

# 臨界的なシュレディンガー形式における 基本解のエルゴード型定理

東北大学大学院理学研究科 和田正樹 (Masaki Wada)

Mathematical Institute, Tohoku University

2016年12月22日発表

## 1 問題の背景

$M = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \{\mathbb{P}_x\}, \{X_t\})$  を生成作用素  $\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2}$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ) とする  $\mathbb{R}^d$  上の過渡的な対称  $\alpha$ -安定過程とする。このとき、ディリクレ形式は  $\mathcal{E}(u, u) = (-\mathcal{L}u, u)_m$  として、推移確率密度関数  $p(t, x, y)$  は方程式  $\partial u / \partial t = \mathcal{L}u$  の基本解として与えられる。ここで、 $m$  は  $\mathbb{R}^d$  上のルベグ測度、 $(\cdot, \cdot)_m$  は  $L^2(\mathbb{R}^d)$  における内積を表す。更に、グリーン核  $G(x, y) = \int_0^\infty p(t, x, y) dt$  により、非負測度  $\mu$  が満たすべき条件を次のように与える。

定義 1.1. (i)  $\mu$  が加藤クラスに属す ( $\mu \in \mathcal{K}$ ) とは、以下の式が成立することである。

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq a} G(x, y) \mu(dy) = 0$$

(ii)  $\mu$  がグリーン緊密である ( $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ ) とは、 $\mu \in \mathcal{K}$  かつ、以下の式が成立することである。

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| \geq R} G(x, y) \mu(dy) = 0 \tag{1.1}$$

(iii)  $\mu$  が0次有限エネルギー積分をもつ ( $\mu \in \mathcal{K}_\infty^0$ ) とは、 $\mu \in \mathcal{K}_\infty$  かつ、以下の式が成立することである。

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} G(x, y) \mu(dy) \mu(dx) < \infty.$$

このとき、シュレディンガー形式を  $\mathcal{E}^\mu(u, u) = \mathcal{E}(u, u) - \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x) \mu(dx)$  で定め、対応する作用素を  $\mathcal{L}^\mu$  とする。方程式  $\partial u / \partial t = \mathcal{L}^\mu u$  にも基本解  $p^\mu(t, x, y)$  が存在することが知られており ([1])、ここでは  $p^\mu(t, x, y)$  の挙動が  $p(t, x, y)$  のそれと比べてどうか考えたい。直感

的には、 $\mu$ が「十分小さい」ときには似たような振る舞いをすることが予想される。その小ささを表す上で、Mの、 $\mu$ とルヴューズ対応する正值連続加法的汎関数 $A_t^\mu$ による時間変更の確率過程における底スペクトル

$$\lambda(\mu) := \inf \left\{ \mathcal{E}(u, u) \mid u \in \mathcal{F}, \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x) \mu(dx) \equiv (u, u)_\mu = 1 \right\}$$

を定める。この値が大きいほど $\mu$ は小さく、以下のように3種類に分類できる。

**定義 1.2.** (1)  $\mu$ が劣臨界的とは、 $\lambda(\mu) > 1$ を満たすことである。

(2)  $\mu$ が臨界的とは、 $\lambda(\mu) = 1$ を満たすことである。

(3)  $\mu$ が優臨界的とは、 $\lambda(\mu) < 1$ を満たすことである。

[5]や[8]では、 $\mu \in \mathcal{K}_\infty^0$ の条件下で $p^\mu(t, x, y)$ が $p(t, x, y)$ と類似している(基本解の安定性という)ための必要十分条件が $\mu$ の劣臨界性であることを示している。つまり $\mu$ が劣臨界的であることは、 $p^\mu(t, x, y)$ が以下の式を満たすことと同値である。

$$c_1 \left( t^{-\frac{\alpha}{2}} \wedge \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}} \right) \leq p^\mu(t, x, y) \leq c_2 \left( t^{-\frac{\alpha}{2}} \wedge \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}} \right) \quad (0 < \alpha < 2)$$

$$c_1 t^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{c_2|x-y|^2}{t}\right) \leq p^\mu(t, x, y) \leq c_3 t^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{c_4|x-y|^2}{t}\right) \quad (\alpha = 2)$$

