.4 フーリエ逆変換による分布関数の導出

特性関数 $\phi_{s,t}(u)$ は、フーリエ逆変換で密度関数 $f_{s,t}(x)$ に帰着する。本報告では、フーリエ逆変換には効率性の観点から、Bailey and Swarztrauber [1991] の非整数次フーリエ変換（fractional fast Fourier transform : FRFT）を用いた。昇順のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し、特性関数ベクトル $\phi_{s,t}(\boldsymbol{u})$ をリーマン面を考慮して求め、FRFT を適用すると、Δx のグリッドのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対する密度関数ベクトル $f_{s,t}(\boldsymbol{x})$ が得られる。

$x = x_l$ での分布関数の値は、(3.16) 式のように密度関数ベクトルを累積することで得られる。

$$F_{s,t}(x_l) = \sum_{x=x_1}^{x_l} f_{s,t}(x)\,\Delta x \tag{3.16}$$

$s = \tau_C$ として、シフト項について調整すれば、SSRJD 累積値の分布関数 $F_{\Lambda_R(t)-\Lambda_R(\tau_C)}(x)$ が得られることになる。

3.5 応用

SSRJD に従う累積デフォルト強度の分布関数は、Brigo and El-Bachir [2010] のように CDS オプションの評価に用いることができる。そのほか、アフィン・ジャンプ拡散過程の確率ボラティリティモデルでのデリバティブ評価（Carr *et al.* [2003]）においても、対数資産価格の分布関数を特性関数から導出することが多いため、同様の議論を展開することができる。

4 おわりに

デフォルト強度の接合関数アプローチは、Cpty デフォルト後の累積デフォルト確率とエクスポージャー（参照体の累積デフォルト確率）の相互依存関係を表現するものであり、これにより Cpty デフォルト直前の累積デフォルト確率の高まりと残存満期での参照体のデフォルト確率の高まりという誤方向リスクを強く表現することができる。ただし、CDS の参照体の累積デフォルト強度について、特性関数から分布関数を求める際には、特性関数が多価関数を含みうることに注意が必要である。SSRJD の累積値の特性関数については、ジャンプに関する項に特性関数の計算に影響を及ぼす対数関数が含まれている。本報告では $z(u)$ の対数関数について、$z = |z|$ の回転数を調整する具体的な方法を提示した。本手法は、他のアフィン・ジャンプ拡散過程を用いたデリバティブ評価にも応用可能であり、今後の展開が期待される。

参考文献

安達哲也・末重拓己・吉羽要直、「CVA における誤方向リスク・モデルの潮流」、『金融研究』、第 35 巻第 3 号、2016 年、35～88 頁

安達哲也・末重拓己・吉羽要直、「CVA における誤方向リスク・モデル：実装と比較」、『金融研究』、第 36 巻第 1 号、2017 年、115～161 頁

山下智志・吉羽要直、「デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した担保付貸出の損失評価：CIR 型ハザード率過程での解析的評価」、IMES Discussion Paper Series No.2010-J-10、2010 年

Brigo, Damiano, and Kyriakos Chourdakis, "Counterparty Risk for Credit Default Swaps: Impact of Spread Volatility and Default Correlation," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **12**(7), 2009, pp.1007–1026.

Brigo, Damiano, and Naoufel El-Bachir, "An Exact Formula for Default Swaptions' Pricing in the SSRJD Stochastic Intensity Model," *Mathematical Finance*, **20**(3), 2010, pp.365–382.

Brigo, Damiano, and Fabio Mercurio, *Interest Rate Models — Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*, Springer, 2nd edition, 2006.

Carr, Peter, Hélyette Geman, Dilip B. Madan, and Marc Yor, "Stochastic Volatility for Lévy Processes," *Mathematical Finance*, **13**(3), 2003, pp.345–382.

Duffie, Darrell, and Nicolae Gârleanu, "Risk and valuation of collateralized debt obligations," *Financial Analysts Journal*, **57**(1), 2001, pp.41–59.

Duffie, Darrell, Jun Pan, and Kenneth J. Singleton, "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions," *Econometrica*, **68**(6), 2000, pp.1343–1376.

Jarrow, Robert A., David Lando, and Fan Yu, "Default Risk and Diversification: Theory and Empirical Implications," *Mathematical Finance*, **15**(1), 2005, pp.1–26.

Li, David X., "On Default Correlation: A Copula Function Approach," *Journal of Fixed Income*, **9**(4), 2000, pp.43–54.

A　SRJDデフォルト強度の生存確率と累積SRJD過程の特性関数の導出

(2.3) 式のジャンプ付き平方根過程に従うデフォルト強度に対し、(3.2) 式のように累積強度 $\Lambda_k(s,t)$ を定義する。(2.3) 式は、Duffie, Pan, and Singleton [2000] の (2.1) 式で示されているアフィン・ジャンプ拡散（Affine Jump Diffusion : AJD）過程の 1 次元の場合に相当する。Duffie, Pan, and Singleton [2000] のの 2.2 節の結果から、対象企業 k のデフォルト時刻を τ_k としたときの当該企業の生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_k > t|\tau > s) \equiv \mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[\exp(-\Lambda(s,t))]$ も $\Lambda_k(s,t)$ の特性関数 $\phi(u) \equiv \mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[\exp(\mathrm{i}u\Lambda_k(s,t))]$, $u \in \mathbb{R}$ も、指数アフィン形式 $\exp(\alpha_J(s,t) + \alpha_D(s,t) + \beta(s,t)\lambda(s))$ で評価でき、係数 $\alpha_J(s,t)$、$\alpha_D(s,t)$、$\beta(s,t)$ は、(A.1)～(A.3) 式の常微分方程式に従う。

$$\frac{d\alpha_J(s,t)}{ds} = -\frac{\eta_k\nu_k\beta(s,t)}{1-\nu_k\beta(s,t)} \tag{A.1}$$

$$\frac{d\alpha_D(s,t)}{ds} = -\kappa_k\theta_k\beta(s,t) \tag{A.2}$$

$$\frac{d\beta(s,t)}{ds} = \xi + \kappa_k\beta(s,t) - \frac{\sigma_k^2}{2}\beta^2(s,t) \tag{A.3}$$

