数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 39-59

Radial pairs

拓殖大学・工学部　　織田　寛
Hiroshi Oda
Faculty of Engineering, Takushoku University

概要

Let $G=KAN$ be a real reductive Lie group and $\mathbf{H}$ a graded Hecke algebra defined by the restricted root system of G. The representation theory of G and that of $\mathbf{H}$ resemble very much. For example, the $\mathbf{H}$-counterpart of the Helgason-Fourier transform for $C^{\infty}(G/K)$ is the Opdam-Cherednik transform for $C^{\infty}(A)$. In this report I explain the notion of *radial pair*s which I introduced in [O2] for the sake of precise description of the resemblance mentioned above. We also discuss some functors between the category of G- and $\mathbf{H}$-modules.

1　実簡約 Lie 群と次数 Hecke 環

1.1　実簡約 Lie 群

本稿で扱う Lie 群 G は [KV, Chapter IV, §3] の意味で実簡約であるとする．つまり，その Lie 環 $\mathfrak{g}$ が実簡約であり，G の対合 θ と $\mathfrak{g}$ 上の $\mathrm{Ad}(G)$-不変な非退化対称双線形形式 $B(\cdot,\cdot)$ があって以下を満たしているとする：

(i) $K:=G^{\theta}$ はコンパクト部分群.
(ii) $B(\cdot,\cdot)$ は θ 不変.
(iii) $B(\cdot,\cdot)$ は $\mathfrak{k}:=\mathrm{Lie}(K)$ 上負定値，$\mathfrak{s}:=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\theta X=-X\}$ 上正定値.
(iv) 写像 $K\times\mathfrak{s}\ni(k,X)\mapsto k\exp X\in G$ は微分同相.

連結半単純 Lie 群に対する多くの概念や結果はこのような G に対しても自明に拡張されるが，当然ダメなものもある．例えば，制限ルート系が定める Weyl 群 W' は，Lie 群が定める Weyl 群 W の部分群に過ぎず，一般に両者は一致しない．このようなことが起こらない少し狭い実簡約 Lie 群のクラスに「Harish-Chandra クラス」があるが，我々は敢えて上の定義を採用する．本稿では「動径対（radial pair)」の概念を説明するが，§7 でその有用性を示すために Ciubotaru と Trapa が定義した函手との関係を論じる．彼らの函手が定義で

きる実簡約 Lie 群はいくつかの特殊な系列に属するものに限られるが，その中に $O(p,q)$ がある．$O(p,q)$ には Harish-Chandra クラスに属さないものがあるので，我々は上記のような広いクラスの実簡約 Lie 群を扱う必要がある．

さて，$G=KAN$ を岩澤分解とし，$\tilde{M}$ と M をそれぞれ K における $\mathfrak{a}:=\mathrm{Lie}(A)$ の正規化群と中心化群とする．上記の通り制限ルート系 $\Sigma=\Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ が定める Weyl 群 W' は有限群 $W:=\tilde{M}/M$ の部分群である．Σ^+ を N に対応する正ルート系，$\mathfrak{a}^+=\{H\in\mathfrak{a}\,|\,\alpha(H)>0\ (\forall\alpha\in\Sigma^+)\}$，$W^+=\{w\in W\,|\,w(\mathfrak{a}^+)=\mathfrak{a}^+\}$ とすると $W=W'\rtimes W^+$ が成り立つ．

1.2 次数 Hecke 環

G に対応する次数 Hecke 環 $\mathbf{H}$ を定義しよう．各 $\alpha\in\Sigma$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha$ をそのルート空間とし，

$$\mathbf{m}(\alpha)=\dim\mathfrak{g}_\alpha+2\dim\mathfrak{g}_{2\alpha} \tag{1.1}$$

と置く．$\mathbf{m}:\Sigma\to\mathbb{N}$ はいわゆる重複度関数（W-不変な関数）なので，これから [Lu1, Theorem 6.3] の意味で次数 Hecke 環 $\mathbf{H}'=S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}W'$ が定まるが，この $\mathbf{H}'$ に W^+ の部分を付け加えたものが次に定義する本項の $\mathbf{H}$ である．（$\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ は $\mathfrak{a}$ の複素化，$S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ はその上の対称代数，$\mathbb{C}W'$ は W' の群環を表す．）

命題 1.1. $\mathbb{C}$-線形空間 $\mathbf{H}=S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}W$ に以下を満たす $\mathbb{C}$-代数の構造が一意的に入る：

(i) $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\to\mathbf{H}, f\mapsto f\otimes 1$ と $\mathbb{C}W\to\mathbf{H}, w\mapsto 1\otimes w$ の 2 つの写像は $\mathbb{C}$-代数の準同型．

(ii) 各 $f\in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$，$w\in W$ に対して $(f\otimes 1)\cdot(1\otimes w)=f\otimes w$.

(iii) Π を単純ルートの集合とする．各 $\alpha\in\Pi$，$H\in\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ に対して

$$(1\otimes s_\alpha)\cdot(H\otimes 1)=s_\alpha(H)\otimes s_\alpha-\mathbf{m}(\alpha)\,\alpha(H).$$

ここで，s_α は $\alpha=0$ に関する鏡映（の複素化）．

(iv) 各 $w\in W^+$，$H\in\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ に対して $(1\otimes w)\cdot(H\otimes 1)=w(H)\otimes w$.