これを示すうえで、次の補題がカギになる。

**補題 1.3.** ([4, Theorem 2.2]) 次の3条件は互いに同値である。

(i)  $\mu$ は劣臨界的である。

(ii)  $\mu$ はゲージャブルである。すなわち  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x \left[ e^{A_\infty^\mu} \right] < \infty$

(iii)  $G^\mu(x, y) := \int_0^\infty p^\mu(t, x, y) dt < \infty \quad (x \neq y)$

劣臨界性が必要であることは、基本解の安定性とMの過渡性から(iii)が成立することから示された。十分であることを示すには、まず(ii)より $h(x) = \mathbb{E}_x \left[ e^{A_\infty^\mu} \right]$ がシュレディンガー作用素 $\mathcal{L}^\mu$ における調和関数であり、適切な正定数 $c_0$ により $1 \leq h(x) \leq c_0$ を満たすことに注意する。ここで、シュレディンガー形式にドゥーブの $h$ -変換を施して得られるディリクレ形式が $L^2(h^2 \cdot m)$ 上に与えられる。このディリクレ形式に対応するマルコフ過程は、Chenと熊谷の意味での $\alpha$ -安定型過程や一樣楕円性をもつ拡散型過程と見なせること、しかも推移確率密度関数として $p^\mu(t, x, y)/h(x)h(y)$ をもつことから十分性が示された。

以上のことから、 $\mu$ が臨界的もしくは優臨界的ならば、 $p^\mu(t, x, y)$ は $p(t, x, y)$ とは異なる挙動をもつことがわかる。特に、 $\mu$ が臨界的なときには、調和関数 $h(x)$ を定めドゥーブ変換を行える点は劣臨界的なときと同様であるが、 $h(x) \asymp 1 \wedge |x|^{\alpha-d}$ であり(Mの過渡性より $\alpha < d$ だから)、 $|x| \rightarrow \infty$ で減衰している。それ故、変換後の確率過程は、これまでに

熱核評価が与えられているものと大きく異なり、 $p^\mu(t, x, y)$  の具体評価は興味深い問題である。現在のところ、 $M$  が3次元のブラウン運動ならば、Grigor'yan により [2] で具体評価が与えられているが、この手法を適用するためには多くの条件が必要なので、その他の場合に応用するのは容易ではない。

## 2 先行結果と主結果

$p^\mu(t, x, y)$  そのものの代わりに、補題 1.3 の (i) と (ii) における同値性に着目し、 $p^\mu(t, x, y)$  の空間積分 (ファインマン・カツツ型期待値)  $\mathbb{E}_x [e^{A_t^\mu}] = \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t, x, y) dy$  の  $t \rightarrow \infty$  とした際の発散の様子について、以下の先行結果がある。

**定理 2.1.** ([7, Theorem 1.1], [9, Theorem 4.7]) 臨界的な測度  $\mu \in \mathcal{K}_\infty^0$  に対して、以下の漸近挙動が成立する。

$$\mathbb{E}_x [e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha} - 1)\pi)}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{\alpha}) \langle \mu, h_0 \rangle} h_0(x) t^{\frac{d}{\alpha}-1}, \quad (1 < d/\alpha < 2) \quad (2.1)$$

$$\mathbb{E}_x [e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle} h_0(x) \frac{t}{\log t}, \quad (d/\alpha = 2) \quad (2.2)$$

$$\mathbb{E}_x [e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\langle \mu, h_0 \rangle}{(h_0, h_0)_m} h_0(x) t, \quad (d/\alpha > 2) \quad (2.3)$$

ここで  $h_0(x)$  はシュレディンガー作用素  $\mathcal{L}^\mu$  の基底状態であり、第 1 節に登場した調和関数  $h(x)$  そのものである。また、 $\langle \mu, h_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} h_0(x) \mu(dx)$  である。

これに対して、本論の主結果は  $p^\mu(t, x, y)$  の時間積分  $\int_0^t p^\mu(s, x, y) ds$  の  $t \rightarrow \infty$  における増大度を扱っており以下の通りである。

