数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 177-184

縮小されたブラウン媒質中の拡散過程

慶應義塾大学・医学部　鈴木 由紀
Yuki Suzuki
Keio University School of Medicine

1　モデルと結果

本稿では, $\mathbb{R}$ 上の縮小されたブラウン媒質の中を動く拡散過程の挙動について考察する. 扱う媒質は数直線の正側と負側で縮小のされ具合が異なるものである.

$\mathbb{W}$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 w で $w(0)=0$ を満たすもの全体とし, P を $\mathbb{W}$ 上のウィーナー 測度とする. Ω を $[0,\infty)$ 上で定義された連続関数全体とし, $\omega\in\Omega$ に対し $X(t)=X(t,\omega)=\omega(t)$ とおく. $w\in\mathbb{W}$, $x_0\in\mathbb{R}$ に対し, Ω 上の確率測度 $P_w^{x_0}$ を $\{X(t),t\geq 0,P_w^{x_0}\}$ が x_0 から出発する生成作用素

$$\mathcal{L}_w=\frac{1}{2}e^{w(x)}\frac{d}{dx}\left(e^{-w(x)}\frac{d}{dx}\right)$$

をもつ拡散過程となるものとして定義する. $0<c_1<1/4$, $c_2\geq 1/4$ とし, $w\in\mathbb{W}$ と $\lambda>0$ に対し, $w_\lambda\in\mathbb{W}$ を

$$w_\lambda(x)=\begin{cases}\lambda e^{-c_1\lambda}w(x) & x\leq 0,\\ \lambda e^{-c_2\lambda}w(x) & x>0,\end{cases}$$

により定義する. さらに, $\mathbb{W}\times\Omega$ 上の確率測度 $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}$ を

$$\mathcal{P}_\lambda^{x_0}(dwd\omega)=P(dw)P_{w_\lambda}^{x_0}(d\omega)$$

により定義する. $\lambda>0$, $x_0\in\mathbb{R}$ に対し $\{X(t),t\geq 0,\mathcal{P}_\lambda^{x_0}\}$ は確率空間 $(\mathbb{W}\times\Omega,\mathcal{P}_\lambda^{x_0})$ 上で定義された過程とみなされる. 本稿では, $\{X(t),t\geq 0,\mathcal{P}_\lambda^{0}\}$ の時刻 $t=e^\lambda$ での挙動 $(\lambda\to\infty)$ について考察する.

ランダム媒質中の拡散過程の研究については, Brox([1]) と Schumacher([6]) がブラウン媒質中の拡散過程は媒質がランダムでない場合のものに比べて動きが遅くなるということを示している. 彼らの結果は, Kawazu-Tamura-Tanaka([4],[5]) により, (漸近的に) 自己相似な媒質の場合に拡張されている. 一方, [3], [2] では, 数直線の負側にのみブラウン媒質があり正側には何も媒質はない場合に, その中を動く拡散過程 (片側ブラウンポテンシャルをもつ拡散過程とよぶ) の挙動について考察し, $\{X(t),t\geq 0\}$ を片側ブラウンポテンシャルをもつ拡散過程とするとき, $X(t)$ は確率 1/2 で拡散的であり, 残りの確率 1/2 で劣拡散的であることを示している. また, [7] では, 数直線の正側と負側に指数の異なる 2 つの自己相似過程を媒質にとった場合に, [4],[5] の結果を拡張している. さらに, [9] では, 数直線の正側と負側に指数の異

なる2つの縮小された自己相似過程を媒質にとった場合に，その中を動く拡散過程の挙動について考察し，その過程は従来のモデル ([1], [4], [5], [7]) とは異なる性質をもつことを示している．（[8] において導入されたモデルについても，[9] のモデルと似た性質をもつことが示されている．）本稿のモデルは $0 < c_i < 1/4, i = 1, 2,$ の場合には，[9] により導入されたモデルに対応づけられ，その挙動は [9] において考察されている．