これは [BCP] の「extended graded Hecke algebra」とほとんど同じであるが，微妙に異なる（[BCP] における R と違って W^+ には Σ に自明に作用する非自明な要素が存在しうる）．

1.3 G の表現論と $\mathbf{H}$ の表現論の類似性

G の表現論と $\mathbf{H}$ の表現論が似ていること，あるいは直接的に繋がりがあることは多くの人が認識している．

例 1.2 ([Ba]). G の既約な球表現（K-不変ベクトルを持つ表現）は $\mathbf{H}$ の既約な球表現（W-不変ベクトルを持つ表現）と 1 対 1 に対応し，この対応は Hermite 性を保つ．さらに，G がスプリット古典型 Lie 群であれば，この対応はユニタリ性を保つ．

例 1.3 ([CT1]). G は $GL(n,\mathbb{R})$, $U(p,q)$, $O(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$ のいずれかとする．このとき，各組成因子がある球主系列の組成因子となっているような許容 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-加群の圏 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-$\mathsf{Mod}_{\mathrm{sph}}$ から有限次元 $\mathbf{H}$-加群の圏 $\mathbf{H}$-$\mathsf{Mod}_{\mathrm{fd}}$ への函手 F_{CT} が構成される．この函手は既約球表現を既約球表現に写し，例 1.2 と同じ対応を与える．さらに，F_{CT} は Hermite 性とユニタリ性を保つ．(我々は §7 でこれらの結果を大幅に強化する．)

例 1.4 ([Op]). G が連結半単純 Lie 群のとき，Riemann 対称空間 G/K 上のコンパクト台な C_c^∞ 級関数の空間 $C_c^\infty(G/K)$ を既約 G-加群の直積分に分解する Helgason-Fourier 変換 $\mathcal{F}_G$ に瓜二つな理論として，$C^\infty(A)$ を既約 $\mathbf{H}$-加群の直積分に分解する Opdam-Cherednik 変換 $\mathcal{F}_{\mathbf{H}}$ が定義される．

本稿では「動径対」という概念により，上の例との整合性を保つように 2 つの表現論を結び付けていくが，結果として

(i) G の表現論のうち，$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-$\mathsf{Mod}_{\mathrm{sph}}$ の一部分が $\mathbf{H}$-$\mathsf{Mod}_{\mathrm{fd}}$ と対応している

ことが分かる．Harish-Chandra は実簡約 Lie 群の表現論と p 進簡約群の表現論の間の類似性を「Lefschetz 原理」と呼んだが，(i) は Lefschetz 原理の最たる例になっている．というのは，p 進簡約群側には

(ii) 既約な岩堀球表現を組成因子とする許容表現の圏（まさに p 進群版の $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-$\mathsf{Mod}_{\mathrm{sph}}$）とアフィン Hecke 環の有限次元表現の圏の同値性（Borel, Casselman [Bo]），

(iii) アフィン Hecke 環の表現論の次数 Hecke 環の表現論への還元定理（[Lu2] や [BM]）

という対応が確立されているからである[*1]．

G と $\mathbf{H}$ に対する基本的概念の対応を次ページの表にまとめる．表内の w_0 は W' の最長元とする．${}^{t}\cdot$ は，K や W に対する $\cdot^{-1}$ を $\mathfrak{g}$ や $\mathfrak{a}$ にまで拡張したもので，主系列などの表現を定義するときに用いられる．最下段の $\cdot^{\star}$ はいわゆるスター作用素[*2]で，これにより $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-加群や $\mathbf{H}$-加群上の 1 次半形式や Hermite 形式の不変性が定義される．例えば，ユニタリ $\mathbf{H}$-加群 $\mathscr{X}$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ は

$$(hx,y) = (x,h^{\star}y) \qquad x,y\in\mathscr{X}, h\in\mathbf{H}$$

という不変性を持つ．

---

*1 この辺りの話は著者にとって耳学の域を出ない．

*2 本稿では，$\star$ で反線形双対，$*$ で線形双対を表す．記号が似ているので注意してほしい．

G	$\mathbf{H}$
K	W
M	$\{1\}$
$U(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$ (Lie(AN) の複素化普遍包絡環)	$S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$
$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, $Z(G)\cap M$ (後者は G の中心と K との共通部分.)	$S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ ($\mathbf{H}$ の中心)
θ ($G, \mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に対する Cartan 対合)	$\theta_{\mathbf{H}} : \begin{cases} W \ni w \mapsto w \in W \\ \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \ni H \mapsto -w_0 w_0(H) w_0 \in \mathbf{H} \end{cases}$ であるような $\mathbf{H}$ の対合的自己同型
${}^{\mathrm{t}}\cdot : G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ であるような G の反自己同型，あるいは $\mathfrak{g} \ni X \mapsto -X \in \mathfrak{g}$ であるような $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の線形反自己同型	${}^{\mathrm{t}}\cdot : \begin{cases} W \ni w \mapsto w^{-1} \in W \\ \mathfrak{a} \ni H \mapsto -w_0 w_0(H) w_0 \in \mathbf{H} \end{cases}$ であるような $\mathbf{H}$ の線形反自己同型
$\cdot^* : G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ であるような G の反自己同型，あるいは $\mathfrak{g} \ni X \mapsto -X \in \mathfrak{g}$ であるような $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の反線形反自己同型	$\cdot^* : \begin{cases} W \ni w \mapsto w^{-1} \in W \\ \mathfrak{a} \ni H \mapsto -w_0 w_0(H) w_0 \in \mathbf{H} \end{cases}$ であるような $\mathbf{H}$ の反線形反自己同型

