

Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs

山形大学・理学部数理科学科 石渡 聡*

Satoshi Ishiwata

Department of Mathematical Sciences

Yamagata University

岡山大学・理学部数学科 河備 浩司†

Hiroshi Kawabi

Department of Mathematics, Faculty of Science

Okayama University

岡山大学・大学院自然科学研究科 難波 隆弥‡

Ryuya Namba

Graduate School of Natural Sciences

Okayama University

1 序 ～研究の背景～

グラフ上のランダムウォークを扱う際、その長時間挙動は相手にするべき中心的話題であり事実、確率論や幾何学等の方面から多種多様なアプローチが図られている。中でも、中心極限定理はいわゆる de Moivre–Laplace の定理を萌芽として研究が盛んとなり、爾来確率論業界では必要不可欠な収束定理としてその地位を確立している。いま、無限グラフの一つのクラスとして結晶格子を取り上げよう。局所有限連結グラフ X が (Γ) 結晶格子であるとは、 X がある有限グラフ X_0 の被覆グラフであって、被覆変換群 Γ が X に自由作用する、ねじれがない有限生成アーベル群であるときをいう。結晶格子は群作用によるある種の周期性を有しているため、Spitzer [15] が述べるように、収束定理を論じるに申し分ない舞台である。小谷–砂田–白井 [13] は離散幾何解析の手法を適用することで、結晶格子上の対称ランダムウォークの長時間挙動を調べ、これを契機としていくつかの結果が得られ

*e-mail: ishiwata@sci.kj.yamagata-u.ac.jp

†e-mail: kawabi@math.okayama-u.ac.jp

‡e-mail: rnamba@s.okayama-u.ac.jp

た ([9, 10, 11, 12, 6]). 特に, [6] では結晶格子上的非対称ランダムウォークを考察し, その中心極限定理を得ている. これが我々の研究の一つの動機となっている.

さて結晶格子の自然な拡張モデルとして, その被覆変換群 Γ をベキ零群に取り替えたものである (Γ -)ベキ零被覆グラフ, つまりある有限グラフ X_0 の被覆グラフであって, Γ が X に左から自由作用するねじれない有限生成ベキ零群であるようなものを考察する. このグラフはベキ零群の作用による周期性をもつものの, 演算の非可換性に由来した様々な困難が生じることが想定される. 以下, 知られている結果について述べる. Alexopoulos [1, 2] は有限生成ベキ零群 Γ (の Cayley グラフ) 上の対称ランダムウォークの長時間挙動を調べ, スケール極限を通して Γ を余コンパクト格子として含むベキ零 Lie 群 $G = G_\Gamma$ 上のある劣楕円作用素を生成作用素とする半群に収束することを示した. 石渡 [4, 5] は上記の結果を Γ -ベキ零グラフ X 上の対称ランダムウォークの場合に拡張した. その中で, ベキ零被覆グラフ X を上記のベキ零 Lie 群 G に周期的に実現することを考え, その実現の調和性を定式化し, その条件下で, X 上の推移作用素が定める離散半群のスケール極限が, ある G 上の劣楕円作用素を生成作用素とする半群に近づくことを示した. また, 田中 [17] はベキ零被覆グラフ上の (対称とは限らない) ランダムウォークに関して, 大偏差原理が成立することを示した. しかしながら, 現在のところベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークの中心極限定理に関しては先行研究が知られておらず, さらにプロセスレベルの収束 (汎関数中心極限定理) についてはランダムウォークが対称である場合さえ未解決となっている. 本稿では, ベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークに関する中心極限定理がある仮定の下で得られたことを報告する. つまり, 今回得られた結果は石渡 [4] による対称ランダムウォークに関する (半群レベルでの) 中心極限定理及び, [6] による結晶格子上的非対称ランダムウォークに関する (汎関数) 中心極限定理の双方からの拡張であると理解されるものである.