**定理 2.2.** ([10, Theorem 1.1])  $\mu \in \mathcal{K}_\infty^0$  は臨界的で  $h_0(x)$  は定理 2.1 の通りとする。このとき基本解  $p^\mu(t, x, y)$  の時間積分は  $x \neq y$  の条件下で、次のような漸近挙動をもつ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{d}{\alpha}-1}} \int_0^t p^\mu(s, x, y) ds = \frac{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha} - 1)\pi)}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{\alpha})} \cdot \frac{h_0(x) h_0(y)}{\langle \mu, h_0 \rangle^2}, \quad (1 < d/\alpha < 2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t / \log t} \int_0^t p^\mu(s, x, y) ds = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}}} \cdot \frac{h_0(x) h_0(y)}{\langle \mu, h_0 \rangle^2}, \quad (d/\alpha = 2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p^\mu(s, x, y) ds = \frac{h_0(x) h_0(y)}{(h_0, h_0)_m}, \quad (d/\alpha > 2)$$

一般に  $p^\mu(t, x, y)/h_0(x)h_0(y)$  は、ドゥーブの  $h_0$ -変換によるマルコフ過程の推移確率密度関数を表す。それ故、定理 2.2 にある式の両辺を  $h_0(x)h_0(y)$  で割ることにより、変換後のマルコフ過程におけるエルゴード型定理が得られる。特に  $d/\alpha > 2$  の場合は変換後のマル

コフ過程が正再帰的であるからエルゴード定理そのものである。他方、 $d/\alpha \leq 2$  の場合は変換後のマルコフ過程が零再帰的である。Pinchover [3, Theorem 1.2] では零再帰的な拡散過程について、推移確率密度関数の長時間平均が消えることを示しているが、定理 2.2 では  $t$  よりも小さいオーダーをもつ関数で「平均」をとっているため、非自明な結果が得られている。

### 3 定理 2.2 の証明の概略

#### 3.1 証明の戦略

まずは、定理 2.1 を得る際に登場した以下の式に注意する。

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] = 1 + \int_0^t p_s^\mu(x) ds, \quad p_s^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(s, x, z) \mu(dz)$$

ここではタウバー型の定理を用いることを含みに入れながら、レゾルベント  $G_\beta^\mu(x)$  の  $\beta \rightarrow 0$  における振る舞いを計算した。定理 2.2 については、その代わりに  $\mu$  とは異なる測度  $\nu \in \mathcal{K}_\infty^0$  とした際の  $G_\beta^\nu(x)$  の振る舞いを調べ、特に  $\epsilon > 0$  と  $y \in \mathbb{R}^d$  を固定して  $\nu(dz) = p^\mu(\epsilon, z, y) m(dz)$  とすることで得られる。

#### 3.2 時間変更の確率過程及びコンパクト作用素の設定

$\beta \geq 0$  に対して、 $\mathbb{M}^\beta = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x^\beta)$  を  $\mathbb{M}$  の  $\beta$ -消滅過程とする。つまり、マルコフ過程の生存時間を  $\zeta$  とすると  $\mathbb{P}_x^\beta(\Lambda; t < \zeta) = e^{-\beta t} \mathbb{P}_x(\Lambda)$  が  $\Lambda \in \mathcal{F}_t$  に対して成り立つとする。このとき、対応するディリクレ形式は  $\mathcal{E}_\beta(u, u) = \mathcal{E}(u, u) + \beta(u, u)_m$  で与えられる。更に、 $\mathbb{M}^\beta$  を  $A_t^\mu$  で時間変更した確率過程  $\check{\mathbb{M}}^{\beta, \mu}$  を、以下のように定める。

$$\check{\mathbb{M}}^{\beta, \mu} = (\{X_{\tau_t}\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x^\beta), \quad \tau_t = \inf\{s > 0 \mid A_s^\mu > t\}$$

このとき  $A_t^\mu$  の台  $Y$  を

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{P}_x(T > 0) = 0\}, \quad T = \inf\{t > 0 \mid A_t^\mu > 0\}$$

と定め、 $\mathcal{F}_e^\beta$  を  $(\mathcal{E}_\beta, \mathcal{F})$  の拡大ディリクレ空間とすると、 $\check{\mathbb{M}}^{\beta, \mu}$  に対応するディリクレ形式が  $L^2(Y, \mu)$  上に以下のように構成される。