さて，我々の結果を述べるために記号を用意する．$\widetilde{c_i} = 2c_i, i = 1, 2,$ とおき，$w \in \mathbb{W}$, $\lambda > 0$ に対し $\tau_\lambda w \in \mathbb{W}$ を

$$(\tau_\lambda w)(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} w(e^{\widetilde{c_1}\lambda} x) & x \leq 0, \\ \lambda^{-1} e^{(c_2 - 1/4)\lambda} w(e^{(1/2)\lambda} x) & x > 0, \end{cases}$$

により定義する．すると，$\lambda > 0$ に対して

$$\{\tau_\lambda w_\lambda, P\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{w, P\} \tag{1.1}$$

が成り立つ．$w \in \mathbb{W}, \rho \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sigma(\rho) = \sigma(\rho, w) = \sup\{x < 0 : w(x) = \rho\}$$

と定義し，

$$\mathbb{A} = \{w \in \mathbb{W} : \sigma(1/2 - \widetilde{c_1}) > \sigma(\widetilde{c_1} - 1/2)\},\ \mathbb{B} = \{w \in \mathbb{W} : \sigma(1/2 - \widetilde{c_1}) < \sigma(\widetilde{c_1} - 1/2)\}$$

とおく．さらに $\lambda > 0$ に対し，

$$\mathbb{A}_\lambda = \{w \in \mathbb{W} : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{A}\}, \quad \mathbb{B}_\lambda = \{w \in \mathbb{W} : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{B}\}$$

とおくと，(1.1) より $P\{\mathbb{A}_\lambda\} = P\{\mathbb{A}\} = 1/2$, $P\{\mathbb{B}_\lambda\} = P\{\mathbb{B}\} = 1/2$ が成り立つ．以下，$P\{\cdot|\cdot\}$ は条件つき確率を表す．

定理 1.1 任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下が成立する．

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\{\mathbb{E}_{1,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{A}_\lambda\} = 1.$$

ここで，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{1,\lambda,\varepsilon} &= \{w \in \mathbb{W} : p_{1,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\}, \\ p_{1,\lambda,\varepsilon}(w) &= P^0_{w_\lambda}\{e^{(1/2-\varepsilon)\lambda} < X(e^\lambda) < \varepsilon e^{\widetilde{c_2}\lambda}\}. \end{aligned}$$

次に，$w \in \mathbb{B}$ に対し

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta(w) = \sup\{x < 0 : w(x) - \min_{x \leq y \leq 0} w(y) = 1 - 2\widetilde{c_1}\}, \\ V &= V(w) = \min_{\zeta \leq x \leq 0} w(x), \end{aligned}$$

とおき，$b = b(w) \in (\zeta, 0)$ を $w(b) = V$ により定義する．$\mathbb{W}$ の部分集合 $\mathbb{W}_0$ で $P\{\mathbb{W}_0\} = 1$ を満たすものが存在して，任意の $w \in \mathbb{B} \cap \mathbb{W}_0$ に対し，$b(w)$ はただ1つに定まる．

定理 1.2 任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\{\mathbb{E}_{2,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\} = 1.$$

ここで,

$$\mathbb{E}_{2,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W} : p_{2,\lambda,\varepsilon}(w) > 1-\varepsilon\},$$
$$p_{2,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{|e^{-\widetilde{c}_1\lambda}X(e^\lambda) - b(\tau_\lambda w_\lambda)| < \varepsilon\}.$$

さらに, $\omega \in \Omega$ に対し $\underline{X}(t) = \underline{X}(t,\omega) = \min_{0\le s\le t} X(s,\omega)$, $\overline{X}(t) = \overline{X}(t,\omega) = \max_{0\le s\le t} X(s,\omega)$ とおき, $\{X(t), t\ge 0, \mathcal{P}^0_\lambda\}$ の最小値過程 $\{\underline{X}(t), t\ge 0, \mathcal{P}^0_\lambda\}$ と最大値過程 $\{\overline{X}(t), t\ge 0, \mathcal{P}^0_\lambda\}$ の $t = e^\lambda$ での挙動 $(\lambda\to\infty)$ について考察する. $w \in \mathbb{B}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\zeta(\gamma) = \zeta(\gamma, w) = \sup\{x < 0 : w(x) - \min_{x\le y\le 0} w(y) = 1 - 2\widetilde{c}_1 + \gamma\}$$

とおく. ここでは $|\gamma|$ が十分に小さいときの $\zeta(\gamma)$ に興味がある. $\zeta(0) = \zeta$ である.