2 基本用語と離散幾何解析

この節の初めに, 本稿を通して用いられる記号を整理しよう. $X = (V, E)$ を局所有限連結グラフで向き付けられているものとする. V は頂点集合, E は辺の集合である. $e \in E$ に対して, $o(e), t(e), \bar{e}$ でそれぞれ辺 e の始点, 終点, 逆向きの辺を表すことにする. $E_x (x \in V)$ で, 頂点 x を始点とする辺の集合を表す. また, $x \in V, n \in \mathbb{N}$ に対して x 出発で長さ n の道 $c = (e_1, \dots, e_n)$ の全体を

$$\Omega_{x,n}(X) := \{c = (e_1, \dots, e_n) \mid o(e_1) = x, t(e_i) = o(e_{i+1}) (i = 1, \dots, n-1)\}$$

と定める. 特に, $\Omega_x(X) = \Omega_{x,\infty}(X)$ とかく.

さて, X 上のランダムウォークは推移確率を与えることで定められる. つまり, 正値関数 $p : E \rightarrow (0, 1]$ で, $\sum_{e \in E_x} p(e) = 1 (x \in V)$ を満足するものを与える. すると Kolmogorov の拡張定理より p は $\Omega_x(X)$ 上の確率測度 \mathbb{P}_x を誘導し, X 上のランダムウォークは X 値の時間齊次な Markov 連鎖 $(\Omega_x(X), \mathbb{P}_x, \{w_n\}_{n=0}^\infty)$ で与えられる. ここに, $w_n(c) = o(e_{n+1}) (n = 0, 1, 2, \dots, c \in \Omega_x(X))$ である. 次に, X 上の推移作用素 L を

$$Lf(x) := \sum_{e \in E_x} p(e)f(t(e)) \quad (x \in V)$$

で定義するとランダムウォークの n ステップ推移確率は $p(n, x, y) = L^n \delta_y(x)$ ($n \in \mathbb{N}, x, y \in V$) とかける。もし、正值関数 $m : V \rightarrow (0, \infty)$ で $p(e)m(o(e)) = p(\bar{e})m(t(e))$ ($e \in E$) を満たすものが存在するならば、 X 上のランダムウォークは m -対称であるという。

次に、我々の解析における強力なツールである離散幾何解析について述べたい。離散幾何解析とは砂田 [16] により命名された、グラフ理論や確率論、幾何学等の広範な分野を横断的に、かつ包括的に扱う学問領域である。以下、主定理を述べるのに必要な範囲でこれについて解説する。まずは $X_0 = (V_0, E_0)$ を有限グラフとし、この上の既約ランダムウォークを考えよう。すると Perron–Frobenius の定理から次の条件を満たす不変測度 $m : V_0 \rightarrow (0, 1]$ が一意的に存在する：

$$\sum_{x \in V_0} m(x) = 1, \quad m(x) = \sum_{e \in (E_0)_x} p(\bar{e})m(t(e)) \quad (x \in V_0).$$

次に、 $C_0(X_0, \mathbb{R})$ 及び $C_1(X_0, \mathbb{R})$ を X_0 の 0-チェイン群、1-チェイン群とする。これら間に定まる境界準同型 $\partial : C_1(X_0, \mathbb{R}) \rightarrow C_0(X_0, \mathbb{R})$; $\partial(e) := t(e) - o(e)$ ($e \in E_0$) を用いて、 X_0 の 1 次ホモロジー群を $H_1(X_0, \mathbb{R}) := \text{Ker}(\partial)$ で定める。この双対空間、すなわち 1 次コホモロジー群を $H^1(X_0, \mathbb{R})$ で表す。さて、我々は次の量

$$\gamma_p := \sum_{e \in E_0} p(e)m(o(e))e \in C_1(X_0, \mathbb{R})$$

を導入する。簡単なチェックにより、実は $\gamma_p \in H_1(X_0, \mathbb{R})$ であることが従う。この量を **homological direction** とよぶ。 $\gamma_p = 0$ であることと、 X_0 上のランダムウォークが m -対称であることは同値であることに注意せよ。

さて、 Γ をねじれない有限生成ベキ零群とし、 $X = (V, E)$ を有限グラフ $X_0 = \Gamma \backslash X$ の Γ -ベキ零被覆グラフであるとする。Mal'cev の定理により、ある連結、単連結なベキ零 Lie 群 $G = G_\Gamma$ で、 Γ をその余コンパクト格子とするようなものが存在する。また、 \mathfrak{g} を G の Lie 環とする。本稿を通して、 G は