2 射影加群と一般化された Harish-Chandra 準同型

2.1 K-タイプ

$\widehat{K}$ で K の既約ユニタリ表現の同値類の集合を表す．$V \in \widehat{K}$ のとき同じ記号 V でこの同値類に属する表現の表現空間も表すこととし，V には内積 $(\cdot,\cdot)_V$ が備わっているとする．$V^M := \{v \in V \,|\, mv = v\ (\forall m \in M)\}$ には W が自然に作用することに注意しよう．$\widehat{K}_M = \{V \in \widehat{K} \,|\, V^M \neq \{0\}\}$ と置く．各 $\alpha \in \Sigma$ に対してルートベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を 1 つ選んで $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = -\alpha^\vee$ となるように規格化しておく（$\alpha^\vee \in \mathfrak{a}$ は α のコルート）．$V \in \widehat{K}_M$ に対し，$V_{\mathbf{1}}^M = \{v \in V \,|\, (X_\alpha + \theta X_\alpha)((X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 + 4)v = 0\}$ とし，$V_{\mathbf{2}}^M$ を V^M における $V_{\mathbf{1}}^M$ の直交補空間とする．これらは $\{X_\alpha\}$ の選び方によらず（[O1] 参照），ともに V^M の部分 W-加群になっている：

$$V^M = V_{\mathbf{1}}^M \oplus V_{\mathbf{2}}^M. \tag{2.1}$$

$V_{\mathbf{1}}^M = V^M$ であるような $V \in \widehat{K}_M$ を single-petaled K-タイプ，$V_{\mathbf{1}}^M \neq \{0\}$ であるような $V \in \widehat{K}_M$ を quasi-single-petaled K-タイプと呼ぶ[*3]．single-petaled K-タイプの例とし

[*3] G が複素のとき $V \in \widehat{K}$ は正則有限次元表現とみなすことができる．この場合 single-petaled な V のウェイトは，0 ウェイトを中心に一重咲き（single-petaled）の花の花弁のように分布する．因みに日本語では

て，自明な K-加群 $\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ や，$(\mathrm{Ad}, \mathfrak{s}_{\mathbb{C}})$ の各既約部分加群がある．single-petaled であれば quasi-single-petaled であるが，quasi-single-petaled K-タイプは高々有限個しかない．各 quasi-single-petaled K-タイプ V の $V_{\mathbf{1}}^{M}$ の部分が G の表現論と $\mathbf{H}$ の表現論の間の糊代のような役目を果たす．

2.2 射影加群

K の有限次元表現 V に対して，$P_G(V) := U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})} V$ は有限生成射影的 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群である．$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群 $\mathscr{Y}$ があるとき Frobenius 相互律より

$$\mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{Y}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), \mathscr{Y})$$

であるが，$V \in \widehat{K}$ のとき左辺は V の重複度空間と呼ばれる．本稿ではこの種の同型による同一視を断りなしに用いる．函手

$$F_G^V : (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)\text{-Mod} \ni \mathscr{Y} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), \mathscr{Y}) \in (\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} P_G(V))^{\mathrm{op}}\text{-Mod}$$

は，$P_G(V)$ が必ずしも生成対象ではない（つまり，$\mathscr{Y} \neq \{0\} \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), \mathscr{Y}) \neq \{0\}$ が成り立たない）点を除いては，「環の森田同値」を与える函手と同様のものであり，例えば次の性質を持つ：

定理 2.1. F_G^V は既約 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群を $\{0\}$ または既約 $(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} P_G(V))^{\mathrm{op}}$-加群に写す．この対応は

$\{V$ のいずれかの既約部分加群と同じ K-タイプを含む既約 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群 $\}$

$\leftrightarrow \{$ 既約 $(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} P_G(V))^{\mathrm{op}}$-加群 $\}$

という 1 対 1 対応を導く．

V が $U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$-加群として既約であるときは自然に

$$(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} P_G(V))^{\mathrm{op}} \simeq U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K \,/\, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K \cap U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \,\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})} V \tag{2.2}$$

なので，この場合定理は [HC]，[LM] などによる有名な結果に一致する．(2.2) 以外は純粋に環論的議論だけで導かれることが興味深い．

§7 で考察する Ciubotaru-Trapa 函手も，この函手をもとに構成される．

すべての K-タイプが $\widehat{K}_M$ に属するような $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群の圏を $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-$\mathrm{Mod}_M$ と表す．「動径対」は，$\mathcal{M}_G \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-$\mathrm{Mod}_M$ と $\mathcal{M}_{\mathbf{H}} \in \mathbf{H}$-Mod の対 $(\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ で，特別な性質

「一重咲き」の反対語は「八重咲き」であるが，英語だと「double-petaled」になる．もし $V_{\mathbf{2}}^{M}$ を $V_{\mathbf{8}}^{M}$ と書いたら外国人は驚いてしまうだろう．