定理 1.3 任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下の (i)-(ii) が成立する.

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} P\{\mathbb{E}_{3,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\} = 1.$

(ii) $\lim_{\lambda\to\infty} P\{\mathbb{E}_{4,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\} = 1.$

ここで,

$$\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W} : p_{i,\lambda,\varepsilon}(w) > 1-\varepsilon\}, \quad i = 3, 4,$$
$$p_{3,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{\sigma(1/2 - \widetilde{c}_1 + \varepsilon, \tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\widetilde{c}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda) < \sigma(1/2 - \widetilde{c}_1 - \varepsilon, \tau_\lambda w_\lambda)\},$$
$$p_{4,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{\zeta(\varepsilon, \tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\widetilde{c}_1\lambda}\underline{X}(e^\lambda) < \zeta(-\varepsilon(\lambda), \tau_\lambda w_\lambda)\},$$

$\varepsilon(\lambda) > 0, \lambda > 0$, は $\lim_{\lambda\to\infty}\varepsilon(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varepsilon(\lambda) = \infty$, を満たす任意の関数である.

また, $w \in \mathbb{B}$ に対し,

$$H = H(w) = \max_{\zeta\le x\le 0} w(x)$$

とおく. $0 < H(w) < 1/2 - \widetilde{c}_1$ であることに注意する.

定理 1.4 任意の $\varepsilon > 0$ と $M > 0$ に対して以下の (i)-(ii) が成立する.

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} P\{\mathbb{E}_{5,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\} = 1.$

(ii) $\lim_{\lambda\to\infty} P\{\mathbb{E}_{6,\lambda,\varepsilon,M}|\mathbb{B}_\lambda\} = 1.$

ここで,

$$\mathbb{E}_{5,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W} : p_{5,\lambda,\varepsilon}(w) > 1-\varepsilon\},$$
$$\mathbb{E}_{6,\lambda,\varepsilon,M} = \{w \in \mathbb{W} : p_{6,\lambda,\varepsilon,M}(w) > 1-\varepsilon\},$$
$$p_{5,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\{e^{(1/2-\varepsilon)\lambda} < \overline{X}(e^\lambda) < \varepsilon e^{\widetilde{c}_2\lambda}\},$$
$$p_{6,\lambda,\varepsilon,M}(w) = P^0_{w_\lambda}\{f_{1,\lambda,\varepsilon,M}(\tau_\lambda w_\lambda) < \overline{X}(e^\lambda) < f_{2,\lambda,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda)\},$$
$$f_{1,\lambda,\varepsilon,M}(w) = Me^{\lambda\widetilde{c}_1} \vee e^{\lambda(H(w)+\widetilde{c}_1-\varepsilon)},$$
$$f_{2,\lambda,\varepsilon}(w) = e^{\lambda(H(w)+\widetilde{c}_1+\varepsilon)} \wedge \varepsilon e^{(1/2)\lambda}.$$

定理 1.1, 1.2, 1.4 の証明より以下の系が得られる.

系 1.5 任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下の (i)-(ii) が成立する.
(i) $\lim_{\lambda\to\infty} P\{\mathbb{E}_{7,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{A}_\lambda\} = 1.$
(ii) $\lim_{\lambda\to\infty} P\{\mathbb{E}_{8,\lambda,\varepsilon}|\mathbb{B}_\lambda\} = 1.$
ここで,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W} : p_{i,\lambda,\varepsilon}(w) > 1-\varepsilon\},\ i = 7, 8,\\
&p_{7,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\Big\{e^{-\lambda}\int_0^{e^\lambda} \mathbf{1}_{(e^{(1/2-\varepsilon)\lambda},\varepsilon e^{\widetilde{c}_2\lambda})}(X(t))dt > 1-\varepsilon\Big\},\\
&p_{8,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{w_\lambda}\Big\{e^{-\lambda}\int_0^{e^\lambda} \mathbf{1}_{(b(\tau_\lambda w_\lambda)-\varepsilon,\, b(\tau_\lambda w_\lambda)+\varepsilon)}(e^{-\widetilde{c}_1\lambda}X(t))dt > 1-\varepsilon\Big\}.
\end{aligned}$$