ステップ 2 の自由ベキ零 Lie 群である

ことを仮定する。すなわち、 \mathfrak{g} は $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}$ ($\mathfrak{g}^{(1)} \cong G/[G, G]$, $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$) の形の直和分解を持つ。また、 X_0 上の推移確率 p および不変測度 m を Γ の作用で不変となるよう X 上にリフトしたのものをも同じ記号で表す。いま、被覆写像 $\pi : X \rightarrow X_0$ を介して我々は全射準同型 $\rho_{\mathbb{R}} : H_1(X_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}^{(1)}$ をとることができる。この転置写像 ${}^t\rho_{\mathbb{R}} : \text{Hom}(\mathfrak{g}^{(1)}, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X_0, \mathbb{R})$ により、 $\text{Hom}(\mathfrak{g}^{(1)}, \mathbb{R})$ は $H^1(X_0, \mathbb{R})$ の部分空間とみなせる。一方で離散版 Hodge–Kodaira の定理 (cf. [12]) により、 $H^1(X_0, \mathbb{R})$ は X_0 上の修正調和 1-形式の空間 $\mathcal{H}^1(X_0)$ と同型であることが知られる。ここに、 X_0 上の 1-形式 ω が修正調和であるとは、

$$\sum_{e \in (E_0)_x} p(e)\omega(e) = \langle \gamma_p, \omega \rangle \quad (x \in V_0)$$

を満たすときをいう。 $\mathcal{H}^1(X_0)$ には推移確率 p により定まる内積

$$\langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle_p := \sum_{e \in E_0} p(e)m(o(e))\omega(e)\eta(e) - \langle \gamma_p, \omega \rangle \langle \gamma_p, \eta \rangle$$

が備わっており, 上記の同型を通じて $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_p$ は $H^1(X_0, \mathbb{R})$, さらにはその部分空間 $\text{Hom}(\mathfrak{g}^{(1)}, \mathbb{R})$ に備わっている. その双対計量として $\mathfrak{g}^{(1)}$ 上に定まる計量 g_0 を **Albanese 計量** とよぶ.

最後にベキ零被覆グラフの実現について述べよう. 写像 $\Phi : X \rightarrow G$ を Γ -ベキ零被覆グラフの実現とする. つまり, $\Phi(\gamma x) = \gamma\Phi(x)$ ($\gamma \in \Gamma, x \in V$) を満たすものとする. 我々はこのような実現に対して, 修正調和性という概念を定式化した. 実現 $\Phi_0 : X \rightarrow G$ が修正調和であるとは, 任意の $x \in V$ に対して,

$$\sum_{e \in E_x} p(e) \log \left(\Phi_0(o(e))^{-1} \cdot \Phi_0(t(e)) \right) \Big|_{\mathfrak{g}^{(1)}} = \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p)$$

が成り立つときをいう. これは小谷-砂田が [12] で提唱した結晶格子の Euclid 空間への実現写像の修正調和性の拡張になっている. 上記の右辺の量 $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \in \mathfrak{g}^{(1)}$ を **asymptotic direction** とよぶ. エルゴード定理を応用することで, 次の大数の法則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Phi_0(w_n) \Big|_{\mathfrak{g}^{(1)}} = \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \quad \mathbb{P}_x\text{-a.s.}$$

が成り立つことから, これはベキ零 Lie 群に実現したランダムウォーク (の $\mathfrak{g}^{(1)}$ に対応する成分) の平均とみなせる量である. なお, $\gamma_p = 0$ ならば $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$ が従うが, この逆は不成立である, すなわち $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$ がランダムウォークの対称性を導かないことを強調しておく. この事情は後ほどの主定理において, 極めて肝要となる.