を持つものであるが，その性質を記述するのに $P_G(V)$ $(V \in \widehat{K}_M)$ が使われる．ところが，$P_G(V)$ は必ずしも $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)\text{-Mod}_M$ に属さず[*4]，時として $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)\text{-Mod}_M$ に属するように修正した

$$(2.3) \qquad \overset{\circ}{P}_G(V) := P_G(V) \Big/ \sum_{E \in \widehat{K} \setminus \widehat{K}_M} U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})(P_G(V)|_K \text{ の } E \text{ に対する等質成分})$$

が必要になる．これは $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)\text{-Mod}_M$ の射影的対象で，任意の $\mathscr{Y} \in (\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)\text{-Mod}_M$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K}(P_G(V), \mathscr{Y}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K}(\overset{\circ}{P}_G(V), \mathscr{Y})$$

となる．

W の有限次元表現 U に対して，$P_\mathbf{H} := \mathbf{H} \otimes_{\mathbb{C}W} U$ は有限生成射影的 $\mathbf{H}$ 加群である．$\mathbf{H}$-加群 $\mathscr{X}$ があるとき Frobenius 相互律より

$$\mathrm{Hom}_W(U, \mathscr{X}) \simeq \mathrm{Hom}_\mathbf{H}(P_\mathbf{H}(U), \mathscr{X})$$

である．函手

$$F_\mathbf{H}^U : \mathbf{H}\text{-Mod} \ni \mathscr{X} \mapsto \mathrm{Hom}_\mathbf{H}(P_\mathbf{H}(U), \mathscr{X}) \in (\mathrm{End}_\mathbf{H}\, P_\mathbf{H}(U))^{\mathrm{op}}\text{-Mod}$$

も定理 2.1 と同様の性質を持つが，特に U が左 W-加群として $\mathbb{C}W$ と同型であるときは，自然に $P_\mathbf{H}(U) \simeq \mathbf{H}$，$(\mathrm{End}_\mathbf{H}\, P_\mathbf{H}(U))^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{H}$ なので，この函手は恒等函手と自然同値になる．この事実も Ciubotaru-Trapa 函手を構成する際に必要になる．

2.3 Harish-Chandra 準同型の一般化

$(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$-加群 $\mathscr{Y}$ に対して，その 0 次 $\mathfrak{n}_\mathbb{C}$-ホモロジー $\mathscr{Y}/\mathfrak{n}_\mathbb{C}\mathscr{Y}$ は $(\mathfrak{m}_\mathbb{C} + \mathfrak{a}_\mathbb{C}, M)$-加群であるから，$(\mathscr{Y}/\mathfrak{n}_\mathbb{C}\mathscr{Y})^M$ は $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$-加群である．この $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ の作用を $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$ だけずらして得られる $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$-加群を $\Gamma(\mathscr{Y})$ とする．つまり，$H \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$ の $\Gamma(\mathscr{Y})$ への作用は $(\mathscr{Y}/\mathfrak{n}_\mathbb{C}\mathscr{Y})^M$ への $H - \rho(H)$ の通常の作用であるとする．以上より函手 $\Gamma : (\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)\text{-Mod} \to \mathfrak{a}_\mathbb{C}\text{-Mod}$ が得られた．自然な全写像 $\gamma_\mathscr{Y} : \mathscr{Y} \to \Gamma(\mathscr{Y})$ があるが，射 $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K}(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$ に対して $\Gamma(\Psi)$ は条件 $\Gamma(\Psi) \circ \gamma_\mathscr{Y} = \gamma_\mathscr{Z} \circ \Psi$ により特徴付けられる．

命題 2.2. K の有限次元表現 V に対して自然に $\Gamma(P_G(V)) \simeq P_\mathbf{H}(V^M)$．但し，$P_\mathbf{H}(V)$ は W の作用を忘れて $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$-加群と見ている．全写像 $\gamma_{P_G(V)} : P_G(V) \to P_\mathbf{H}(V^M)$ は

$$P_G(V) = U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes_{U(\mathfrak{k}_\mathbb{C})} V = U(\mathfrak{n}_\mathbb{C} + \mathfrak{a}_\mathbb{C}) \otimes V$$

[*4] MIT 留学中の話であるが，当初著者は常に $P_G(V) \in (\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)\text{-Mod}_M$ が成り立つと思い違いをしていた．なかなか証明できないので Vogan 先生に相談に行ったところ，先生は私の話が終わるか終わらないかのうちに $SO(2,1)$ の場合の反例を構成して見せてくれた．

$$= S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes V^M \oplus S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes (V^M)^{\perp} \oplus \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes V \xrightarrow{\text{射影}} S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes V^M$$
$$\xrightarrow{f(\lambda)\otimes v \mapsto f(\lambda+\rho)\otimes v} S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes V^M = \mathbf{H} \otimes_{\mathbb{C}W} V^M = P_{\mathbf{H}}(V^M)$$

で与えられる．また，全射 $P_G(V) \to \mathring{P}_G(V)$ は $\gamma_{P_G(V)}$ を factor through し，$\Gamma(\mathring{P}_G(V)) \simeq P_{\mathbf{H}}(V^M)$ となる．

