数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 32-38

移動平均型定常増分過程に対する
新生過程によるセミマルチンゲール表現

広島大学・大学院理学研究科　井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Science, Hiroshima University

広島大学・大学院理学研究科　仲村 勇祐 (Yusuke Nakamura)
Graduate School of Science, Hiroshima University

1　イントロダクション

これは, 時系列解析の手法と伊藤解析の枠組みの融合という方向の研究に関する我々の最近の結果の報告である．証明等の詳細については，別の場所で発表予定である．

関数 $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$c(t) := 1_{(0,\infty)}(t)\sum_{k=1}^{n}\theta_k e^{-p_k t} \qquad (t\in\mathbb{R}) \tag{1.1}$$

により定める．ここで,

$$\begin{cases} n\in\mathbb{N}, \\ p_k\in(0,\infty) \qquad (k=1,\dots,n), \\ \theta_k\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad (k=1,\dots,n) \end{cases} \tag{1.2}$$

とする．$\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を，完備な確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義され，$W(0)=0$ を満たし，時間パラメータ t が $\mathbb{R}$ 全体を動く 1 次元ブラウン運動とする．ガウス型定常増分過程 $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を，次の連続時間版の移動平均表現で定義する：

$$Z(t) := W(t) - \int_0^t \left\{\int_{-\infty}^s c(s-u)dW(u)\right\}ds \qquad (t\in\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

$\mathcal{F}$ の P-零集合の全体

$$\mathcal{N} := \{E\in\mathcal{F} : P(E)=0\}$$

を用いて,

$$\mathcal{F}_t := \sigma(Z(s): 0\le s\le t)\vee\mathcal{N} \qquad (t\ge 0) \tag{1.4}$$

によりフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ を定義する．このとき，$\{Z(t)\}_{t\ge0}$ の**新生過程** $\{\overline{W}(t)\}_{t\ge0}$ は, 次で定義される：

$$\overline{W}(t) := Z(t) + \int_0^t E\left[\int_{-\infty}^s c(s-u)dW(u)\middle|\mathcal{F}_s\right]ds \qquad (t\ge 0). \tag{1.5}$$

$\{\overline{W}(t)\}_{t\ge0}$ は 1 次元ブラウン運動で,

$$\sigma(\overline{W}(s): 0\le s\le t) = \sigma(Z(s): 0\le s\le t) \qquad (t\ge 0)$$

を満たす．従って，(1.4) で定義されるフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ は，ブラウン運動 $\{\overline{W}(t)\}_{t\geq 0}$ の定義する Brownian filtration に一致する．さらに，(1.5) を

$$Z(t) = \overline{W}(t) - \int_0^t E\left[\int_{-\infty}^s c(s-u)dW(u)\middle|\mathcal{F}_s\right] ds \qquad (t \geq 0)$$

と変形することで，$\{Z(t)\}$ の $t \geq 0$ の部分 $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ は，$\{\mathcal{F}_t\}$-セミマルチンゲール (あるいは伊藤過程) となることが分かる．さらに，確定的な関数 $\ell(s,u)$ で

$$\int_0^s \ell(s,u)^2 du < \infty \qquad (s \geq 0)$$

および

$$E\left[\int_{-\infty}^s c(s-u)dW(u)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \int_0^s \ell(s,u)d\overline{W}(u) \qquad (s \geq 0) \tag{1.6}$$

を，従って

$$Z(t) = \overline{W}(t) - \int_0^t \left\{\int_0^s \ell(s,u)d\overline{W}(u)\right\} ds \qquad (t \geq 0) \tag{1.7}$$

を，満たすものが存在する．

上に述べた事柄は，すべてフィルタリングの一般論から分かる事実である．[LS, Theorems 7.12 and 7.16] を参照せよ．しかし，一般論は $\ell(s,u)$ の具体的な形を教えてくれない．そこで，我々がここで扱うのは，次の問題である．

問題. (1.6) の，従って (1.7) の，$\ell(s,u)$ を明示的に求めよ．

この問題に対する結果は，$\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ という記憶を持つ定常増分過程をノイズとして採用する確率モデルに対して，(分数べきブラウン運動をノイズとするモデル等と異なり) ブラウン運動 $\{\overline{W}(t)\}_{t\geq 0}$ に関する通常の伊藤解析の枠組みの中で，種々の具体的な計算の実行を可能にする．そのような (特にファイナンスのモデルへの) 応用例については，[INA, IN, IMN] および第 4 節を見よ．

