数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 153-160

公理的確率論の立場から見たゲーム理論の問題点

河野 敬雄
Norio Kôno

§1 はじめに

von Neumann の協力ゲームの理論 (1928, [16]) にしろ，Nash の非協力ゲームの理論 (1950, [11];1951, [12]) にしろ明示的に公理的確率論の文献はあげてはいないが彼らのゲーム理論の根幹である混合戦略の概念や期待利得の概念を定式化するためには確率分布の概念が必要不可欠である．従来の標準的ゲーム理論においては学術論文から入門書に至るまで確率現象を表現するために確率分布の概念しか用いていない．しかしながら，確率現象をより深く認識・理解するためにはそれでは不十分である．何故ならば，複数の確率分布どうしの関連，つまり全体としての確率構造が厳密には定式化されていないからである．スローガン的に述べると，

スローガン：非協力ゲーム理論は確率変数 [1] を用いて表現，定式化すべきである．

§2 確率変数を用いたゲームの定式化

上記のスローガンに従って，ゲーム理論の教科書 (例えば岡田 2011, [13]) には大抵取り上げられている以下の3つのケースについて説明する．

(i) 標準形ゲーム（同時手番ゲームのこと）の場合．

各プレイヤーの戦略を独立確率変数で表現することは容易であるが（河野 2003, [6] でそのように定式化した），自明すぎて御利益がない．従ってゲーム理論家は受け入れようとしない（分布で表現する方が手っ取り早いしそれで十分だと思っているようだ）．

(ii) Aumann(1974, [1]; 1987, [2]) の correlated equilibrium（相関均衡）について．

河野 (2011 [9]) で正面切って確率変数の御利益を強調して，Aumann の結果を確率変数を用いて定式化したのであるが，得られた結果が微妙に Aumann のそれとは異なるためにこれもゲーム理論家には受け入れられていないようだ．ちなみに，Aumann の確率概念は Savage(1954, [14]) の"The Foundation of Statistics" に依拠しているので Kolmogorov 流の公理的確率論とは単純に比較検討できない．

(iii) 繰返しゲームの場合（河野 2003, [6]).

1回限りの同時手番ゲームで混合戦略（確率的に選択肢を選ぶ）とは何を意味するのか，についてはゲーム理論家の中でもいろいろ議論されている．その点，繰返しゲームはより数学的に厳密に確率過程として定式化する必要に迫られる．

---

[1] ここでいう確率変数は適当な抽象確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義されている，と考える．このような公理的確率論をゲーム理論家はなかなか受け入れてくれないようだ．

(i) 最初に，Nashの非協力ゲーム理論における最も基本的なプレイヤーが2人の有限標準形ゲーム（双行列ゲーム）を用いて説明する．

2人のプレイヤーAとBがそれぞれ選択肢の集合（有限集合，以下純戦略空間と呼ぶ）S_A, S_Bを持っているとする．S_A, S_Bの各要素はそれぞれプレイヤーA, Bの**純戦略**と呼ばれるが，数学的定式化においては特に明示しない限り**混合戦略**の特別な場合と考える．プレイヤーAの混合戦略とはS_A上の確率分布$\{p^A\} \equiv \{p_i^A\}_{i \in S_A}$, i.e. $p_i^A \geq 0; i \in S_A$かつ$\sum_{i \in S_A} p_i^A = 1$に他ならない[2]．$p_i^A = 1$のとき，かつその時に限りプレイヤー$A$の（純）戦略は$i$である，という．混合戦略$\{p_i^A\}_{i \in S_A}$を$\vec{p}^A = (p_1^A, p_2^A, \cdots)$と書いて確率ベクトルと呼ぶこともあるがよい表現ではない．ベクトルは線形代数の概念であって確率分布とは直接関係ないからである．同様に$\{p^B\} \equiv \{p_i^B\}_{i \in S_B}$をプレイヤー$B$のひとつの混合戦略とする．次に，各プレイヤーの期待利得を定義する[3]．そのためには，最初に効用関数（pay-off function）を定義する必要がある．

