数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 92-98

Gerber–Shiu 測度のスケール関数による表示公式について

野場 啓, 矢野 孝次
京都大学大学院理学研究科
Kei Noba and Kouji Yano
Graduate School of Science, Kyoto University

1 序

実数値確率過程 $X=\{X_t:t\geq 0\}$, $q\geq 0$ および $x>0$ に対して,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}f(X_{\tau_0^-},X_{\tau_0^--}):\tau_0^-<\infty\right]=\int f(u,v)G_x^{(q)}(du\,dv) \tag{1.1}$$

で定まる $(-\infty,0)\times(0,\infty)$ 上の測度 $G_x^{(q)}$ のことを **Gerber–Shiu** 測度という. ただし,

$$\tau_0^-:=\inf\{t>0:X_t<0\} \tag{1.2}$$

である. X を保険会社の準備金とみなしたとき, Gerber–Shiu 測度は保険会社の破産の深刻度を表しており, Gerber–Shiu [2] で導入された. 彼らは X を正のドリフトを持つ spectrally negative な 複合 Poisson 過程としたときの Gerber–Shiu 測度を考えた. Biffis–Kyprianou [1] は一般の spectrally negative な Lévy 過程に対して, スケール関数を用いた Gerber–Shiu 測度の表示を与えた.

講演では, Noba–Yano [4] (see also [7] [8] [9]) をもとに, 一般化した屈折 Lévy 過程の定義とその脱出問題の表示について述べた. そこでは非有界変動な標本路を持つ spectrally negative な Lévy 過程について, 周遊測度に対する Gerber–Shiu 測度の類似物のスケール関数を用いた表示が重要な役割を果たした. なお, Spectrally negative な Lévy 過程に関する周遊理論の研究は, Pardo–Pérez–Rivero [5] [6] でも行われている.

本報告では, これらの Gerber–Shiu 測度のスケール関数を用いた表示公式について, 証明付きでまとめる.

2 Spectrally negative な Lévy 過程

$X=\{X_t:t\geq 0\}$ を, 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_x)$ 上の spectrally negative な Lévy 過程で, $-X$ が subordinator ではないものとする. ただし $\mathbb{P}_x(X_0=x)=1$ とする. X の natural filtration を $\{\mathcal{F}_t:t\geq 0\}$ とする. X の **Laplace 指数**を

$$\psi(\lambda):=\log\mathbb{E}_0\left[e^{\lambda X_1}\right],\quad \lambda\geq 0 \tag{2.1}$$

で定義する．このとき Laplace 指数は，

$$\psi(\lambda) = a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(-\infty,0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x 1_{\{x>-1\}})\Pi(dx) \tag{2.2}$$

で与えられる．ただし，$a \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ であり，Lévy 測度 Π は $\Pi[0,\infty) = 0$ および $\int_{(-\infty,0)}(1 \wedge |x|^2)\Pi(dx) < \infty$ を満たす．また逆 **Laplace 指数**を

$$\Phi(\theta) = \inf\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = \theta\}, \quad \theta \geq 0 \tag{2.3}$$

で定義する．任意の非負実数 $q \geq 0$ に対して，q**-スケール関数** $W^{(q)} : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ が対応する．それは $(-\infty,0)$ 上では $W^{(q)} = 0$ であり，$[0,\infty)$ 上では連続で，Laplace 変換が

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-\beta x} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}, \quad \beta > \Phi(q) \tag{2.4}$$

を満たす関数として定まる．スケール関数は以下の性質を持つことが知られている．

補題 2.1 (See, e.g., [3, Chapter 8])**.** $q \geq 0$ に対して，

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{W^{(0)}(\epsilon)}{W^{(q)}(\epsilon)} = 1 \tag{2.5}$$

が成り立つ．

$x \in \mathbb{R}$ に対して，以下のように停止時刻を定義する：

$$\tau_x^+ = \inf\{t > 0 : X_t > x\}, \tag{2.6}$$
$$\tau_x^- = \inf\{t > 0 : X_t < x\}, \tag{2.7}$$
$$T_x = \inf\{t > 0 : X_t = x\}. \tag{2.8}$$

定理 2.2 (See, e.g., [3, Chapter 8])**.** $b \leq x \leq a$ と $q \geq 0$ に対して，

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^-\right] = \frac{W^{(q)}(x-b)}{W^{(q)}(a-b)} \tag{2.9}$$

が成り立つ．

定理 2.3 (See, e.g., [3, Chapter 8])**.** $b \leq x \leq a$ と $q \geq 0$ および非負可測関数 f に対して以下が成り立つ：