$E, V \in \widehat{K}_M$ とすると，命題より Γ は射の写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E), P_G(V)) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(P_{\mathbf{H}}(E^M), P_{\mathbf{H}}(V^M)),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(\mathring{P}_G(E), \mathring{P}_G(V)) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(P_{\mathbf{H}}(E^M), P_{\mathbf{H}}(V^M))$$

を与えるが，これらをともに Γ_V^E と表す．（後者は前者を factor through する．）(2.1) より $P_{\mathbf{H}}(V^M) = P_{\mathbf{H}}(V_1^M) \oplus P_{\mathbf{H}}(V_2^M)$ となるので直和分解

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(P_{\mathbf{H}}(E^M), P_{\mathbf{H}}(V^M)) = \bigoplus_{i,j \in \{1,2\}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(P_{\mathbf{H}}(E_j^M), P_{\mathbf{H}}(V_i^M)) \tag{2.4}$$

が成り立つが，Γ_V^E と射影

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(P_{\mathbf{H}}(E^M), P_{\mathbf{H}}(V^M)) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(P_{\mathbf{H}}(E_1^M), P_{\mathbf{H}}(V_1^M))$$

の合成を $\tilde{\Gamma}_V^E$ と書く．$E_2^M = V_2^M = \{0\}$ のとき，つまり E も V も single-petaled であるときは $\tilde{\Gamma}_V^E = \Gamma_V^E$ である．

定理 2.3. (i) $\tilde{\Gamma}_V^E$ の像は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(E_1^M), P_{\mathbf{H}}(V_1^M))$ に含まれる（$\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}} \subset \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}$ に注意）．つまり $\tilde{\Gamma}_V^E$ は

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E), P_G(V)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(E_1^M), P_{\mathbf{H}}(V_1^M)),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(\mathring{P}_G(E), \mathring{P}_G(V)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(E_1^M), P_{\mathbf{H}}(V_1^M))$$

という写像と考えられる（一般化された Harish-Chandra 準同型）．

(ii) $V = \mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ とすると，$P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}) = \mathring{P}_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}) \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)\text{-}\mathrm{Mod}_M$ であり，(2.3) より

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(\mathring{P}_G(E), \mathring{P}_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$$

が成り立つ．$i = \mathbf{1}, \mathbf{2}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}^{i \to \mathbf{0}}(P_G(E), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$$
$$= \{\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) \mid \Gamma_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}^E(\Psi)[P_{\mathbf{H}}(E_i^M)] = \{0\}\}$$

と置くと，

$$\mathrm{Ker}\, \tilde{\Gamma}_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}^E = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}^{\mathbf{1} \to \mathbf{0}}(P_G(E), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})),$$

$$\tilde{\Gamma}^E_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}(\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E),P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(E^M_{\mathbf{1}}),P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E),P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) = \bigoplus_{i\in\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}} \mathrm{Hom}^{i\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E),P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$$

が成り立つ[*5].

(iii) 特に $E=V=\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ のとき,

$$\tilde{\Gamma}^{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}} = \Gamma^{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}} : \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) = \mathrm{End}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) \to \mathrm{End}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$$

は $\mathbb{C}$-代数の同型になる．これは，(2.2) と簡単な $\mathbb{C}$-代数の同型 $\mathrm{End}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) \simeq \mathrm{Hom}_W(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}},P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) \simeq S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ を介することにより，古典的な Harish-Chandra 同型に一致する．

$\{\Gamma^E_V\}$ は，Γ の函手性から射の合成と整合的である．一方 $\{\tilde{\Gamma}^E_V\}$ の方は，射の合成と部分的にしか整合しない．この辺りの話は動径対の定義に強く関わってくるので，もう少し詳しく説明する．$E,V,X\in\widehat{K}_M$，$\Psi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E),P_G(V))$，$\Phi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V),P_G(X))$ とする．$\Gamma^E_V(\Psi)$ を (2.4) によって 4 つの成分に分解し，$\begin{pmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{pmatrix}$ のように配置する ($\psi_{ij}\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}(P_{\mathbf{H}}(E^M_j),P_{\mathbf{H}}(V^M_i))$)．同様に $\Gamma^V_X(\Phi)=\begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix}$ と書くと，Γ の函手性から

$$\Gamma^E_X(\Phi\circ\Psi) = \Gamma^V_X(\Phi)\circ\Gamma^E_V(\Psi) = \begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{pmatrix}$$

である．ここで，最右辺は 2 次正方行列の積のように計算する．一方 $\tilde{\Gamma}^V_X(\Phi)=\varphi_{11}$，$\tilde{\Gamma}^E_V(\Psi)=\psi_{11}$，$\tilde{\Gamma}^E_X(\Phi\circ\Psi)=\varphi_{11}\circ\psi_{11}+\varphi_{12}\circ\psi_{21}$ なので，$\tilde{\Gamma}^E_X(\Phi\circ\Psi)=\tilde{\Gamma}^V_X(\Phi)\circ\tilde{\Gamma}^E_V(\Psi)$ が成り立つのは $\varphi_{12}\circ\psi_{21}=0$ であるときであるが，そのためには $\varphi_{12}=0$（$\Gamma^V_X(\Phi)$ がブロック下 3 角行列）であるか $\psi_{21}=0$（$\Gamma^E_V(\Psi)$ がブロック上 3 角行列）であれば十分である．各 $i,j\in\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$ に対して

$$\mathrm{Hom}^{j\to i}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E),P_G(V)) = \{\Psi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E),P_G(V))\,|\,\Gamma^E_V(\Psi)[P_G(E_j)]\subset P_G(V_i)\}$$