定義 1. $S_A \times S_B$上で定義された実数値関数を（このゲームの）効用関数という．

定義 2. プレイヤーAの効用関数をf_A, プレイヤーBのそれをf_Bとする．プレイヤーAの戦略を$\{p^A\}$, プレイヤーBの戦略を$\{p^B\}$としたときの プレイヤーAの期待利得$u_A(\{p^A\}, \{p^B\})$とプレイヤーBの期待利得$u_B(\{p^A\}, \{p^B\})$は次式で与えられる．

$$(1)\ u_A(\{p^A\}, \{p^B\}) \equiv \sum_{i \in S_A} \sum_{j \in S_B} f_A(i,j) p_i^A p_j^B, \quad (2)\ u_B(\{p^A\}, \{p^B\}) \equiv \sum_{i \in S_A} \sum_{j \in S_B} f_B(i,j) p_i^A p_j^B.$$

これらの定義式を眺めていると$\{f_A\}$を行列だと思い$\{p^A\}, \{p^B\}$をそれぞれ数ベクトルだとみなすと(1)式は線形代数でよく知られているように内積$(f_A \vec{p}^A, \vec{p}^B)$と表現できる．実際そのような記法を採用している教科書も見受けられるが正しい理解だとは思われない．その理由は，内積と確率概念を含む期待利得とは無関係だからである．さらに重要なことは，定義2の表記にしろ，内積表記にしろ2人のプレイヤーの確率事象としての混合戦略どうしの関係性が明示的には表されていないことである．その関係性とは2人のプレイヤーの混合戦略は確率論の概念である独立性である．これらの確率構造を明示的に表現するために以下に確率変数を導入して定義2を書き換え，独立性の条件を緩めることによってAumann(1974, [1]; 1987, [2])が定義したcorrelated equilibriumの概念[4]が公理的確率論の枠内で明確に定義されてAumannの結果と同様の定理が得られる．詳しくは河野(2011, [9])の§4を参照されたい．

まず，定義2を確率変数を用いて再定義する．その前に確認しておくことは，プレイヤーの1つの混合戦略とは純戦略の集合に値を取る確率変数のことである．ここでいう

[2]1回限りしかプレイしない標準形ゲームにおいて，いくつかの純戦略を正の確率で選択する混合戦略とは具体的に何を意味するのか，この問いに答えようとすると「確率とは何か」というより難しい問題に行き着くのでここでは議論しない．

[3]本稿で採用する定義はvon Neumann-Morgenstern(1953=2009, [17])のそれである．公理的に定義されている．

[4]日本語の解説としては岡田(2011, [13])191頁の5.5節「相関均衡点」を参照されたい．

確率変数が定義されるために抽象確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を予め一つ選んで固定しておく [5]. つまり，プレイヤー A の (B の)1 つの混合戦略には 1 つの S_A- 値 (S_B- 値) 確率変数が対応し，その確率分布（以下単に分布という）が等しい二つの確率変数は同一の戦略であるとみなす，ということである．以上のような抽象確率空間をひとつ固定した上で S_A- 値 (S_B- 値) 確率変数の全体を $\mathcal{R}(S_A)(\mathcal{R}(S_B))$ で表す．このとき，プレイヤー A が戦略 $X \in \mathcal{R}(S_A)$, プレイヤー B が戦略 $Y \in \mathcal{R}(S_B)$ を選んだときのプレイヤー A,B の期待利得 $u_A(X,Y)$,$u_B(X,Y)$ はそれぞれ次式で与えられる．

定義 2 と同値な定義

(1) $u_A(X,Y) = E[f_A(X,Y)]$, (2) $u_B(X,Y) = E[f_B(X,Y)]$. $(\star)$ ただし，X, Y は独立

ここで注意することは一見余計な条件 $(\star)$ が付いているようにみえるがこれは定義 2 で暗黙の内に仮定されていた確率構造を明示しただけなのである．従って，この段階までのゲーム理論を学習するのであればことさら抽象確率空間を理解する必要はなく（御利益がない！），大学初年級の数理統計学で用いる分布の概念で十分理解できるし，現に殆どのゲーム理論家はこのレベルであると思われる．