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{F}}^\beta &= \{\psi \in L^2(Y, \mu) \mid \exists u \in \mathcal{F}_e^\beta, Y \text{ 上 } \psi = u \text{ } \mu\text{-a.e.}\} \\ \check{\mathcal{E}}^\beta(\psi, \psi) &= \mathcal{E}_\beta(H_Y u, H_Y u), \quad H_Y u(x) = \mathbb{E}_x^\beta[u(X_{\sigma_Y})] \end{aligned}$$

ここで、 $\sigma_Y$  は  $Y$  への到達時刻である。このとき、 $\mathcal{F}_e^\beta$  と  $\check{\mathcal{F}}^\beta$  は制限写像  $r$  と拡張写像  $e$  を用いて、以下のように同一視可能である。

- $\mathbb{R}^d$  上の関数  $u \in \mathcal{F}_e^\beta$  を  $Y$  に制限した  $r(u) = u|_Y$  は  $\check{\mathcal{F}}^\beta$  に属す。

- 逆に、 $Y$  上の関数  $\psi \in \check{F}^\beta$  に対して、 $\check{F}^\beta$  の定義式で登場した  $u$  により  $\mathbb{R}^d$  上の関数  $e(\psi) = H_Y u$  と定めると、これは  $Y$  上では  $\psi$  に等しく、 $\mathcal{F}_e^\beta$  に属す。

$\mathbb{M}^{\beta, \mu}$  のグリーン作用素は  $L^2(Y, \mu)$  上で

$$\mathcal{G}_\beta f(x) = \int_Y G_\beta(x, y) f(y) \mu(dy)$$

により定められるが、 $\mathcal{G}_\beta f \in \check{F}^\beta$  であること、 $\mathcal{F}_e^\beta$  が  $L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$  にコンパクトに埋め込まれる ([6, Theorem 3.4]) のと同様に  $\check{F}^\beta$  が  $L^2(Y, \mu)$  にコンパクトに埋め込まれることから、作用素  $\mathcal{G}_\beta$  はコンパクトであるとわかる。作用素  $\mathcal{G}_\beta$  の最大固有値を  $\gamma_\beta$ 、対応する固有関数で  $L^2(Y, \mu)$  ノルムが 1 に等しいものを  $h_\beta$  とする。更に  $Y$  上の関数  $h_\beta$  の拡張  $e(h_\beta)$  は

$$e(h_\beta)(x) = \frac{1}{\gamma_\beta} \int_{\mathbb{R}^d} G_\beta(x, y) h_\beta(y) \mu(dy)$$

と積分を用いて書き表される。しかも

$$\frac{1}{\gamma_\beta} = \inf\{\mathcal{E}_\beta(u, u) \mid u \in \mathcal{F}_e^\beta, (u, u)_\mu = 1\} = \mathcal{E}_\beta(e(h_\beta), e(h_\beta))$$

を満たしており、以下  $e(h_\beta)$  も  $h_\beta$  と表記することにする。特に  $1/\gamma_0$  は第 1 節における  $\lambda(\mu)$  そのものであり、コンパクト作用素  $\mathcal{G}_\beta$  における摂動理論 (レゾルベント  $G_\beta(x, y)$  やそれに類する関数の漸近展開がベースにある。詳しくは [7, 9] を参照のこと) から次が得られる。

**補題 3.1.**  $h_\beta$  は  $h_0$  に  $\mathcal{E}$ -弱収束及び  $L^2(\mu)$ -強収束し、 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \gamma_\beta = \gamma_0 = 1$  である。後者、 $\gamma_\beta$  の収束についてはより正確には次の挙動を満たす。

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1 - \gamma_\beta}{\beta^{d/\alpha - 1}} &= \frac{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle^2}{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha} - 1)\pi)}, & (1 < d/\alpha < 2) \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1 - \gamma_\beta}{\beta \log \beta^{-1}} &= \frac{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle^2}{\Gamma(\alpha + 1)}, & (d/\alpha = 2) \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1 - \gamma_\beta}{\beta} &= (h_0, h_0)_m, & (d/\alpha > 2) \end{aligned}$$

### 3.3 レゾルベント方程式から主定理を得る

$\nu \in K_\infty^0$  に対して、レゾルベント  $G_\beta^\mu \nu$  と元のマルコフ過程のレゾルベントとの間に、以下の関係式が成立することが、マルコフ性や加法汎関数の性質からわかる。

$$G_\beta(G_\beta^\mu \nu) \mu(x) = G_\beta^\mu \nu(x) - G_\beta \nu(x) \quad (3.1)$$

