数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 24-27

MAXIMAL EDGE-TRAVERSAL TIME IN FIRST PASSAGE PERCOLATION

京都大学・数理解析研究所　中島秀太
Shuta Nakajima
Research Institute in Mathematical Sciences, Kyoto University

1. 概要

伝染病は、病原体がその宿主から他の個体へと移り、連鎖的に感染者数が拡大する伝染性の病気である。それらを数理モデルに置き換える際、ひとつの実現の方法は適当なランダム環境を与え、伝染速度をランダム環境に依存する形で割り当てるというものである。First Passage Percolation(FPP) はそのような実現の一つであり、動的な伝染モデルとして 1965 年に Hammersley と Welsh により導入された。本講演では FPP の optimal path に対する maximal edge-traversal time の評価について述べる。

2. モデルの定義

FPP は任意のグラフで定義できるが本講演では $\mathbb{Z}^d$-lattice 上での FPP を扱う。隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す。各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ には、その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布 F に従う非負確率変数 τ_e が与えられているとする。その確率測度を $\mathbb{P}$ と置く。また、$\mathbb{Z}^d$ の辺を $e_1 \to \cdots \to e_k$ の順にたどる路 π の移動時間を $t(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$ で定義する。さらに二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 間の最小移動時間を

$$T(x,y) := \inf\{t(\pi) :\ \pi \text{は} x \text{から} y \text{への路}\}.$$

で定義し、最小移動時間を与える路を optimal path と呼ぶことにする。x から y への optimal path の集合を $\mathrm{Opt}(x,y)$ で定義する。また、路 γ について、maximal edge-traversal time を

$$\Xi(\gamma) := \max\{\tau_e |\ e \in \gamma\}$$

で定義する。

3. 先行研究

先行研究を述べる前にいくつか定義する。

- F が非有界 $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ 任意の $M > 0$ について $\mathbb{P}(\tau_e > M) > 0$.
- $\underline{F}$ を τ_e の support の下限, $p_c(d)$, $\vec{p}_c(d)$ をそれぞれ d 次元 percolation, oriented precolation model の臨界確率とする.
- F が適切 $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathbb{E}[\tau_e] < \infty$ でかつ次のどちらかが成り立つ;
  (i) $\underline{F} = 0$, $\mathbb{P}(\tau_e = 0) < p_c(d)$, (ii) $\underline{F} > 0$, $\mathbb{P}(\tau_e = \underline{F}) < \vec{p}_c(d)$.

van den Berg と Kesten の time constant についての狭義の不等式の結果 [2] から F が非有界で適切であるとき optimal path の maximal edge-traversal time は無限に発散することが証明できる。より正確には次が成り立つ。

Proposition 1. F が非有界かつ適切ならば,

$$\min_{\Gamma \in \mathrm{Opt}(O, Ne_1)} \Xi(\Gamma) \to \infty \quad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

自然な問題として maximal edge-traversal time はどのくらいの速さで発散するか (Question 2 in [1]) という問題が考えられる。本研究では発散のオーダーについて調べる。

Date: January 30, 2017.
2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K37; secondary 60K35; 82A51; 82D30.
Key words and phrases. random environment, first passage percolation.

4. 主結果

Theorem 1 ([3]). *Suppose $d \geq 2$, F is useful, and there exist $a > 1$, $c_1 - c_4$, t_1, $r > 0$ such that for any $t \geq t_1$,*

$$c_1 e^{-c_2 t^r} \leq F([t, at]) \leq c_3 e^{-c_4 t^r}.$$

Then, there exists K_1, $K_2 > 0$ such that,

$$\mathbb{P}\left(K_1 f_{d,r}(N) \leq \min_{\Gamma \in \mathrm{Opt}(O, Ne_1)} \Xi(\Gamma) \leq \max_{\Gamma \in \mathrm{Opt}(O, Ne_1)} \Xi(\Gamma) \leq K_2 f_{d,r}(N)\right) \to 1,$$

where,

$$f_{d,r}(N) := \begin{cases} (\log N)^{\frac{1}{1+r}} & \text{if } 0 < r < d-1 \\ (\log N)^{\frac{1}{d}} (\log \log N)^{\frac{d-2}{d}} & \text{if } r = d-1 \\ (\log N)^{\frac{1}{d}} & \text{if } d-1 < r < d \\ (\log N)^{\frac{1}{d}} (\log \log N)^{-\frac{1}{d}} & \text{if } r = d \\ (\log N)^{\frac{1}{r}} & \text{if } d < r. \end{cases}$$