(ii) Aumann が導入した二つの相関均衡の概念はどうであろうか．Aumann(1974, [1]; 1987,[2]) が同値だと主張する二つの correlated equilibrium の概念 (endogenous correlated equilibrium と exogenous equilibrium) の違いは独立な二つの確率変数にどのような従属性を表現した確率構造を定義するかについて公理的確率論を用いて数学的に厳密に定義できる．河野 (2011, [9]) の定式化では両者は異なる概念であるが，Aumann の定式化では両者は同値らしい (岡田 [13], 195 頁 定理 5.3)．いずれにしろ各自で検討して頂きたい．ただ，注意すべきことは Aumann にしろ岡田にしろ依拠している確率論は公理的なそれではなく，Savage(1954, [14]) のそれである．しかし，Aumann のゲーム理論への影響力は強いらしく，ハーグリーブズ・ヒープとヤニス・ファロファキスの本 (1995=1998, [4], 35 頁) には，

> 確率評価を純粋に主観的なものと見なすことによって実際にゲーム理論はますますサベッジ (1954) に依存するようになってきている．しかし，このようなゲーム理論の (「なんでもありうる」といった) 空虚な命題への変質は，道具主義的合理性の仮定に共有知識としての合理性の仮定を付け加えることによって防ぐことができると期待されている．共有知識としての合理性の仮定は，他の人の行動についての人々の主観的確信に対していくつかの制約を加えている．

とあるから，公理的確率論の立場に立っている通常の確率論研究者がゲーム理論の文献を読むときはくれぐれも注意してほしい．実際，van Damme(1991, [15]) の *Stability and*

[5] ここでいう抽象確率空間はなんでもよいわけではなく，中身が十分「リッチ」でなくてはならない．しかし，すべてのプレイヤーの混合戦略全体の確率構造が表現できれば十分なので一意に定まるわけではない．このあたりがどうもゲーム理論家には受け入れがたいようだ．くどいようだがここでいう確率空間は公理的確率論のそれであって，Savage 流 ([14]) の “the states of the World” ではない．

Perfection of Nash Equilibria. Second Revised ad Enlarged Edition. の巻末にある 17 頁に及ぶ文献表には確率論関係の論文ないし教科書としては Savage(1954, [14]) しか挙げてない．

(iii) 繰返しゲームの場合，確率変数列で表現してみると単に従来の標準的教科書に書いてある種々の概念や定理が数学的に厳密に表現できかつ厳密に証明できるだけではなく，数学的に未解決な問題が多々あることが見えてくる．以下，最もよく研究されている「繰返し囚人のジレンマゲーム」を用いてその一端を説明する．

♣ **囚人のジレンマ**: 次のような 2×2 の 2 人標準形ゲームを考える [6]．

プレイヤー B

プレイヤー A		C	D
	C	(b,b)	(d,a)
	D	(a,d)	(c,c)

つまり，$S_A = S_B = \{C, D\} \equiv S$ である．また各プレイヤーの効用関数は

$$f_A(C,C)=a,\ f_A(C,D)=d,\ f_A(D,C)=a,\ f_A(D,D)=c,\ f_B(i,j)=f_A(j,i)\,;\ i,j\in S$$

である．

囚人のジレンマゲームの仮定 [7]：

(仮定 1) $a > b > c > d$, (仮定 2) $2b > a + d$.

注意 1. 仮定 1 から直ちにわかるように，このゲームではどちらのプレイヤーから見ても純戦略 D が支配戦略である，つまり相手の如何なる戦略に対しても戦略 C よりも戦略 D の方が高い利得が得られるから，自明に唯一のナッシュ均衡戦略は両プレイヤーともに純戦略 D を選択することである．数学的立場からはこれほどつまらないゲームはない．理論的にはチキンゲームの場合（$a > b > d > c$ を仮定する）方がよほど面白い．チキンゲームの場合は 2 つの純戦略の組からなるナッシュ均衡戦略 (D,C) と (C,D) の他に 1 つの混合戦略の組からなるナッシュ均衡が存在する．囚人のジレンマゲームが注目され始めた理由は実際にこのゲームを人々にやらせてみる実験データで，合理的な選択であると思われる支配戦略の D を選ぶ人がむしろ少ない，という実証データの存在である．また，社会学において，公共財の費用負担におけるフリーライダー（ただ乗り）のように個人利益を優先させると費用を負担しなくて他人の負担で出来た公共財を利用

[6] 純戦略の記号は慣用として C と D が用いられている．それぞれ Cooperate と Defect の頭文字である．利得についても a,b,c,d の代わりにそれぞれ意味のある単語の頭文字 T,R,P,S が用いられているが T,P,S はここでは他の意味で用いているので変更した．