定理 1.1, 1.4 (i) より, 本稿のモデルは, [9] により考察された $0 < c_2 < 1/4$ の場合に対応するモデルとは異なる挙動を示すことがわかる. 特に $c_2 = 1/4$ の場合は, 媒質がランダムでない場合のものに比べて少しだけ動きが遅くなることがあることがわかる. これは [2], [3] による片側ブラウンポテンシャルをもつ拡散過程の挙動に関する結果とも異なるものである. 定理 1.2, 1.3, 1.4 (ii) は, [2], [3] による片側ブラウンポテンシャルをもつ拡散過程の挙動に関する結果に対応するものである.

2 定理の証明の概略

この節では第 1 節で述べた定理の証明の概略について述べる. $w \in \mathbb{W}$ と $\lambda > 0$ に対し, $H_\lambda w \in \mathbb{W}$ を

$$(H_\lambda w)(x) = \begin{cases} \lambda w(x) & x \le 0,\\ \lambda e^{(1/4-c_2)\lambda} w(e^{(\widetilde{c}_1-1/2)\lambda}x) & x > 0,\end{cases}$$

により定義し, 拡散過程 $\{X(t), t \ge 0, P^{x_0}_{H_\lambda w}\}$ を考える.

$$(H_\lambda(\tau_\lambda w_\lambda))(x) = w_\lambda(e^{\widetilde{c}_1\lambda}x), \quad x \in \mathbb{R},$$

が成立することから, 次の補題が得られる ([1],[5]).

補題 2.1 任意の $w \in \mathbb{W}$ と $\lambda > 0$ に対して以下が成立する.

$$\{X(t), t \ge 0, P^0_{H_\lambda(\tau_\lambda w_\lambda)}\} \overset{\mathrm{d}}{=} \{e^{-\widetilde{c}_1\lambda}X(e^{2\widetilde{c}_1\lambda}t), t \ge 0, P^0_{w_\lambda}\}.$$

はじめに第 1 節で述べた定理を証明するのに必要となる $\{X(t), t \ge 0, P^0_{H_\lambda w}\}$ の挙動に関する命題をいくつか述べる. 次の命題は定理 1.1 の証明に用いられる.

命題 2.2 $\mathbb{W}$ の部分集合 $\mathbb{W}_0$ で $P\{\mathbb{W}_0\} = 1$ を満たすものが存在して, 任意の $w \in \mathbb{A} \cap \mathbb{W}_0$ と $\varepsilon > 0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{H_\lambda w}\{X(e^{\lambda(1-2\widetilde{c}_1)}) > e^{(1/2-\widetilde{c}_1-\varepsilon)\lambda}\} = 1.$$

一方, 次の命題は定理 1.2 の証明に用いられる.

命題 2.3 $\mathbb{W}$ の部分集合 $\mathbb{W}_0$ で $P\{\mathbb{W}_0\} = 1$ を満たすものが存在して, 任意の $w \in \mathbb{B} \cap \mathbb{W}_0$ と $\varepsilon > 0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{H_\lambda w}\{|X(e^{\lambda(1-2\widetilde{c}_1)}) - b(w)| < \varepsilon\} = 1.$$

定理 1.3 の証明には次の命題 2.4 が用いられる.