3 主結果と証明の概略

この節では, 本研究において得られた主結果である中心極限定理を順に紹介し, 証明の概略を解説する. まずは主結果の紹介へ向けて必要となる記号を述べることから始める. 以下, ベキ零被覆グラフ X の修正調和実現 $\Phi_0 : X \rightarrow G$ で, 基点 $x_* \in V$ に対し $\Phi_0(x_*) = 1_G$ なるものとする. 1_G は G の単位元である. いま, \mathfrak{g} 上のランダムウォークを $\Xi_n := \log(\Phi_0(w_n))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で定め, G -値連続確率過程列 $\{\mathcal{Y}_t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\mathcal{Y}_t^{(n)} := \tau_{n^{-1/2}}(\exp(\mathfrak{X}_t^{(n)})) \quad (t \in [0, 1])$$

で定義する. ここに τ_ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) は G 上の dilation operator で,

$$\mathfrak{X}_t^{(n)}(c) := \Xi_{[nt]}(c) + (nt - [nt])(\Xi_{[nt]+1}(c) - \Xi_{[nt]}(c)) \quad (c \in \Omega_{x_*}(X))$$

である. ここで $\{V_1, \dots, V_d\}$ を $(\mathfrak{g}^{(1)}, g_0)$ の正規直交基底とする. このとき, G が自由ベキ零 Lie 群であるという仮定から $\{[V_i, V_j] : 1 \leq i < j \leq d\}$ が $\mathfrak{g}^{(2)}$ の基底を与えることに注意する. また, \tilde{e} を $e \in E_0$ の X 上へのリフトとして

$$\beta(\Phi_0) := \sum_{e \in E_0} p(e) m(o(e)) \log \left(\Phi_0(o(\tilde{e}))^{-1} \cdot \Phi_0(t(\tilde{e})) \right) \Big|_{\mathfrak{g}^{(2)}} = \sum_{1 \leq i < j \leq d} \beta(\Phi_0)^{ij} [V_i, V_j]$$

なる量を導入する. なお, $\gamma_p = 0$ ならば, $\beta(\Phi_0) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$ となることが直ちに確かめられる. また, 以下では Lie 環 \mathfrak{g} の勝手な元 X は対応

$$Xf(g) := \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f(g \cdot \exp(\varepsilon X)) \quad (g \in G)$$

によって、 G 上の左不変ベクトル場に拡張しておく。ここで次の確率微分方程式

$$dY_t = \sum_{1 \leq i \leq d} V_i(Y_t) \circ dB_t^i + \beta(\Phi_0)(Y_t) dt$$

を考える。ただし、 $(B_t)_{t \geq 0} = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \geq 0}$ は \mathbb{R}^d -値標準 Brown 運動である。この確率微分方程式に対応する生成作用素 \mathcal{A} は

$$\mathcal{A} := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq d} V_i^2 + \beta(\Phi_0)$$

である。次に、 $(Y_t)_{t \geq 0}$ を \mathcal{A} を生成作用素とする単位元 $\mathbf{1}_G$ 出発の G -値拡散過程とする。このとき、第一の主張として次の定理を得た。なお、この定理に関してはベキ零 Lie 群のステップ数が任意の場合で成立することを注意しておく。

定理 1. ((7)) $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_g$ とする。このとき $t \geq 0$ および $f \in C_{\infty}(G)$ に対して、次の中心極限定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L^{[nt]} P_{n^{-1/2}} f - P_{n^{-1/2}} e^{t\mathcal{A}} f \right\|_{\infty}^X = 0$$

が成り立つ。ここに $P_{\varepsilon} : C_{\infty}(G) \rightarrow C_{\infty}(X)$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) はスケール作用素

$$P_{\varepsilon} f(x) := f(\tau_{\varepsilon} \Phi_0(x)) \quad (x \in V) \quad \text{である.}$$