この式は  $x \in \mathbb{R}^d$  に対して成立するが、 $x \in Y$  にのみ制限するとコンパクト作用素  $\mathcal{G}_\beta$  の最大固有空間への射影とその剰余部分への分解として、次の式が得られる。

$$r(G_\beta^\mu \nu) = (1 - \mathcal{G}_\beta)^{-1}(r(G_\beta \nu)) = (1 - \gamma_\beta)^{-1}(G_\beta \nu, h_\beta)_\mu h_\beta + R_\beta \quad (3.2)$$

(3.2) を再び  $\mathbb{R}^d$  の関数へと拡張するとき、 $e(r(G_\beta^\mu \nu)) = G_\beta^\mu \nu$  とは限らないことに注意すべきだが、適切な補正を加えることにより  $G_\beta^\mu \nu$  の満たすべき式が次のように得られる。

$$G_\beta^\mu \nu = (1 - \gamma_\beta)^{-1} (G_\beta \nu, h_\beta)_\mu h_\beta + e(R_\beta) + \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\sigma_y} e^{-\beta s} dA_s^\nu \right] \quad (3.3)$$

ここで、(3.3) の右辺第1項以外をまとめて  $\tilde{R}_\beta$  とすると

$$\tilde{R}_\beta \in \mathcal{F}_e, \quad \sup_{0 \leq \beta \leq 1} \mathcal{E}(\tilde{R}_\beta, \tilde{R}_\beta) \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^d} G\nu(x) \nu(dx) < \infty \quad (3.4)$$

であることもわかる。補題 3.1 及び (3.3)、(3.4) に注意すると  $\mathcal{E}$ -弱収束の意味で次が成立する。

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{\frac{d}{\alpha}-1} G_\beta^\mu \nu(x) = \frac{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi) \langle \nu, h_0 \rangle}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle^2} h_0(x), \quad (1 < d/\alpha < 2) \quad (3.5)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \log \beta^{-1} G_\beta^\mu \nu(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1) \langle \nu, h_0 \rangle}{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle^2} h_0(x), \quad (d/\alpha = 2) \quad (3.6)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta G_\beta^\mu \nu(x) = \frac{\langle \nu, h_0 \rangle}{(h_0, h_0)_m} h_0(x), \quad (d/\alpha > 2) \quad (3.7)$$

更に、任意の  $\epsilon > 0$  と  $x \in \mathbb{R}^d$  を固定したとき  $p^\mu(\epsilon, x, y) m(dy) =: g(y) m(dy)$  が  $\mathcal{K}_\infty$  に属するので、[6, Theorem 3.4] より  $\mathcal{E}$ -弱収束から  $L^2(g \cdot m)$ -強収束が導ける。特に  $L^2(g \cdot m)$ -弱収束も正しく  $1 \in L^2(g \cdot m)$  であるから、(3.5)–(3.7) から次が得られる。

**補題 3.2.**  $x \in \mathbb{R}^d$  の各点において、以下の式が成立する。

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{\frac{d}{\alpha}-1} G_\beta^\mu p_\epsilon^\mu \nu(x) = \frac{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi) \langle \nu, h_0 \rangle}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle^2} h_0(x), \quad (1 < d/\alpha < 2)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \log \beta^{-1} G_\beta^\mu p_\epsilon^\mu \nu(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1) \langle \nu, h_0 \rangle}{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \langle \mu, h_0 \rangle^2} h_0(x), \quad (d/\alpha = 2)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta G_\beta^\mu p_\epsilon^\mu \nu(x) = \frac{\langle \nu, h_0 \rangle}{(h_0, h_0)_m} h_0(x), \quad (d/\alpha > 2)$$

$G_\beta^\mu p_\epsilon^\mu \nu(x) = \int_0^\infty e^{-\beta t} p_{t+\epsilon}^\mu \nu(x) dt$  にタウバー型の定理を適用すると、 $\int_0^t p_{s+\epsilon}^\mu \nu(x) ds$  及び  $\int_0^t p_s^\mu \nu(x) ds$  の  $t \rightarrow \infty$  での増大度がわかる。ここで、 $\nu(dz) = p^\mu(\epsilon, z, y) m(dz)$  とすると、 $\int_0^t p^\mu(s+\epsilon, x, y) ds$  の増大度が得られ、 $x \neq y$  の下では定理 2.2 が得られる。