[7] 1 回限りのゲーム（以下ワンショットゲームという）の囚人のジレンマゲームの場合は仮定 (1) しか仮定しないことが多い．しかし，繰返し囚人のジレンマゲームの場合は必ず仮定 2 も仮定する．C と D を互いに交互に繰返し，その利得を 2 人で山分けすると (C,C) で得られる利得より大きくなる場合を避けるためである．

する方が得である．そのような状況を囚人のジレンマゲームで定式化した上で，社会的秩序 ((C, C) と表現される) は何故持続可能かを問ういわゆるホッブス問題の定式化に囚人のジレンマゲームが利用されているからである (c.f..『秩序問題と社会的ジレンマ』盛山和夫, 海野道郎編. – ハーベスト社, 1991.).

さて，ここからいよいよ繰返し囚人のジレンマゲームの定式化を行う．繰返しゲームとは，ワンショットの同時手番ゲームを繰返し行うことであるが，ここで大事なことは「戦略」とは何か，という定義の問題である．直感的には n 回目のワンショットゲームにおける各プレイヤーの戦略は $n-1$ 回までの両者の戦略に依存してよい．ということである．例としては，TFT(tit for tat, しっぺ返し，オウム返し) 戦略，トリガー戦略等が有名である．TFT 戦略とは初回は C で，次回の戦略は前回相手が C なら C,D なら D を選択するという戦略である．トリガー戦略とは TFT 戦略より厳しくて一旦相手が D を選んだら以後は未来永劫に D を選択する，という戦略である．

さて，繰返しゲームとその戦略を確率変数列で表現してみよう．n 回目のワンショットゲームにおけるプレイヤー A の戦略を X_n, プレイヤー B のそれを Y_n, $Z_n \equiv (X_n, Y_n)$ とする．従来のゲーム理論における無限回繰返しゲームを確率論的に定式化するためにはランダム停止時間 T(stopping time，自然数に値を取る確率変数) を導入する必要がある．これらの概念を用いて無限回繰返しゲームを定式化するためには次のような仮定が必要である．

(a-1) 確率変数 T の分布の台は無限集合である．

(a-2) プレイヤー A, B は n 回目の戦略 X_n, Y_n, $n = 1, 2, \ldots$ をそれぞれ独立に決定する．つまり，n 回目のゲームは数学的に 1 回限りのワンショットゲームと同値でなければならない．

(a-3) 1 つのプレイとは 2 人のプレイヤーが戦略 $Z_n = (X_n, Y_n)$ に従って，$n = 1, 2, \ldots, T$ 回プレイすることである．プレイヤー A の戦略とは確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$, プレイヤー B のそれは同じく $\{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ のことである．

この時，プレイヤー A の期待利得（プレイヤー B についても同様）は

$$u_A(\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}) = E[\sum_{n=1}^{T} f_A(X_n, Y_n)]$$

で与えられる．この式を確率論の公式で変形すると，

$$u_A(\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}) = E[\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k} f_A(X_n, Y_n); T = k] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[f_A(X_n, Y_n); T \geq n].$$

ここで上記の式が有限値に収束することを保証するために次の仮定をおく．

(a-4) $E[T] < +\infty$.

ここで，従来の標準的ゲーム理論の定式化と一致させるためには次のことを仮定しなければならない．

(a-5) $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ と T は独立．ここで，T が幾何分布 $P(T=k)=(1-\delta)\delta^{k-1}$ を持つと仮定すると，従来の標準的ゲーム理論で知られた割引率 δ を持つ繰返しゲームの期待利得

$$u_A(\{X_n\}_{n=1}^{+\infty},\{Y_n\}_{n=1}^{+\infty})=\sum_{n=1}^{+\infty}u_A(X_n,Y_n)\delta^{n-1}$$

と一致する．従来の標準的ゲーム理論では「割引率」なる（恐らく経済学から借りてきた）概念をアプリオリに用いるために何故「割引率」を用いなければならないのかが理解できない．さらに，彼らは本当にゲームが無限回繰り返されるような説明をするが，公理的確率論の定式化では stopping time T（確率変数）の実現値 $T(\omega)<+\infty\,;\omega\in\Omega$ までの有限回しかプレイしていないという認識上の大きな違いが生じていることに注意されたい．