上の問題に対する我々の主結果 (下の定理 3.1) の導出は，無限の過去と無限の未来への交互射影に関する一連の手法に基づく．このタイプの手法は [I1] で初めて用いられ，その後，離散時間過程や連続時間過程および単位円周上の直交多項式に対する種々の問題を通して，[I2, I3, IK1, IK2, AIK, IA1, IA2, IKPh, BIK, KB, IKP1, KIP, IKP2] 等で発展・応用されてきた．

2 $n = 1$ の場合の結果

第 1 節の問題の $n = 1$ の場合，すなわち

$$c(t) = 1_{(0,\infty)}(t)\theta e^{-pt} \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{2.1}$$

$$p \in (0,\infty), \qquad -\infty < \theta < p \tag{2.2}$$

の場合は，[AI, AIK] の結果をもとに，[INA] で既に解かれている．次節で一般の $n \geq 1$ 場合の主結果を述べる前に，その [INA] の $n = 1$ の場合の結果をこの節では紹介する．

定理 2.1 ([INA]). (2.1), (2.2) を仮定する．すると，次が成り立つ：

$$\ell(s,u) = e^{-ps}\ell(u) \qquad (s > u > 0).$$

ここで，

$$\ell(u) := \theta e^{pu}\left\{1 - \frac{2\theta(p-\theta)}{(2p-\theta)^2 e^{2(p-\theta)u} - \theta^2}\right\} \qquad (u > 0).$$

[INA] の定理 2.1 の証明の方針は以下の通りである．(2.1), (2.2) の場合には

$$E\left[\int_{-\infty}^{s} c(s-u)dW(u)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \int_0^s k(s,u)dZ(u) \qquad (s \geq 0),$$

$$k(s,u) = \theta(2p-\theta)\frac{(2p-\theta)e^{(p-\theta)u} - \theta e^{-(p-\theta)u}}{(2p-\theta)e^{(p-\theta)s} - \theta e^{-(p-\theta)s}} \qquad (0 \leq u \leq s)$$

という結果が，[AIK] において得られている (この導出には，第 1 節で述べた無限の過去と無限の未来への交互射影に関する手法を用いる)．一方，一般論から k と ℓ は次の Volterra 型積分方程式を満たすことが知られている：$0 \leq s \leq t$ に対し，

$$\ell(t,s) - k(t,s) + \int_s^t \ell(t,u)k(u,s)du,$$

$$\ell(t,s) - k(t,s) + \int_s^t k(t,u)\ell(u,s)du.$$

そこで，[INA] では，この Volterra 型積分方程式を ℓ について具体的に解くことで，定理 2.1 の結果を示した．

3 主結果

実係数有理関数 Θ を

$$\Theta(\xi) := 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{p_k + \xi}$$

により定義する．次の (定常時系列の純非決定性に対応する) 仮定を考える：

$$\Theta(-\xi) \text{ は } n \text{ 個の相異なる正の零点 } q_1, \ldots, q_n \text{ を持つ．} \qquad \textbf{(A)}$$

仮定 (A) のもと，$\psi_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ を

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_k}{q_k + \xi} = \frac{1}{\Theta(\xi)}$$

により定義する．$t > 0$ に対し，$G(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を次で定義する：

$$G(t) := \begin{pmatrix} \frac{\psi_1\Theta(q_1)}{q_1+q_1}e^{-q_1 t} & \frac{\psi_2\Theta(q_2)}{q_1+q_2}e^{-q_2 t} & \cdots & \frac{\psi_n\Theta(q_n)}{q_1+q_n}e^{-q_n t} \\ \frac{\psi_1\Theta(q_1)}{q_2+q_1}e^{-q_1 t} & \frac{\psi_2\Theta(q_2)}{q_2+q_2}e^{-q_2 t} & \cdots & \frac{\psi_n\Theta(q_n)}{q_2+q_n}e^{-q_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\psi_1\Theta(q_1)}{q_n+q_1}e^{-q_1 t} & \frac{\psi_2\Theta(q_2)}{q_n+q_2}e^{-q_2 t} & \cdots & \frac{\psi_n\Theta(q_n)}{q_n+q_n}e^{-q_n t} \end{pmatrix}.$$