ただし、ξ は、生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_k > t|\tau > s)$ の場合は $\xi = 1$、累積強度 $\Lambda_k(s,t)$ の特性関数の場合は $\xi = -\mathrm{i}u$ で与えられる。ただし、$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ である。

(A.3) 式はリッカチ型常微分方程式であり、その解は山下・吉羽 [2010] の補論 3 などに従って解くと、

$$h_k = \sqrt{\kappa^2 + 2\xi\sigma_k^2} \tag{A.4}$$

として、$\beta(s,t)$ は

$$\beta(s,t) = \xi B(s,t) \tag{A.5}$$

ただし、

$$B(s,t) = \frac{2(\exp\{h(t-s)\}-1)}{2h + (\kappa+h)(\exp\{h(t-s)\}-1)} \tag{A.6}$$

と表せる。

$\xi = 1$ で表現される生存確率については、(A.4) 式の h_k は (3.4) 式の $\bar{h}_k$ のように表せ、(A.6) 式の $B(s,t)$ は (3.7) 式の $\bar{B}(s,t)$ のように表せる。これを (A.5)、(A.2) 式に代入して、s について s から t まで積分すると、(3.6) 式を得る。同様に、(3.7) 式の $\bar{B}(s,t)$ を (A.5) 式の $B(s,t)$ に代入し、さらに (A.1) 式に代入して s について s から t まで積分すると、(3.5) 式を得る。(3.5)～(3.7) 式を (3.3) 式に代入すれば、生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_k > t|\tau_k > s)$ を得る。これは、Brigo and El-Bachir [2010] で得られている結果と一致する。

$\xi = -\mathrm{i}u$ で与えられる累積強度 $\Lambda_k(s,t)$ の特性関数の場合も同様の手順で、形式的には (3.10) 式の h_k の定義を用いて、(3.13) 式の $B(s,t)$、(3.12) 式の $\alpha_D(s,t)$、(3.11) 式の $\alpha_J(s,t)$ を得る。

B　複素数の平方根とその効果

(3.10) 式で定義される平方根 h_k は複素数を含んでおり、2 価関数となる。具体的には、(B.1) 式のように表せる。

$$h_k = \pm h_k^+,\ h_k^+ = \sqrt{\frac{\kappa_k^2 + \sqrt{\kappa_k^4 + 4u^2\sigma_k^4}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{-\kappa_k^2 + \sqrt{\kappa_k^4 + 4u^2\sigma_k^4}}{2}} \tag{B.1}$$

(3.13) 式の $B(s,t)$、および、(3.11)、(3.12) 式の対数関数の引数については、$h_k = \pm h_k^+$ のいずれの値であっても同じ値になることを示す。

$$\begin{aligned} B(s,t)|_{-h_k^+} &= \frac{2\left(\exp\left\{-h_k^+(t-s)\right\}-1\right)}{-2h_k^+ + \left(\kappa_k - h_k^+\right)\left(\exp\left\{-h_k^+(t-s)\right\}-1\right)} \\ &= \frac{2\left(\exp\left\{-h_k^+(t-s)\right\}-1\right)}{-2h_k^+ + \left(\kappa_k - h_k^+\right)\left(\exp\left\{-h_k^+(t-s)\right\}-1\right)} \frac{\exp\left\{h_k^+(t-s)\right\}}{\exp\left\{h_k^+(t-s)\right\}} \\ &= \frac{-2\left(\exp\left\{h_k^+(t-s)\right\}-1\right)}{-h_k^+\left(\exp\left\{h_k^+(t-s)\right\}+1\right) - \kappa_k\left(\exp\left\{h_k^+(t-s)\right\}-1\right)} \\ &= B(s,t)|_{h_k^+} \end{aligned} \tag{B.2}$$

(B.2) 式と同様の式展開で、(3.11)、(3.12) 式の対数関数の引数についても、$h_k = \pm h_k^+$ のいずれの値であっても同じ値になることがわかる。ただし、対数関数そのものについては本文で既述したようにリーマン面をきちんと定義する必要がある。

Supervisory Coordination Division, Supervisory Bureau
Financial Services Agency, Tokyo 100-8967, Japan
E-mail address: tetsuya.adachi@fsa.go.jp

金融庁監督局　安達 哲也

School of Computing
Tokyo Institute of Technology, Yokohama-shi 226-8502, Kanagawa, Japan
E-mail address: sueshige.t.aa@m.titech.ac.jp

東京工業大学情報理工学院　末重 拓己

Institute for Monetary and Economic Studies
Bank of Japan, Tokyo 103-8660, Japan
E-mail address: toshinao.yoshiba@boj.or.jp

日本銀行金融研究所　吉羽 要直