と置くと，

$$\Psi\in\mathrm{Hom}^{j\to i}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E),P_G(V)) \Leftrightarrow \psi_{\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}\setminus\{i\},j}=0$$

であり，$\mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{1}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}$ がブロック上三角行列の集合，$\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{2}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}$ がブロック下三角行列の集合になる．

[*5] 第 1 式は定義から自明．第 2 式は [O1] の主結果の 1 つである．予想を立ててから証明を完了させるまで 1 年以上費やした．第 3 式は $\Gamma^E_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}$ の単射性と第 1 式，第 2 式から容易に証明できる．

2.4 動径対 $(P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}), P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$

$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群 $P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})$ と $\mathbf{H}$-加群 $P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})$ が動径対をなすことが次節で明らかになるが，ここではこの典型例が $\{\tilde{\Gamma}^V_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}\}$ に関して持つ性質を列挙する：

(i) $V \in \widehat{K}_M$ とすると，定理 2.3 (ii) より，線形写像

$$\tilde{\Gamma}^V_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}} : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(V_{\mathbf{1}}^M), P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$$

は同型

$$\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(V_{\mathbf{1}}^M), P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$$

を導き，$\mathrm{Ker}\,\tilde{\Gamma}^V_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}} = \mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$ である．

(ii) 任意の $E, V \in \widehat{K}_M$，$i, j \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$，任意の $\Phi \in \mathrm{Hom}^{i\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$，$\Psi \in \mathrm{Hom}^{j\to i}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E), P_G(V))$ に対し，定義から明らかに

$$\Phi \circ \Psi \in \mathrm{Hom}^{j\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$$

となる．

(iii) $E, V \in \widehat{K}_M$ とする．$(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})^M_{\mathbf{2}} = \{0\}$ であるから，$\mathrm{Hom}^{j\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) = \mathrm{Hom}^{j\to\mathbf{2}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$ $(j = \mathbf{1}, \mathbf{2})$ である．従って §2.3 の最後に考察したことから，次の 2 つの場合に部分的な函手性 $\tilde{\Gamma}^E_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}(\Phi \circ \Psi) = \tilde{\Gamma}^V_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}(\Phi) \circ \tilde{\Gamma}^E_V(\Psi)$ が成り立つ：

(a) $\Phi \in \mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$（下 3 角），$\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E), P_G(V))$.

(b) $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$，$\Psi \in \mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{1}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(E), P_G(V))$（上 3 角）.

3 動径対の圏

3.1 動径対の定義

§2.4 の $(P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}), P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$ に対する性質 (i), (ii), (iii-a) の性質を抽象化して動径対の公理系を与える．性質 (iii-b) は他の性質からすぐに導かれるので公理系には含めない．

定義 3.1. 次の (i)–(iii) を満たす $\mathcal{M}_G \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-Mod$_M$ と $\mathcal{M}_{\mathbf{H}} \in \mathbf{H}$-Mod の対 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ が動径対という：

(i) 各 $V \in \widehat{K}_M$ に対して全射線形写像

$$\tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{M}} : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), \mathcal{M}_G) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(V_{\mathbf{1}}^M), \mathcal{M}_{\mathbf{H}})$$

および

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)=\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)\oplus\mathrm{Ker}\,\tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{M}}$$

となる $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)$ の直和因子 $\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)$ が与えられている．($\mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)=\mathrm{Ker}\,\tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{M}}$ と置く．)

(ii) $E,V\in\widehat{K}_M, i,j\in\{\mathbf{1},\mathbf{2}\},\Phi\in\mathrm{Hom}^{i\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G),\Psi\in\mathrm{Hom}^{j\to i}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(E),P_G(V))$ に対し，

$$\Phi\circ\Psi\in\mathrm{Hom}^{j\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(E),\mathcal{M}_G).$$

(iii) $E,V\in\widehat{K}_M$，$\Phi\in\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)$，$\Psi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(E),P_G(V))$ に対し，

$$\tilde{\Gamma}^E_{\mathcal{M}}(\Phi\circ\Psi)=\tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{M}}(\Phi)\circ\tilde{\Gamma}^E_V(\Psi).$$

注意 3.2. (i) は K の $\mathcal{M}_G$ への作用と W の $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ への作用の対応を，(ii) と (iii) は $U(\mathfrak{a}_\mathbb{C}\otimes\mathfrak{n}_\mathbb{C})$ の $\mathcal{M}_G$ への作用と $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ の $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ への作用の対応を与えていると考えられる．

注意 3.3. 上で与えた動径対の定義は [O2] で与えたものと少し異なっている．まず，[O2] では $\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)$ を $\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{2}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)$ と書いた，$\mathcal{M}_G=P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})$ のとき両者が一致するという理由によるが，あまり適切でないので改めた．また，[O2] では §2.4 の (iii-b) に当たるものも公理に加えて，その分 (ii) は $(i,j)=(\mathbf{2},\mathbf{2})$ の場合のみに限定している．こうすると，(ii) の $(i,j)=(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{1})$ に対するものは自動的に満たされるが，$(i,j)=(\mathbf{1},\mathbf{2})$ に対するものは他の公理から演繹できないように思われる．いずれにせよ，定義 3.1 による動径対が作る圏は，[O2] による動径対の圏の充満部分圏であり，[O2] で扱った具体例はすべて定義 3.1 に適合している．特に，定義 3.1 による動径対に対しては次の命題の前半の主張が成立することもあり，現在はこの新しい定義を用いている．