ここで強調すべきことは,「割引率」という理解をしないで stopping time と理解することによって幾何分布とは限らない広いクラスの分布に対しても繰返しゲームが定義できるということである．

次に，繰返しゲームにおける「戦略」とは何か，を数学的に厳密に定義しなくてはならない．従来の標準的ゲーム理論の定義はあいまいで直感的すぎるのではないだろうか．もう一度記号を確認する．

$(\star)$ $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P)=n$ 回目のワンショットゲームの戦略 $Z_n=(X_n,Y_n)$ が定義されている抽象確率空間．

$(\star)$ $\Omega^{(\infty)}\equiv\Pi_{k=1}^{\infty}\Omega_k$, $\mathcal{F}^{(n)}\equiv\vee_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$, $\mathcal{F}^{(\infty)}\equiv\vee_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_k$，抽象確率空間 $(\Omega^{(\infty)},\mathcal{F}^{(\infty)},P)$ を用意しておく．

仮定の続き．

このゲームの戦略セットである確率変数の無限列 $Z_n=(X_n,Y_n)\,;\,n=1,2,\cdots$ は次の条件を満たさなければならない．

(a-6) $Z_n=(X_n,Y_n)$ は $\mathcal{F}^{(n)}-$ 可測 $(n=1,2,\ldots)$.

(a-7) X_1 と Y_1 は独立．$n=2,3,\ldots$ に対して X_n と Y_n は $\mathcal{F}^{(n-1)}$ に関して条件付き独立，すなわち，

$$P(X_n=i,Y_n=j/\mathcal{F}^{(n-1)})=P(X_n=i/\mathcal{F}^{(n-1)})P(Y_n=j/\mathcal{F}^{(n-1)})\,;\,i,j\in S.$$

以上の定式化の下でナッシュ均衡を定義する．

定義 3. 戦略セット $\{Z_n^*\}_{n=1}^{+\infty}=(\{X_n^*\}_{n=1}^{+\infty},\{Y_n^*\}_{n=1}^{+\infty})$ がナッシュ均衡であるとは次の 2 つの条件 (1),(2) が成り立つときをいう．

(1) $\forall\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ such that $\forall n$, (X_n,Y_n^*) satisfy (a-6) and (a-7);

$$u_A(\{X_n^*\}_{n=1}^{+\infty},\{Y_n^*\}_{n=1}^{+\infty})\geq u_A(\{X_n\}_{n=1}^{+\infty},\{Y_n^*\}_{n=1}^{+\infty}),$$

(2) $\forall \{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ such that $\forall n$, (X_n^*, Y_n) satisfy (a-6) and (a-7);

$$u_B(\{X_n^*\}_{n=1}^{+\infty}, \{Y_n^*\}_{n=1}^{+\infty}) \geq u_B(\{X_n^*\}_{n=1}^{+\infty}, \{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}).$$

前述のTFT戦略やトリガー戦略が条件(a-6),(a-7)を満たしていることは容易にチェックできる．またδが十分1に近いとき[8]，TFTもトリガー戦略もナッシュ均衡であることが知られている．

以上のように公理的確率論の立場から繰返し囚人のジレンマゲームを定式化してみると自然に次のような疑問がわく．

(1) TFT戦略とトリガー戦略が割引率δを持つ繰返し囚人のジレンマゲームにおけるナッシュ均衡であることの従来のゲーム理論における証明は公理的確率論の立場から見て本当に厳密な証明とみなせるか？

(2) 割引率をstopping timeと理解した場合，TFT戦略やトリガー戦略がナッシュ均衡となるTの分布は幾何分布以外に存在するか？

注意 2. (1)について，TFT戦略については河野(2003, [6])の定理8.2として厳密な証明を試みた．(2)についてはトリガー戦略の場合，幾何分布以外に一定の条件を満たすstopping timeについてトリガー戦略がナッシュ均衡となる場合があることを証明した（同定理8.1）．ただ，TFT戦略については幾何分布の場合以外にナッシュ均衡となる場合があるかどうかは未解明である．さらに，stopping timeが戦略と独立ではない場合については今のところ全く成果が得られていない．社会学の方でそれらしきモデルを立てた議論は行われているがきちんとした定式化はなされていないように思われる．