この主張の証明については紙数の都合上詳しく述べないが、証明のキーになるのは Trotter による半群収束定理 (cf.[18]) であることを注意しておく。さて、この定理が示されたおかげで、 $0 \leq t_1 < \dots < t_\ell < \infty$ とするとき、次の有限次元分布の収束

$$(\mathcal{Y}_{t_1}^{(n)}, \dots, \mathcal{Y}_{t_\ell}^{(n)}) \xrightarrow{(d)} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_\ell}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が従うことが容易に証明できる。いま、 $\mathbf{P}^{(n)}$ を $\mathcal{Y}^{(n)}$ が誘導する $\mathbf{W} := C_{1_G}([0, 1]; G)$ 上の確率測度であるとするとき、 $\{\mathbf{P}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ の緊密性を証明することができれば目標とする汎関数中心極限定理を得ることができる。その緊密性をいうには、次の 4 次モーメントの評価を導出すれば良い:

$$\mathbb{E}^{\mathbf{P}^{(n)}} \left[d_{\text{CC}}(\mathcal{Y}_s^{(n)}, \mathcal{Y}_t^{(n)})^4 \right] \leq C(t-s)^2 \quad (0 \leq s \leq t).$$

ただし、 d_{CC} はベキ零 Lie 群 G 上の Carnot-Carathéodory 距離:

$$d_{\text{CC}}(g, h) := \inf \left\{ \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|_{g_0} dt \mid c: \text{絶対連続}, c(0) = g, c(1) = h, \dot{c}(t) \in \mathfrak{g}_{c(t)}^{(1)} \right\} \quad (g, h \in G)$$

であり、 C は n に無関係な正定数である。ところが Carnot-Carathéodory 距離自体は定義が複雑なため、実際の計算には向いていない。そこで上記の評価を出すために d_{CC} が定める G 上のノルム $\|\cdot\|_{\text{CC}}$ と同値な斉次ノルムで、実際計算により向いているもの $\|\cdot\|_{\text{H}}$ を次の手続きで導入する。いま、 $\mathfrak{g}^{(1)}$ には Albanese 計量 g_0 によるノルム $\|\cdot\|_{g_0}$ が導入されて

いるが, $\mathfrak{g}^{(2)}$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}_0}$ を $X = \sum_{1 \leq i < j \leq d} a_{ij}[V_i, V_j]$ に対し, $\|X\|_{\mathfrak{g}_0} := \sum_{1 \leq i < j \leq d} |a_{ij}|$ で定義する. そして, $g \in G$ に対して,

$$\|g\|_{\mathbb{H}} := \|\log(g)|_{\mathfrak{g}^{(1)}}\|_{\mathfrak{g}_0} + \|\log(g)|_{\mathfrak{g}^{(2)}}\|_{\mathfrak{g}_0}^{1/2} \quad (g \in G)$$

で定める. よって我々は

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{**}} \left[\left\| (\mathcal{Y}_s^{(n)})^{-1} \cdot \mathcal{Y}_t^{(n)} \right\|_{\mathbb{H}}^4 \right] \leq C(t-s)^2 \quad (0 \leq s \leq t).$$

なる評価を新たな目標とすれば良いことが知られる. 後はこの期待値の中身を $\mathfrak{g}^{(1)}$ -成分と $\mathfrak{g}^{(2)}$ -成分に分解してそれぞれで評価を出すことになるが, $\mathfrak{g}^{(1)}$ -成分の評価に関しては石渡-河備-小谷が [6] で行った結晶格子の場合の緊密性の証明での評価と本質的に同じ手法で解決される. $\mathfrak{g}^{(2)}$ -成分の評価に関しては既存の離散幾何解析的手法とマルチンゲール理論からの不等式を援用して評価を行う必要がある. 具体的には $\mathfrak{g}^{(2)}$ -成分を評価していくうちに, 離散版の確率積分に相当する項が現れるので, これらに対して上手く Burkholder–Davis–Gundy 不等式や Jensen 不等式を組み合わせるという流れである. その結果として以下の主結果を得た.

定理 2. (汎関数中心極限定理, [8]) $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$ を仮定する. すると, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$(\mathcal{Y}_t^{(n)})_{0 \leq t \leq 1} \Longrightarrow (Y_t)_{0 \leq t \leq 1} \text{ in } \mathbf{W} = C_{1G}([0, 1]; G) \text{ が成り立つ.}$$

また, G を第 1 種標準座標系を用いて $\mathbb{R}^{d+d(d-1)/2}$ と同一視するとき, この局所座標で収束先の拡散過程 $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ を表示してみると,

$$Y_t = \left(B_t^i; \frac{1}{2} \int_0^t (B_s^i \circ dB_s^j - B_s^j \circ dB_s^i) + t\beta(\Phi_0)^{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq i < j \leq d}} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