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_a^+ \wedge \tau_b^-} e^{-qt} f(X_t)dt\right] = \int_b^a f(y)\left(\frac{W^{(q)}(x-b)}{W^{(q)}(a-b)} W^{(q)}(a-y) - W^{(q)}(x-y)\right) dy, \tag{2.10}$$

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_b^-} e^{-qt} f(X_t)dt\right] = \int_b^{\infty} f(y)\left(e^{-\Phi(q)(y-b)} W^{(q)}(x-b) - W^{(q)}(x-y)\right) dy, \tag{2.11}$$

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\infty} e^{-qt} f(X_t)dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\Phi'(q) e^{-\Phi(q)(y-x)} - W^{(q)}(x-y)\right) dy. \tag{2.12}$$

数え上げ測度 N を次のように定義する:

$$N(A) = \#\{t > 0 : (t, X_t - X_{t-}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}((0,\infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{2.13}$$

このとき N は Poisson 点過程であり, 次の補正公式が成立する.

定理 2.4 (See, e.g., [3, Chapter 4]). $g : [0,\infty) \times \mathbb{R} \times \Omega \to [0,\infty)$ は以下を満たすとする:

(i) $g(t,x,\omega)$ は $\mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$-可測関数である.

(ii) $t \geq 0$ に対して, $g(t,\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}_{t-}$-可測関数である.

(iii) 確率 1 で $x \in \mathbb{R}$ に対して, $g(\cdot,x,\omega)$ は左連続な関数である.

このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\mathbb{E}_x\left[\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}} g(t,y,\omega)N(dt \times dy)\right] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} g(t,y,\omega)\Pi(dy)\right]. \tag{2.14}$$

3 Gerber–Shiu 測度

スケール関数, Lévy 測度および逆 Laplace 指数を用いて, Gerber–Shiu 測度の $\underline{X}_{\tau_0^- -}$ を含む一般化が次のように表されることが知られている.

定理 3.1 ([1]; See also [3, Chapter 10]). $q \geq 0$, $x > 0$ および非負可測関数 f に対して,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}, \underline{X}_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < T_0\right] = \int f(u,v,y)H_x^{(q)}(du\ dv\ dy) \tag{3.1}$$

が成り立つ. ただし, $H_x^{(q)}$ は $(-\infty,0) \times (0,\infty) \times (0,\infty)$ 上の測度で次で与えられる:

$$H_x^{(q)}(du\ dv\ dy) = 1_{\{v \geq y\}} e^{-\Phi(q)(v-y)}\left(W^{(q)\prime}(x-y) - \Phi(q)W^{(q)}(x-y)\right)\Pi(du-v)dydv. \tag{3.2}$$

本報告では $\underline{X}_{\tau_0^- -}$ を含まない公式に着目し, 定理 3.1 を用いない簡単な証明を与える.

定理 3.2. $q \geq 0$, $x > 0$ および非負可測関数 f に対して, 以下の式が成り立つ:

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < T_0\right] = \int f(u,v)G_x^{(q)}(du\ dv). \tag{3.3}$$

ただし, $G_x^{(q)}$ は $(-\infty,0) \times (0,\infty)$ 上の測度で次で与えられる:

$$G_x^{(q)}(du\ dv) = \left(e^{-\Phi(q)v}W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-v)\right)\Pi(du-v)dv. \tag{3.4}$$

証明. f が連続関数の場合に証明すれば十分である. f が連続関数のとき,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}f(X_{\tau_0^-},X_{\tau_0^--}):\tau_0^-<T_0\right] \\
=&\mathbb{E}_x\left[\int_{(0,\infty)\times(-\infty,0)}e^{-qt}f(X_t,X_{t-})1_{\{\underline{X}_{t-}>0,\ X_t<0\}}N(dt\ dy)\right] &(3.5)\\
=&\mathbb{E}_x\left[\int_{(0,\infty)\times(-\infty,0)}e^{-qt}f(X_{t-}+y,X_{t-})1_{\{\underline{X}_{t-}>0,\ X_{t-}+y<0\}}N(dt\ dy)\right] &(3.6)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 定理 2.4 より,

$$\begin{aligned}
(3.6)=&\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty dt\int_{(-\infty,0)}e^{-qt}f(X_{t-}+y,X_{t-})1_{\{\underline{X}_{t-}>0,\ X_{t-}+y<0\}}\Pi(dy)\right] &(3.7)\\
=&\int_{(-\infty,0)}\Pi(dy)\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt}f(X_t+y,X_t)1_{\{\underline{X}_t>0,\ X_t+y<0\}}dt\right] &(3.8)\\
=&\int_{(-\infty,0)}\Pi(dy)\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_0^-}e^{-qt}f(X_t+y,X_t)1_{\{X_t<-y\}}dt\right] &(3.9)
\end{aligned}$$