## 4 今後の展望

ここで紹介した結果は  $\int_0^t p^\mu(s, x, y) ds$  の挙動について述べたものであるが、 $p^\mu(t, x, y)$  自体の時間無限大での振る舞い、特に  $d/\alpha \leq 2$  で  $h_0$ -変換したマルコフ過程が零再帰的のと

きの減衰について解析を進めており、現在仕上げに入っている。具体的な結果は、シンポジウム発表の際に直感として述べた通り、定理 2.2 で「平均」をとった際に用いた関数を微分したものに等しく  $x \neq y$  の条件も外せると見込まれる。解決のための方法は、当シンポジウム開催中に小谷眞一先生から頂いたアドバイスに基づいている。小谷先生には厚く御礼申し上げたい。最後に  $p^\mu(t, x, y)$  自体の具体的な評価式を得るにあたって現時点で考えうる間接的・直接的な手段を以下に列挙する。

- (1)  $|x - y|$  が大きいときの  $p^\mu(t, x, y)$  の振る舞いを考察する。
- (2) 現在進めている解析に基づく、 $h_0$ -変換後のマルコフ過程が零再帰的な場合の内、 $1 < d/\alpha < 2$  では推移確率密度関数  $p^\mu(t, x, y)/h_0(x)h_0(y)$  が  $t^{\frac{d}{\alpha}-2}$  で減衰する。ユークリッド空間において、距離は通常通り、測度のみ  $h_0^2(x)$  で重みを付けて球の体積を考えると、球の中心に依存して球の半径を十分大きくとれば  $(2\alpha - d)$  乗で増大する。このことから、「 $(2\alpha - d)$  次元空間における  $\alpha$ -安定型過程」に結び付けて解析を試みる。
- (3)  $M$  が対称  $\alpha$ -安定過程のときには、変換後のマルコフ過程に対応するディリクレ形式は、 $A_{d,\alpha}$  を適切な正定数として、 $L^2(h_0^2 \cdot m)$  上に以下の式で与えられる。

$$\mathcal{E}^{\mu, h_0}(u, u) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (u(y) - u(x))^2 \frac{A_{d,\alpha} h_0(x) h_0(y)}{|x - y|^{d+\alpha}} dx dy$$

飛躍測度  $A_{d,\alpha} h_0(x) h_0(y) / |x - y|^{d+\alpha}$  は、飛躍の距離  $|x - y|$  のみに依存しているわけではないが、原点において球対称である。平行移動不変性はないが、1点のみに球対称な状態空間でのマルコフ過程の熱核評価の問題として取り扱う。

## 参考文献

- [1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.-M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, In Random partial differential equations (Oberwolfach, 1989), Birkhäuser, Inter. Ser. Num. Math. 102, 1–31, (1991).
- [2] Grigor'yan, A.: Heat kernels on weighted manifolds and applications, Contemp. Math. 338, 93–191, (2006).
- [3] Pinchover, Y.: Large time behavior of the heat kernel and the behavior of the Green function near criticality for non-symmetric elliptic operators, J. Funct. Anal. 104, 54–70, (1992).
- [4] Takeda, M.: Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric  $\alpha$ -stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 2729–2738, (2006).
- [5] Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39, 85–94, (2007).

- [6] Takeda, M., Tsuchida, K.: Differentiability of spectral functions for symmetric  $\alpha$ -stable processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* 359, 4031–4054, (2007).
- [7] Takeda, M and Wada, M.: Large time asymptotics of Feynman-Kac functionals for symmetric stable processes, *Math. Nachr.* 289, No.16, 2069–2082, (2016).
- [8] Wada, M.: Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions, *Tohoku Math. Journal* 66, 523–537, (2014).
- [9] Wada, M.: Feynman-Kac penalization problem for critical measures of symmetric  $\alpha$ -stable processes, *Elect. Comm. in Probab.* 21, no.79, 1–14, (2016).
- [10] Wada, M.: Ergodic type limit theorem for fundamental solutions of Schrödinger operators, preprint.