Theorem 2 ([3]). *Suppose $d \geq 2$, F is useful, $\mathbb{E}\tau_e^4 < \infty$, and there exist $a > 1$, c, t_1, $\beta > 0$ such that for any $t \geq t_1$,*

$$c t^{-\beta} \leq F([t, at]).$$

Then, there exists K_1, $K_2 > 0$ such that,

$$\mathbb{P}\left(K_1 \frac{\log N}{\log \log N} \leq \min_{\Gamma \in \mathrm{Opt}(O, Ne_1)} \Xi(\Gamma) \leq \max_{\Gamma \in \mathrm{Opt}(O, Ne_1)} \Xi(\Gamma) \leq K_2 \frac{\log N}{\log \log N}\right) \to 1.$$

5. Sketch of the proof for upper bound

簡単のため、$d = 2$ かつ τ_e の分布が指数分布に従う場合について upper bound の証明を与える。この時、$f_{d,r}(N) = \sqrt{\log N}$ となることに注意。与えられた辺 $e = \{v, w\}$ について k-th boundary $C_k^{(e)}$ を次で定義。

$$C_k^{(e)} = \{z \in \mathbb{Z}^d : \ |v - z|_\infty \wedge |w - z|_\infty = k\}$$

Definition 1. ある $k \leq \sqrt{\log N}$ が存在し

$$\sum_{e' \in E(\mathbb{Z}^d),\ e' \subset C_k^{(e)}} \tau_{e'} \leq M \sqrt{\log N},$$

であるとき、e が *good* であると呼ぶ。ここで M は $M > 100 \max\{1, \log \mathbb{E} e^{\tau_e/2}\}$ となるようとる。

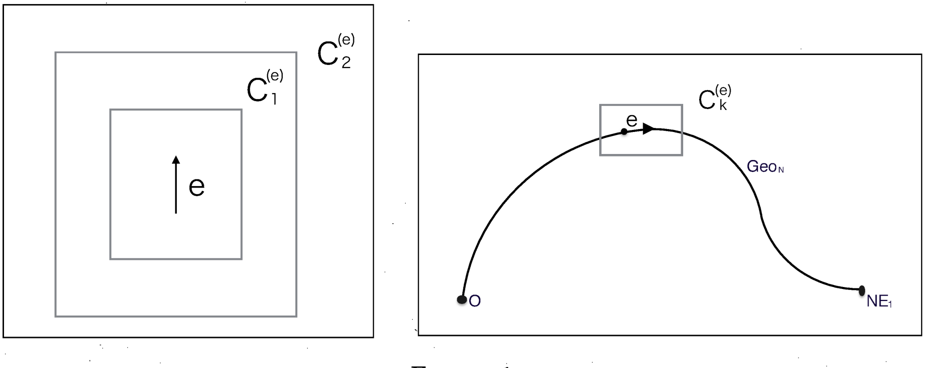

Figure 1

Left: The figure of $C_k^{(e)}$.

Right: If e is good, we should avoid by using face lines of $C_k^{(e)}$.

Exponential Markov inequality より、つぎがわかる。

$$\mathbb{P}\left(\sum_{e'\in E(\mathbb{Z}^d),\ e'\subset C_k^{(e)}} \tau_{e'} > M\sqrt{\log N}\right) \le e^{-M\sqrt{\log N}/2}\prod_{e'\in \ell}\mathbb{E}e^{\tau_{e'}/2} \le e^{-\frac{1}{4}M\sqrt{\log N}} \tag{5.1}$$

従って十分大きな N について

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(e \text{ is not good}) &\le \prod_{k\le\sqrt{\log N}}\mathbb{P}\left(\sum_{e'\in C_k^{(e)}}\tau_{e'} > M\sqrt{\log N}\right)\\ &\le (e^{-\frac{1}{4}M\sqrt{\log N}})^{\sqrt{\log N}} \le N^{-12}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

以上より

$$\mathbb{P}(\text{for all } e\subset[-N^2,N^2],\ e \text{ is good }) \ge 1-(4N^2)^2\mathbb{P}(e \text{ is not good}) \to 1.$$