が成り立つ. (2.11) より,

$$(3.9)=\int_{(-\infty,0)}\Pi(dy)\int_0^{-y}f(v+y,v)\left(e^{-\Phi(q)v}W^{(q)}(x)-W^{(q)}(x-v)\right)dv \tag{3.10}$$

となり, (3.3) が得られた. □

注 3.3. 標本路がジャンプで 0 未満に到達するのではなく, 連続的に 0 未満に到達する場合において, 以下の等式が成り立つことが知られている (see, e.g., [3, Chapter 10]):

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}f(X_{\tau_0^-},X_{\tau_0^--}):\tau_0^-=T_0\right]=\frac{\sigma^2}{2}\left(W^{(q)\prime}(x)-\Phi(q)W^{(q)}(x)\right)f(0,0). \tag{3.11}$$

4 周遊測度における Gerber–Shiu 測度

X は非有界変動な標本路を持つ, つまり $\int_{(-\infty,0)}(1\wedge|x|)\Pi(dx)=\infty$ もしくは $\sigma>0$ を満たすものとする. このとき, X において原点は自分自身に対して正則であり, 次の意味で正規化された 0 のまわりの周遊測度 n を持つ:

$$n\left[1-e^{-qT_0}\right]=\frac{1}{\Phi'(q)},\qquad q>0. \tag{4.1}$$

また, 周遊理論の一般論より, $q\geq 0$ と非負可測関数 f に対して次の式が成り立つ:

$$\mathbb{E}_0\left[\int_0^\infty e^{-qt}f(X_t)dt\right]=\frac{n\left[\int_0^{T_0}e^{-qt}f(X_t)dt\right]}{n[1-e^{-qT_0}]}. \tag{4.2}$$

定理 4.1 ([4]). $q \geq 0$, $a > 0$ および非負可測関数 f に対して, 以下の式が成り立つ:

$$n\left[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \infty\right] = \frac{1}{W^{(q)}(a)}, \tag{4.3}$$

$$n\left[\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) dt\right] = \int_0^\infty f(y) e^{-\Phi(q)y} dy. \tag{4.4}$$

証明. *i)* $q \geq 0$ と $a > 0$ に対して,

$$c(q,a) := W^{(q)}(a) n\left[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \infty\right] \tag{4.5}$$

が q, a によらない定数であることを示す. 単調収束定理, 強 Markov 性, 補題 2.1 および定理 2.2 より,

$$\frac{n\left[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \infty\right]}{n[\tau_a^+ < \infty]} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+}\left(e^{-q\tau_a^+} 1_{\{\tau_a^+ < \tau_0^- \wedge T_0\}}\right) \circ \theta_{\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right]}{n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+}\left(1_{\{\tau_a^+ < \tau_0^- \wedge T_0\}}\right) \circ \theta_{\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right]} \tag{4.6}$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right] \mathbb{E}_\epsilon\left[e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_0^-\right]}{n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right] \mathbb{E}_\epsilon\left[\tau_a^+ < \tau_0^-\right]} \tag{4.7}$$

$$= \frac{W^{(0)}(a)}{W^{(q)}(a)} \tag{4.8}$$

となるから, $c(q,a) = c(0,a)$ が成り立つ. また, $0 < a_1 < a_2$ に対して, 強 Markov 性と定理 2.2 より,

$$\frac{n\left[\tau_{a_2}^+ < \infty\right]}{n\left[\tau_{a_1}^+ < \infty\right]} = \frac{n\left[\left(1_{\{\tau_{a_2}^+ < \tau_0^- \wedge T_0\}}\right) \circ \theta_{\tau_{a_1}^+} : \tau_{a_1}^+ < \infty\right]}{n\left[\tau_{a_1}^+ < \infty\right]} = \mathbb{E}_{a_1}\left[\tau_{a_2}^+ < \tau_0^-\right] = \frac{W^{(0)}(a_1)}{W^{(0)}(a_2)} \tag{4.9}$$

となるから, $c(0,a_1) = c(0,a_2)$ が成り立つ. よって, $c = c(q,a)$ は q, a によらない.

ii) $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対して,

$$n\left[\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) dt\right] = c \int_0^\infty f(y) e^{-\Phi(q)y} dy \tag{4.10}$$