命題 3.4. $\mathcal{M}=(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ を動径対とする．任意の single-petaled K-タイプ V に対して，$\mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)=\{0\}$ となり，$\tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{M}}$ は重複度空間の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(V^M),\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$$

を与える．逆に，quasi-single-petaled でない $V\in\widehat{K}_M$ に対しては，$P_{\mathbf{H}}(V^M_{\mathbf{1}})=P_{\mathbf{H}}(\{0\})=\{0\}$ より $\tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{M}}=0$，$\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G)=\{0\}$ となる．

G の表現論と $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ の表現論の類似性を考察するとき，$\mathcal{M}_G\in(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)$-$\mathsf{Mod}_M$ と $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}\in$ $\mathbf{H}$-Mod が互いに他の「正しい」類似物であるか否かを，$(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ が動径対であるか否かにより厳密に定義することができる．定義 3.1 で定めた動径対の条件はかなり厳しいが，それでも動径対には多少不定性があり，同型でない $\mathcal{M}_G$，$\mathcal{M}'_G$ に対して $(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$，$(\mathcal{M}'_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ がともに動径対になったりする（同様に $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ の方に不定性が生じることもある）．この場合，$\mathcal{M}_G$ と $\mathcal{M}'_G$ の両方が $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ の類似物であると考える．

3.2 動径対の射

定義 3.5. 動径対全体を対象とし，2 つの動径対 $\mathcal{M}=(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$，$\mathcal{N}=(\mathcal{N}_G,\mathcal{N}_{\mathbf{H}})$ に対して以下の性質を満たす $\mathcal{I}_G\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(\mathcal{M}_G,\mathcal{N}_G)$ と $\mathcal{I}_{\mathbf{H}}\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}_{\mathbf{H}},\mathcal{N}_{\mathbf{H}})$ の対 $\mathcal{I}=(\mathcal{I}_G,\mathcal{I}_{\mathbf{H}})$ を $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への射とする圏を $\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ で表す：

(i) 各 $V\in\widehat{K}_M$ に対して，$\mathcal{I}_{\mathbf{H}}\circ\tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{M}}=\tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{N}}\circ\mathcal{I}_G$ *6.

(ii) 各 $V\in\widehat{K}_M$ に対して，$\mathcal{I}_G(\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G))\subset\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V),\mathcal{N}_G)$.

これで，$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-準同型 $\mathcal{I}_G$ と $\mathbf{H}$-準同型 $\mathcal{I}_{\mathbf{H}}$ が「正しい」類似物であるか否かを，$(\mathcal{I}_G,\mathcal{I}_{\mathbf{H}})$ が $\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ の射であるか否かにより厳密に定義することができた．

命題 3.6. $\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ は Abel 圏である．2 つの射影 $(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})\mapsto\mathcal{M}_G$，$(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})\mapsto\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ はともに完全函手である．

3.3 函手 Ξ_{rad}

$\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ と深く関わる函手 $\Xi_{\mathrm{rad}}:\mathbf{H}\text{-Mod}\to(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{-Mod}_M$ を定めよう．注意 3.2 で述べたように，動径対の定義を [O2] から少し変更したため，この函手も新しく変わっている．

$\mathscr{X}\in\mathbf{H}\text{-Mod}$ とする．各 $V\in\widehat{K}_M$ に対して，$\tilde{\gamma}_{\mathring{P}_G(V)}:\mathring{P}_G(V)\to P_{\mathbf{H}}(V^M_{\mathbf{1}})$ を命題 2.2 による $\gamma_{\mathring{P}_G(V)}:\mathring{P}_G(V)\to P_{\mathbf{H}}(V^M)$ と射影 $P_{\mathbf{H}}(V^M)\to P_{\mathbf{H}}(V^M_{\mathbf{1}})$ の合成とする．

$$\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X}):=\bigoplus_{V\in\widehat{K}_M}\mathring{P}_G(V)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(V^M_{\mathbf{1}}),\mathscr{X})\in(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{-Mod}_M,$$
$$\gamma_{\text{w-rad}}:\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X})\to\mathscr{X};\quad p\otimes\varphi\mapsto\varphi[\tilde{\gamma}_{\mathring{P}_G(V)}(p)]$$

とし，各 $V\in\widehat{K}_M$ に対して

$$\tilde{\Gamma}^V_{\text{w-rad}}:\mathrm{Hom}_K(V,\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X}))\to\mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathbf{1}},\mathscr{X});\quad\Phi\mapsto\gamma_{\text{w-rad}}\circ\Phi|_{V^M_{\mathbf{1}}},$$
$$\mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{0}}_K(V,\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X})):=\mathrm{Ker}\,\tilde{\Gamma}^V_{\text{w-rad}},$$
$$\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_K(V,\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X})):=\{V\ni v\mapsto v\otimes\varphi\in\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X})\mid\varphi\in\mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathbf{1}},\mathscr{X})\}$$