となることがわかる. つまり, $\mathfrak{g}^{(1)}$ (G のアーベル部分) に対応する成分はまさに標準 Brown 運動であるが, $\mathfrak{g}^{(2)}$ に対応する成分は Lévy area に $\mathfrak{g}^{(2)}$ -値のドリフト $\beta(\Phi_0)$ が加わった形をしていることが確認できる. ベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークのスケール極限にその非対称性を受け継ぐ量 $\beta(\Phi_0)$ が現れることは興味深い現象であると言える. なお拡散過程 $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ は, 近年 Rough Path 理論の研究においても **magnetic Brownian rough path** なる対象として現れている (cf. Lejay–Lyons [14], Friz–Gassiat–Lyons [3]) ことを付記しておく.

4 例

本稿の締めくくりとして, 3 次元離散 Heiseberg 群 $\Gamma = \mathbb{H}^3(\mathbb{Z})$ を取り上げて, ある Γ -ベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークに関する一連の計算結果を紹介する. G を Γ を格子として含むベキ零 Lie 群, すなわち 3 次元 Heisenberg 群

$$G = \mathbb{H}^3(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^3, *) \text{ with } (x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$$

とする. G はステップ 2 の自由ベキ零 Lie 群で, その Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}$ は

$$\mathfrak{g} \equiv \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, X_2\} \oplus \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_3\}; \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられることはよく知られている. さて Γ -ベキ零被覆グラフ $X = (V, E)$ を次の 3 元 $\gamma_1 := (1, 0, 0)$, $\gamma_2 := (0, 1, 0)$, $\gamma_3 := (-1, 1, 0)$ (及びそれらの逆元) を生成元とする Γ の Cayley グラフとする. 商グラフ $X_0 = (V_0, E_0)$ は 3-ブーケグラフ; $V_0 = \{\mathbf{x}\}$, $E_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \cup \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ である.

さて, 我々は X 上の (X_0 上の) ランダムウォークを次のように推移確率 p を与えることで定義する.

$$p(e_1) = \xi, \quad p(\bar{e}_1) = \xi', \quad p(e_2) = \eta', \quad p(\bar{e}_2) = \eta, \quad p(e_3) = \zeta, \quad p(\bar{e}_3) = \zeta'.$$

ただし, $\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta' > 0$ とし, $\xi - \xi' = \eta - \eta' = \zeta - \zeta' = \varepsilon (\geq 0)$ を満たすものとする. また, X が 1 点からなる有限グラフの被覆グラフであるから不変測度 m は $m(\mathbf{x}) = 1$ を満たすものである. すると, homological direction は

$$\gamma_p = \varepsilon([e_1] - [e_2] + [e_3])$$

で与えられる. 特に, このランダムウォークが m -対称であるための必要十分条件は $\varepsilon = 0$ であることが分かる. つまり, パラメータ ε はランダムウォークの非対称性の intensity を表現しているものと思うことができる.

次に全射準同型 $\rho_{\mathbb{R}} : H_1(X_0, \mathbb{R}) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{[e_1], [e_2], [e_3]\} \rightarrow \mathfrak{g}^{(1)}$ を

$$\rho_{\mathbb{R}}([e_1]) := X_1, \quad \rho_{\mathbb{R}}([e_2]) := X_2, \quad \rho_{\mathbb{R}}([e_3]) := X_2 - X_1$$

で定める. すると, asymptotic direction は

$$\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \varepsilon\{X_1 - X_2 + (X_2 - X_1)\} = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$$

となることが知られる. 従ってこの例は我々の主定理の枠組みに入るものである.