が成り立つことを示す. 単調収束定理と強 Markov 性より,

$$n\left[\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) dt\right] = \lim_{\epsilon \downarrow 0} n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+}\left(\int_0^{\tau_0^- \wedge T_0} e^{-qt} f(X_t) 1_{\{X_t > \epsilon\}} dt\right) \circ \theta_{\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right] \tag{4.11}$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right] \mathbb{E}_\epsilon\left[\int_0^{\tau_0^-} e^{-qt} f(X_t) 1_{\{X_t > \epsilon\}} dt\right] \tag{4.12}$$

が成り立つ. i), (2.11) および単調収束定理より,

$$(4.12) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{c}{W^{(q)}(\epsilon)} \int_{\epsilon}^{\infty} f(y) e^{-\Phi(q)y} W^{(q)}(\epsilon) dy \tag{4.13}$$

$$= c \int_0^{\infty} f(y) e^{-\Phi(q)y} dy \tag{4.14}$$

が成り立つ. よって, (4.10) が得られた.

iii) $c = 1$ を示す. (4.1), (4.2) および ii) より, $x < 0$ で $f(x) = 0$ となる非負可測関数 f に対して,

$$\mathbb{E}_0\left[\int_0^{\infty} e^{-qt} f(X_t) dt\right] = \frac{n\left[\int_0^{T_0} e^{-qt} f(X_t) dt\right]}{n[1 - e^{-qT_0}]} \tag{4.15}$$

$$= \Phi'(q) n\left[\int_0^{\tau_0^-} e^{-qt} f(X_t) dt\right] \tag{4.16}$$

$$= \Phi'(q) c \int_0^{\infty} f(y) e^{-\Phi(q)y} dy \tag{4.17}$$

が成り立つ. (2.12) と比べることにより, $c = 1$ であることがわかる. □

定理 4.2 ([4]). $q \geq 0$ と非負可測関数 f に対して, 以下の式が成り立つ:

$$n\left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < T_0\right] = \int f(u, v) K^{(q)}(du\, dv). \tag{4.18}$$

ただし, $K^{(q)}$ は $(-\infty, 0) \times (0, \infty)$ 上の測度で次で与えられる:

$$K^{(q)}(du\, dv) = e^{-\Phi(q)v} \Pi(du - v) dv. \tag{4.19}$$

証明. 単調収束定理と強 Markov 性より,

$$n\left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < T_0\right]$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+}\left(e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) 1_{\{\tau_0^- < T_0\}} 1_{\{X_{\tau_0^- -} > \epsilon\}}\right) \circ \theta_{\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right] \tag{4.20}$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} n\left[e^{-q\tau_\epsilon^+} : \tau_\epsilon^+ < \infty\right] \mathbb{E}_\epsilon\left[e^{-q\tau_0^-} f(X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}) : \tau_0^- < T_0,\ \ X_{\tau_0^- -} > \epsilon\right] \tag{4.21}$$

が成り立つ. 定理 4.1, 定理 3.2 および単調収束定理より,

$$(4.21) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{W^{(q)}(\epsilon)} \int f(u, v) e^{-\Phi(q)v} W^{(q)}(\epsilon) 1_{\{v > \epsilon\}} \Pi(du - v) dv \tag{4.22}$$

$$= \int f(u, v) e^{-\Phi(q)v} \Pi(du - v) dv \tag{4.23}$$

が成り立ち, (4.18) が得られた. □

参考文献

[1] E. Biffis and A. E. Kyprianou. A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes. Insurance Math. Econom. 46 (2010), no. 1, 85–91.

[2] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. Insurance Math. Econom. 21 (1997), no. 2, 129–137.

[3] A. E. Kyprianou. Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Introductory lectures. Second edition. Universitext. Springer, Heidelberg, 2014. xviii+455 pp.

[4] K. Noba and K. Yano Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. arXiv:1608.05359, August 2016.

[5] J. C. Pardo, J. L. Pérez, and V. Rivero. The excursion measure away from zero for spectrally negative Lévy processes. arXiv:1507.05225, July 2015.

[6] J. C. Pardo, J. L. Pérez, and V. Rivero. Lévy insurance risk processes with parisian type severity of debt. arXiv:1507.07255, July 2015.

[7] 野場啓. 屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題. 第 8 回白浜研究集会報告集, to appear.

[8] 野場啓, 矢野孝次. 屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題. 無限分解可能過程に関連する諸問題 (20), 共同研究リポート 352, 118–126, 2016.

[9] 野場啓, 矢野孝次. 一般化屈折 Lévy 過程の屈折複合 Poisson 過程による近似. 第 13 回城崎新人セミナー報告集, 87–91, 2016.