また，$D(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を

$$D(s) := \{1 - G(s)^2\}^{-1} \qquad (s > 0)$$

により定める (逆行列の存在は保証されている)．さらに，$s > 0$ に対し，$v_1(s) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ および $F(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ をそれぞれ次で定める：

$$v_1(s) := \left(\psi_1\Theta(q_1)e^{-q_1 s}, \psi_2\Theta(q_2)e^{-q_2 s}, \dots, \psi_n\Theta(q_n)e^{-q_n s}\right),$$

$$F(s) := \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \frac{G_{1,j}(s)e^{p_1 s}}{p_1 - q_j} & \frac{G_{1,j}(s)e^{p_2 s}}{p_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{1,j}(s)e^{p_n s}}{p_n - q_j} \\ \frac{G_{2,j}(s)e^{p_1 s}}{p_1 - q_j} & \frac{G_{2,j}(s)e^{p_2 s}}{p_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{2,j}(s)e^{p_n s}}{p_n - q_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{G_{n,j}(s)e^{p_1 s}}{p_1 - q_j} & \frac{G_{n,j}(s)e^{p_2 s}}{p_2 - q_j} & \cdots & \frac{G_{n,j}(s)e^{p_n s}}{p_n - q_j} \end{pmatrix}.$$

ただし，$G_{i,j}(s)$ は行列 $G(s)$ の (i,j) 成分を表す．$k = 1, 2, \dots, n$ に対して，

$$\ell_k(s) := \theta_k e^{p_k s} - \theta_k[v_1(s)D(s)F(s)]_k \qquad (s > 0) \tag{3.1}$$

とおく．ただし，$[v_1(s)D(s)F(s)]_k$ は，$1 \times n$ 行列 $v_1(s)D(s)F(s)$ の第 k 成分を表す．

次が我々の主結果である．

定理 3.1. (A) を仮定する．このとき，(1.6) が次の $\ell(s,u)$ で成り立つ：

$$\ell(s,u) := \sum_{k=1}^{n} e^{-p_k s}\ell_k(u). \tag{3.2}$$

この定理より特に次が分かる：与えられたブラウン運動 $\{\overline{W}(t)\}_{t\geq 0}$ と (3.2) の $\ell(s,u)$ により (1.7) で与えられる $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ は，(1.1), (1.3) で定義される $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ と同じ分布を持つ定常増分過程である．

定理 3.1 の $n = 1$ の場合は，定理 2.1 に一致する．定理 3.1 の $n \geq 2$ の場合を第 2 節で述べた [AIK, INA] の方法で示すのは困難で，[IKP2] で導入された新しい手法が証明の鍵となる．

今，n 個の過程 $\{X_k(t)\}_{t\geq 0}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ を, 次により定める：

$$X_k(t) := \int_0^t \ell_k(s)d\overline{W}(s) \qquad (t \geq 0).$$

次の定理より，$Z(t)$ は $n+1$ 次元マルコフ過程の成分として埋め込めることが分かる．

定理 3.2. (A) を仮定する．このとき，$(Z(t), X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ は次のマルコフ型 SDE の解である：$t \geq 0$ に対し，

$$\begin{cases} dZ(t) = \left\{-\sum_{k=1}^{n} e^{-p_k t}X_k(t)\right\}dt + d\overline{W}(t), \\ dX_k(t) = \ell_k(t)d\overline{W}(t) \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

この定理 3.2 の結果は，ファイナンスのモデルのような数値計算が問題となる場合に特に有用である (第 4 節を参照せよ)．

4 金利モデルへの応用

上の結果の応用例として, 短期金利過程 $\{r(t)\}_{t\geq 0}$ が確率微分方程式

$$dr(t) = \{a - br(t)\}dt + \sigma dZ(t) \quad (t \geq 0), \quad r(0) \in [0, \infty) \tag{4.1}$$

により記述される Vasicek タイプのモデルを考える. ここで, $a, b, \sigma \in (0, \infty)$ とする. P を同値マルチンゲール測度とみなし, モデルのフィルトレーションは (1.4) の $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ をとる. (4.1) の $\{Z(t)\}$ は (1.7) の形の伊藤過程であるから, (4.1) は通常の伊藤解析の枠組みに入る. 一方, $\{Z(t)\}$ は定常増分過程であり, その意味でノイズとして自然である. $\{Z(t)\}$ は $2n$ 個のパラメータ p_k, θ_k を含むので, モデルの fitting で柔軟性が高い.

満期が T (> 0) で額面 1 の割引き債の時刻 $t \in [0, T]$ における価格 $P(t, T)$ は

$$P(t, T) = E\left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

により与えられる. 定理 3.2 により, [IMN] の結果を拡張した次が得られる.