命題 2.4 $\mathbb{W}$ の部分集合 $\mathbb{W}_0$ で $P\{\mathbb{W}_0\} = 1$ を満たすものが存在して, 以下の (i)-(ii) が成立する.
(i) 任意の $w \in \mathbb{A} \cap \mathbb{W}_0$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{H_\lambda w}\{\sigma(1/2 - \widetilde{c}_1 + \varepsilon) < \underline{X}(e^{\lambda(1-2\widetilde{c}_1)}) < \sigma(1/2 - \widetilde{c}_1 - \varepsilon)\} = 1.$$

(ii) 任意の $w \in \mathbb{B} \cap \mathbb{W}_0$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{H_\lambda w}\{\zeta(\varepsilon) < \underline{X}(e^{\lambda(1-2\widetilde{c}_1)}) < \zeta(-\varepsilon(\lambda))\} = 1.$$

ここで, $\varepsilon(\lambda) > 0, \lambda > 0,$ は $\lim_{\lambda\to\infty} \varepsilon(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\varepsilon(\lambda) = \infty$, を満たす任意の関数である.

$c_2 = 1/4$ のとき定理 1.4 (i) を示すために以下の命題 2.5 を用いる. この命題は定理 1.1 の証明にも用いられる. $c_2 > 1/4$ のときに定理 1.4 (i) を示すには $\{X(t), t \geq 0, P^{x_0}_{H_\lambda w}\}$ とは異なる拡散過程を導入する必要がある. $c_2 > 1/4$ のときの定理 1.4 (i)（定理 1.1）の証明を述べることについては省略する.

命題 2.5 $c_2 = 1/4$ とする. このとき $\mathbb{W}$ の部分集合 $\mathbb{W}_0$ で $P\{\mathbb{W}_0\} = 1$ を満たすものが存在して, 任意の $w \in \mathbb{A} \cap \mathbb{W}_0$ と $\varepsilon > 0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{H_\lambda w}\{\overline{X}(e^{\lambda(1-2\widetilde{c}_1)}) < \varepsilon e^{(1/2-\widetilde{c}_1)\lambda}\} = 1.$$

一方, 定理 1.4 (ii) の証明には次の命題が用いられる.

命題 2.6 $\mathbb{W}$ の部分集合 $\mathbb{W}_0$ で $P\{\mathbb{W}_0\} = 1$ を満たすものが存在して, 任意の $w \in \mathbb{B} \cap \mathbb{W}_0$, $\varepsilon > 0$ と $M > 0$ に対して以下が成立する.

$$\lim_{\lambda\to\infty} P^0_{H_\lambda w}\{M \vee e^{(H-\varepsilon)\lambda} < \overline{X}(e^{\lambda(1-2\widetilde{c}_1)}) < e^{(H+\varepsilon)\lambda} \wedge \varepsilon e^{(1/2-\widetilde{c}_1)\lambda}\} = 1.$$

上記の命題 2.2-2.6 の証明については [10] を参照されたい. 命題 2.2 の証明には [2] によるカップリングの方法を, 命題 2.3 の証明には [5] によるカップリングの方法をそれぞれ用いる.

さて, $c_2 = 1/4$ のときの定理 1.1 の証明について述べる. このとき $\widetilde{c}_2 = 1/2$ である.

定理 1.1 の証明 補題 2.1 より

$$
\begin{aligned}
&p_{1,\lambda,\varepsilon}(w) = \widehat{p}_{1,\lambda,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda), \\
&\widehat{p}_{1,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{H_\lambda w}\{e^{(1/2-\widetilde{c}_1-\varepsilon)\lambda} < X(e^{\lambda(1-2\widetilde{c}_1)}) < \varepsilon e^{(1/2-\widetilde{c}_1)\lambda}\},
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

が成立する.

$$\widehat{\mathbb{E}}_{1,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W} : \widehat{p}_{1,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\}$$

とおくと, (2.1) と (1.1) より

$$P\{\mathbb{E}_{1,\lambda,\varepsilon} \cap \mathbb{A}_\lambda\} = P\{\widehat{\mathbb{E}}_{1,\lambda,\varepsilon} \cap \mathbb{A}\} \tag{2.2}$$