今、e は good であるとし、e を通る path を路 π を考える。そのとき、ある k が存在し、

$$\sum_{e\in E(\mathbb{Z}^d),\ e\subset C_k^{(e)}} \tau_e \le M\sqrt{\log N}$$

であるので、もし $\tau_e > M\sqrt{N}$ かつ $C_k^{(e)}$ が O 及び Ne_1 を内部に含まなければ、π を $C_k^{(e)}$ を用いて変形することで passage time を低くすることができる。従ってこのとき π は optimal path とは成り得ない。

一方、簡単な考察より次がわかる。

$$\mathbb{P}\left(\left\{\forall e\in E(\mathbb{Z}^d) \text{ with } e\subset[-\log N,\log N]^2\cup(Ne_1+[-\log N,\log N]^2),\ \tau_e\le M\sqrt{N}\right\}\right)\to 1.$$

$$\mathbb{P}\left(\{\forall\pi\in \mathrm{Opt}(O,Ne_1),\ \pi\subset[-N^2,N^2]^2\}\right)\to 1.$$

上の 2 つと合わせて証明を得る。

6. Sketch of the proof for lower bound

ここでは lower bound の証明の流れを紹介する。次の補題が鍵となる。補題の証明は [3] を参照。

Lemma 1.
For any $\delta>0$, there exists $N_1\in\mathbb{N}$ and $K_1>0$ s.t. for any $N\ge N_1$,

$$\mathbb{E}\left[\min_{\Gamma\in\mathrm{Opt}(O,Ne_1)}\sharp\{e\in\Gamma|\ \tau_e\ge K_1 f_{d,r}(N)\}\right]\ge N^{1-\delta}.$$

次の補題は平均から得られた情報を高確率に関する主張に焼き直すために用いる。

Lemma 2 ([4]).
If $\mathbb{E}\tau_e^4<\infty$, then for any $\delta>0$, $\mathbb{P}(|T(O,Ne_1)-\mathbb{E}T(O,Ne_1)|>N^{1/2+\delta})\to 1$.

新しい辺の移動時間を $\tilde{\tau}_e := \tau_e + 1_{\{\tau_e>K_1 f_{d,r}(N)\}}$ と置く。$\tilde{T}(O,Ne_1)$、$\tilde{\mathrm{Opt}}(O,Ne_1)$ をそれに付随する最小移動時間、optimal path とする。上の 2 つの補題 (または $\tilde{\tau}_e$ に対する上の補題) を認めて主張を証明する。

$\tilde{\tau}_e$ に対する Lemma 1 により、$\mathbb{E}T(O,Ne_1)+N^{2/3}<\mathbb{E}\tilde{T}(O,Ne_1)$。従って、$\tau_e$、$\tilde{\tau}_e$ に対する Lemma 2 により、

$$\mathbb{P}(T(O,Ne_1)<\tilde{T}(O,Ne_1))\to 1.$$

一方、もし $\min_{\Gamma\in\mathrm{Opt}(O,Ne_1)}\Xi(\Gamma)<K_1 f_{d,r}(N)$ であれば、$T(O,Ne_1)=\tilde{T}(O,Ne_1)$ であるから、対偶をとって

$$T(O,Ne_1)<\tilde{T}(O,Ne_1)\ \Rightarrow\ \min_{\Gamma\in\mathrm{Opt}(O,Ne_1)}\Xi(\Gamma)\ge K_1 f_{d,r}(N).$$

以上より、$\mathbb{P}(\min_{\Gamma\in\mathrm{Opt}(O,Ne_1)}\Xi(\Gamma)\ge K_1 f_{d,r}(N))\to 1$。

REFERENCES

[1] A. Auffinger, J. Hanson, and M. Damron. 50 years of first passage percolation, 2015. ArXiv e-print 1511.03262.
[2] J. van den Berg and H. Kesten. Inequalities for the time constant in first-passage percolation. *Annals Applied Probability*, 56-80, 1993
[3] S. Nakajima. Maximal edge-traversal time in First Passage Percolation *preprint*
[4] Y. Zhang. On the concentration and the convergence rate with a moment condition in first passage percolation *Stochastic Process. Appl.*, 120(7):1317-1341, 2010.

(Shuta Nakajima) RESEARCH INSTITUTE IN MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO, JAPAN
E-mail address: `njima@kurims.kyoto-u.ac.jp`