定理 4.1 (アフィン期間構造の類似物). $P(t, T)$ は

$$P(t, T) = F(t, r(t), X_1(t), \ldots, X_n(t); T) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

で与えられる. ここで, $\ell_0(s) := \sigma$ として,

$$\begin{aligned}
F(t, x_0, x_1, \ldots, x_n; T) &:= \exp\left\{-A(t, T) - C_0(t, T)x_0 - \sum_{k=1}^{n} C_k(t, T)x_k\right\}, \\
C_0(t, T) &:= \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}, \\
C_k(t, T) &:= -\frac{\sigma}{b}\int_t^T e^{-p_k s}\{1 - e^{-b(T-s)}\}ds \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \\
A(t, T) &:= \frac{a}{b}\left\{T - t - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}\right\} - \frac{1}{2}\int_t^T \left\{\sum_{k=0}^{n} \ell_k(s) C_k(s, T)\right\}^2 ds.
\end{aligned}$$

次に期間構造方程式に関する結果を述べる. $G(t, r(t), X_1(t), \ldots, X_n(t))$ を満期が S $(\leq T)$ で, ペイオフが $H = h(P(S, T))$ のヨーロピアン・タイプの派生証券の時間 t における価格とする. すると, G の数値計算は次の PDE の数値計算に帰着される :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial G}{\partial t}(t, x) + \mathcal{L}G(t, x) = 0 & ((t, x) \in [0, S) \times \mathbb{R}^{n+1}), \\
G(S, x) = h(F(S, x; T)) & (x \in \mathbb{R}^{n+1}).
\end{cases}$$

ここで, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\ell_0(t) := \sigma$, そして

$$\mathcal{L}G := \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \ell_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 G + \left\{a - bx_0 - \sigma\sum_{k=1}^{n} e^{-p_k t}x_k\right\}\frac{\partial G}{\partial x_0} - x_0 G.$$

即ち, (4.1) の非マルコフ的金利モデルにおいては, PDE による通常の数値計算法が可能である.

参考文献

[AI] V. V. Anh and A. Inoue, Financial markets with memory I: Dynamic models, *Stochastic Anal. Appl.* **23** (2005), 275–300.

[AIK] V. V. Anh, A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization, *Stochastic Anal. Appl.* **23** (2005), 301–328.

[BIK] N. H. Bingham, A. Inoue and Y. Kasahara, An explicit representation of Verblunsky coefficients, *Statist. Probab. Lett.* **82** (2012), 403–410.

[I1] A. Inoue, Asymptotics for the partial autocorrelation function of a stationary process, *J. Anal. Math.* **81** (2000), 65–109.

[I2] A. Inoue, Asymptotic behavior for partial autocorrelation functions of fractional ARIMA processes, *Ann. Appl. Probab.* **12** (2002), 1471–1491.

[I3] A. Inoue, AR and MA representation of partial autocorrelation functions, with applications, *Probab. Theory Related Fields* **140** (2008), 523–551.

[IA1] A. Inoue and V. V. Anh, Prediction of fractional Brownian motion-type processes, *Stoch. Anal. Appl.* **25** (2007), 641–666.

[IA2] A. Inoue and V. V. Anh, Prediction of fractional processes with long-range dependence, *Hokkaido Math. J.* **41** (2012), 157–183.

[IK1] A. Inoue and Y. Kasahara, Partial autocorrelation functions of fractional ARIMA processes with negative degree of differencing, *J. Multivariate Anal.* **89** (2004), 135–147.

[IK2] A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications, *Ann. Statist.* **34** (2006), 973–993.

[IKPh] A. Inoue, Y. Kasahara and P. Phartyal, Baxter's inequality for fractional Brownian motion-type processes with Hurst index less than 1/2, *Statist. Probab. Lett.* **78** (2008), 2889–2894.

[IKP1] A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, The intersection of past and future for multivariate stationary processes, *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 1779–1786.

[IKP2] A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes, *Bernoulli*, to appear. arXiv:1507.02848.

[IMN] A. Inoue, S. Moriuchi and Y. Nakamura, A Vasicek-type short rate model with memory effect, *Stochastic Anal. Appl.* **33** (2016), 1068–1082.

[IN] A. Inoue and Y. Nakano, Optimal long-term investment model with memory, *Appl. Math. Optim.* **55** (2007), 93–122.

[INA] A. Inoue, Y. Nakano and V. Anh, Linear filtering of systems with memory and application to finance, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* 2006, Art. ID 53104, 26 pp.

[KB] Y. Kasahara and N. H. Bingham, Verblunsky coefficients and Nehari sequences, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 1363–1378.

[KIP] Y. Kasahara, A. Inoue and M. Pourahmadi, Rigidity for matrix-valued Hardy functions, *Integr. Equ. Oper. Theory* **84** (2016), 289–300.

[LS] R. S. Liptser and A. N. Shiryaev, Statistics of random processes. I. General theory, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 2001.