さて, X の実現 $\Phi_0 : X \rightarrow G$ を $\Phi_0(o(\bar{e}_i)) = 1_G$ ($i = 1, 2, 3$) とするとき,

$$\Phi_0(t(e_1)) := \gamma_1, \quad \Phi_0(t(e_2)) := \gamma_2, \quad \Phi_0(t(e_3)) := \gamma_3$$

を満たすものと定めよう. すると, これは修正調和の条件式を満足することが直ちにわかり, このようにして定めた実現が修正調和実現の一つの例を与えることが確認できる. いま, $\{V_1, V_2\}$ を Albanese 計量に関する $\mathfrak{g}^{(1)}$ の正規直交基底とし, $V_3 := [V_1, V_2] = V_1V_2 - V_2V_1$ とおく. 最終的に我々は主定理に現れた拡散過程に対応する生成作用素 \mathcal{A} を次のように求められた.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2) + \frac{\varepsilon}{2}\text{vol}(\text{Alb}^{\Gamma})V_3.$$

ここに, $\text{vol}(\text{Alb}^{\Gamma})$ は Albanese トーラスと呼ばれるものの体積であり, $\mathfrak{g}^{(1)}$ 上 X_1, X_2 が張る平行四辺形の Albanese 計量による面積である. この例の計算からもわかるように, 我々が導入した $\beta(\Phi_0)$ はランダムウォークの非対称性のほかにも, 幾何的な情報を内在量として有している可能性が高く, $\mathfrak{g}^{(2)}$ をさらに幾何的な視点から解剖していくことが今後の課題の一つとして挙げられるであろう.

参考文献

- [1] G. Alexopoulos: *Convolution powers on discrete groups of polynomial volume growth*, *Canad. Math. Soc. Conf. Proc.* **21** (1997), pp.31–57.
- [2] G. Alexopoulos: *Random walks on discrete groups of polynomial growth*, *Anni. Probab.* **30** (2002), pp. 723–801.
- [3] P. Friz, P. Gassiat and T. Lyons: *Physical Brownian motion in a magnetic field as a rough path*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), pp. 7939–7955.
- [4] S. Ishiwata: *A central limit theorem on a covering graph with a transformation group of polynomial growth*, *J. Math. Soc. Japan* **55** (2003), pp. 837–853.
- [5] S. Ishiwata: *A Berry–Esseen type theorem on nilpotent covering graphs*, *Canad. J. Math.* **56** (2004), pp. 963–982.
- [6] S. Ishiwata, H. Kawabi and M. Kotani: *Long time asymptotics of non-symmetric random walks on crystal lattices*, *J. Funct. Anal.* **272** (2017), pp.1553–1624.
- [7] S. Ishiwata, H. Kawabi and R. Namba: *Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs*, In preparation.
- [8] S. Ishiwata, H. Kawabi and R. Namba: *Functional central limit theorems for non-symmetric random walks on step-2 nilpotent covering graphs*, In preparation.
- [9] M. Kotani: *A central limit theorem for magnetic transition operators on a crystal lattice*, *J. London Math. Soc.* **65** (2002), pp. 464–482.
- [10] M. Kotani and T. Sunada: *Albanese maps and off diagonal long time asymptotics for the heat kernel*, *Comm. Math. Phys.* **209** (2000), pp. 633–670.
- [11] M. Kotani and T. Sunada: *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2000), pp. 1–20.
- [12] M. Kotani and T. Sunada: *Large deviation and the tangent cone at infinity of a crystal lattice*, *Math. Z.* **254** (2006), pp. 837–870.
- [13] M. Kotani, T. Shirai and T. Sunada: *Asymptotic behavior of the transition probability of a random walk on an infinite graph*, *J. Funct. Anal.* **159** (1998), pp. 664–689.
- [14] A. Lejay and T. Lyons: *On the importance of the Lévy area for studying the limits of functions of converging stochastic processes. Application to homogenization.*, *Current trends in potential theory*, *Theta Ser. Adv. Math.*, Bucharest, **4** (2005), pp. 63–84.
- [15] F. Spitzer: *Principles of Random Walk*, Princeton, NJ: D. Van. Nostrand, 1964.
- [16] T. Sunada: *Topological Crystallography with a View Towards Discrete Geometric Analysis*, *Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences* **6**, Springer Japan, 2013.
- [17] R. Tanaka: *Large deviation on a covering graph with group of polynomial growth*, *Math. Z.*, **267** (2011), pp. 803–833.
- [18] H.F. Trotter: *Approximation of semi-groups of operators*, *Pacific J. Math.* **8** (1958), pp. 887–919.