が成り立つことがわかる. 命題 2.2 と命題 2.5 より $c_2 = 1/4$ のとき, $\mathbb{W}$ の部分集合 $\mathbb{W}_0$ で $P\{\mathbb{W}_0\} = 1$ を満たすものが存在して, 任意の $w \in \mathbb{A} \cap \mathbb{W}_0$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{\lambda\to\infty} \widehat{p}_{1,\lambda,\varepsilon}(w) = 1$ が成り立つ. よって (2.2) の右辺は $\lambda \to \infty$ のとき $P\{\mathbb{A}\}$ に収束し, これより定理 1.1 （$c_2 = 1/4$ のとき）が得られる. □

次に, 定理 1.2 の証明について述べる.

定理 1.2 の証明 補題 2.1 より

$$
\begin{aligned}
&p_{2,\lambda,\varepsilon}(w) = \widehat{p}_{2,\lambda,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda), \\
&\widehat{p}_{2,\lambda,\varepsilon}(w) = P^0_{H_\lambda w}\{|X(e^{\lambda(1-2\widetilde{c}_1)}) - b(w)| < \varepsilon\},
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

が成立し, (2.3) と (1.1) より

$$
\begin{aligned}
&P\{\mathbb{E}_{2,\lambda,\varepsilon} \cap \mathbb{B}_\lambda\} = P\{\widehat{\mathbb{E}}_{2,\lambda,\varepsilon} \cap \mathbb{B}\}, \\
&\widehat{\mathbb{E}}_{2,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W} : \widehat{p}_{2,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\},
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

が成り立つことがわかる. 命題 2.3 より $\mathbb{W}$ の部分集合 $\mathbb{W}_0$ で $P\{\mathbb{W}_0\} = 1$ を満たすものが存在して, 任意の $w \in \mathbb{B} \cap \mathbb{W}_0$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{\lambda\to\infty} \widehat{p}_{2,\lambda,\varepsilon}(w) = 1$ が成り立つ. よって (2.4) の右辺は $\lambda \to \infty$ のとき $P\{\mathbb{B}\}$ に収束し, これより定理 1.2 が得られる. □

謝辞 有益なご意見を賜りました田村要造氏に深く感謝いたします.

参考文献

[1] Brox, T., A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium, *Ann. Probab.* **14**(1986), 1206–1218.

[2] Kawazu, K. and Suzuki, Y., Limit theorems for a diffusion process with a one-sided Brownian potential, *Journal of Applied Probability* **43**(2006), 997–1012.

[3] Kawazu, K., Suzuki, Y. and Tanaka, H., A diffusion process with a one-sided Brownian potential, *Tokyo J. Math.* **24**(2001), 211–229.

[4] Kawazu, K., Tamura, Y. and Tanaka, H., One-dimensional diffusions and random walks in random environments, In *Probability Theory and Mathematical Statistics*, eds. S. Watanabe and Yu. V. Prokhorov, Lecture Notes in Math. **1299**(1988), Springer, 170–184.

[5] Kawazu, K., Tamura, Y. and Tanaka, H., Limit theorems for one-dimensional diffusions and random walks in random environments, *Probab. Theory Related Fields* **80**(1989), 501–541.

[6] Schumacher, S., Diffusions with random coefficients, In *Particle Systems, Random Media and Large Deviations*, ed. R. Durrett, Contemp. Math. **41**(1985), American Math. Soc., 351–356.

[7] Suzuki, Y., A diffusion process with a random potential consisting of two self-similar processes with different indices, *Tokyo J. Math.* **31**(2008), 511–532.

[8] Suzuki, Y., A diffusion process with a Brownian potential including a zero potential part, *Tokyo J. Math.* **38**(2015), 249–272.

[9] Suzuki, Y., A diffusion process with a random potential consisting of two contracted self-similar processes, *to appear in Tokyo J. Math.*

[10] Suzuki, Y., A diffusion process with a contracted Brownian potential, *in preparation.*

Keio University School of Medicine,
Hiyoshi, Kouhoku-ku, Yokohama 223-8521, Japan.
慶應義塾大学・医学部　鈴木　由紀