Remark. 最後に一言．本稿ではゲーム理論のなかで専ら非協力ゲーム理論と言われている分野について述べたが，世間一般にゲーム理論と言えば通常，ノイマン・モルゲンシュテルン([1944]1953, [17])の本から始まるとされる．ところが，河野(2017, [10])でも縷々論じているように彼らのゲーム理論はナッシュ(1950, [11];1951, [12])の創設した非協力ゲーム理論とは別のゲーム理論であると理解すべきである．彼らの協力ゲーム理論は数学理論としては最近の河邊淳氏(2016, [5])の論説にあるように非線形測度理論との関係が深いと思われる．特に河邊氏の論説にも引用してあるが，Aumann-Shapley.(1974, [3])は先駆的成果であると思われる（ゲーム理論としては用いられている数学が難しく連続濃度のプレイヤー集合に意味があるのか等の批判があるらしい）．その他，協力ゲームの一つの解概念として知られているシャープレイ値をマルコフ連鎖で定式化した高須清澄氏の一連の研究(1985–2001, 商大論集，神戸商科大学)があることを指摘しておきたい．以上

[8]TFT戦略の時は$1 > \delta > \max\{(a-b)/(a-c), (a-b)/(b-d)\}$，トリガー戦略の時は$1 > \delta > (a-b)/(a-c)$．TFT戦略の場合は仮定(2)が効いている．

参考文献

[1] Aumann, R. J. (1974) “Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies.” *Journal of Mathematical Economics* 1: 67–96.

[2] .... (1987) “Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality.” *Econometrica* 55(1): 1–18.

[3] Aumann, R. J. and L. S. Shapley.(1974) *Values of Non-Atomic Games.* Princeton Univ. Press.

[4] Heap, S.P.H. and Y. Varoufakis. (1995) Game Theory: A Critical Introduction, 『ゲーム理論：批判的入門』(1998) 荻沼隆訳多賀出版.

[5] 河邊淳 (2016) 非加法的測度と非線形積分『数学』68 巻 3 号,266–292.

[6] 河野 敬雄 (2003)『ゲーム理論アラカルト—確率論の立場から—』*Rokko Lectures in Mathematics*, **13** 神戸大学.(Web 上で公開されている)

[7] ——— (2008) “Noncooperative Game in Cooperation: Reformulation of Correlated Equilibria.” *The Kyoto Economic Review* **77(2)**, 107–125.

[8] ———(2009) “Noncooperative Game in Cooperation: Reformulation of Correlated Equilibria (II).” *The Kyoto Economic Review* **78(1)**, 1–18.

[9] ———.(2011)『ゲーム理論アラカルト（続）—確率論の立場から—』*Rokko Lectures in Mathematics*, **21** 神戸大学.(Web 上で公開されている)

[10] ———(2017)『ゲーム理論の数学的基礎-批判的再検討-』*Rokko Lectures in Mathematics*, 神戸大学.(Web 上で公開予定)

[11] Nash, J. F.: (1950) “Equilibrium Points in n-Person Games.” *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.* **36**, 48–49.

[12] ——— (1951) “Non-cooperative Games.” *Annals of Mathematics* **54**(1951), 286–295.

[13] 岡田 章.(2011)『ゲーム理論（新版)』有斐閣.

[14] Savage, L. J.(1954) *The Foundation of Statistics.* John Wiley and Sons.

[15] van Damme, E. (1991) *Stability and Perfection of Nash Equilibria. Second Revised ad Enlarged Edition.* Springer-Verlag.

[16] von Neumann, J.(1928) “Zur Theories der Gesellschaftsspiele.” *Mathematische Annalen,* **100**, 295–320. English translation by S. Bergmann in R.D.Luce and A.W.Tucker, eds., *Contributions to the Theory of Games, IV* (Princeton University Press, 1959), 13–42.

[17] von Neumann, J. and O. Morgenstern.([1944]1953) *Theory of Games and Economic Behavior, 3rd ed.* (Princeton University Press.). 阿部修一, 橋本和美訳『ゲームの理論と経済行動』I, II, III. (筑摩書房, 2009. ちくま学芸文庫).

1-18-20, Hieidaira Ootsu-Shi Japan 520-0016

E-mail: address: kono.norio.58x@st.kyoto-u.ac.jp