とすると，これらのデータを備えた対 $(\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X}),\mathscr{X})$ は，定義 3.1 に掲げた動径対の公理系のうち，(i) を満たす．そのような対を「弱動径対」と呼ぶ．定義 3.5 と同じ射の定義により弱動径対の圏 $\mathscr{C}_{\text{w-rad}}$ を定めると，これも Abel 圏になる．さて，$\Xi_{\text{w-rad}}$ の部分加群 $\mathscr{N}$ を

*6 この条件から直ちに，$\mathcal{I}_G(\mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G))\subset\mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V),\mathcal{N}_G)$ が導かれる．

次で生成されるものとする：

$$\Psi[p]\otimes\varphi - p\otimes\varphi\circ\tilde{\Gamma}^E_V(\Psi) \qquad \begin{pmatrix} E,V\in\widehat{K}_M,\ \Psi\in\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{2}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(\mathring{P}_G(E),\mathring{P}_G(V)), \\ p\in\mathring{P}_G(E),\ \varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(P_{\mathbf{H}}(V^M_{\mathbf{1}}),\mathscr{X}) \end{pmatrix},$$

$$\Phi\circ\Psi[p] - p\otimes\tilde{\Gamma}^E_{\text{w-rad}}(\Phi\circ\Psi) \qquad \begin{pmatrix} E,V\in\widehat{K}_M,\ \Psi\in\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{1}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(\mathring{P}_G(E),\mathring{P}_G(V)), \\ p\in\mathring{P}_G(E),\ \Phi\in\mathrm{Hom}^{\mathbf{1}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(\mathring{P}_G(V),\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X})) \end{pmatrix}.$$

このとき，$(\mathscr{N},\{0\})$ は $(\Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X}),\mathscr{X})\in\mathscr{C}_{\text{w-rad}}$ の部分対象になるので，$\Xi_{\text{rad}}(\mathscr{X}) = \Xi_{\text{w-rad}}(\mathscr{X})/\mathscr{N}$ と置くことにより，商対象 $(\Xi_{\text{rad}}(\mathscr{X}),\mathscr{X})\in\mathscr{C}_{\text{w-rad}}$ を得る．

定理 3.7. $(\Xi_{\text{rad}}(\mathscr{X}),\mathscr{X})\in\mathscr{C}_{\text{rad}}$.

これより，任意の $\mathbf{H}$-加群がある動径対の第 2 成分になることが分かる．さらに，Ξ_{rad} は次のような普遍性を持つ：

定理 3.8. 函手 $\mathbf{H}$-Mod $\ni\mathscr{X}\mapsto(\Xi_{\text{rad}}(\mathscr{X}),\mathscr{X})\in\mathscr{C}_{\text{rad}}$ は，射影 $\mathscr{C}_{\text{rad}}\ni(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})\mapsto\mathcal{M}_{\mathbf{H}}\in\mathbf{H}$-Mod の左随伴函手である．

系 3.9. 函手 $\Xi_{\text{rad}}:\mathbf{H}$-Mod $\to(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)$-Mod$_M$，函手 $\mathbf{H}$-Mod $\ni\mathscr{X}\mapsto(\Xi_{\text{rad}}(\mathscr{X}),\mathscr{X})\in\mathscr{C}_{\text{rad}}$ はともに右完全である．

Ξ_{rad} の持つ他の性質に，有限次元 $\mathbf{H}$-加群を有限長の $(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)$-加群に写すことや，中心指標に関する整合性などがある．

注意 3.10. $\gamma_{\text{w-rad}}$ は線形写像 $\gamma_{\text{rad}}:\Xi_{\text{rad}}(\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ を誘導する（§6.1 で用いる）．

4 動径対の例

4.1 $(C^\infty(G/K),C^\infty(A))$

$C^\infty(G/K)$ は左移動 $\ell(g):f(x)\mapsto f(g^{-1}x)$ により G-加群であり，K-有限なベクトルのなす部分空間 $C^\infty(G/K)_{K\text{-finite}}$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)$-加群である．煩雑さを防ぐため，文脈から明らかな場合は $C^\infty(G/K)_{K\text{-finite}}$ を単に $C^\infty(G/K)$ と書く．一方，$C^\infty(A)$ には Cherednik 作用素による $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ の作用（[Ch]）：

$$\mathscr{T}(H)=\partial(H)+\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\dim\mathfrak{g}_\alpha\frac{\alpha(H)}{1-e^{-2\alpha}}(1-s_\alpha)-\rho(H)\qquad(H\in\mathfrak{a}_\mathbb{C})$$

があり，これを Cartan 対合で捻った $\mathscr{T}(\theta_{\mathbf{H}}\cdot)$ による $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ の作用と，W の要素による左移動より，$C^\infty(A)$ は $\mathbf{H}$-加群になる．($C^\infty(A)$ の方は部分空間を取る必要がない．作用を捻る

のは ℓ に対応するものを考えたいため.）さて，$G/K \simeq NA$ なので $A \hookrightarrow G/K$ により制限写像 $\gamma_0 : C^\infty(G/K) \to C^\infty(A)$ が定まる．各 $V \in \widehat{K}_M$ に対して

$$\tilde{\Gamma}_0^V : \mathrm{Hom}_K(V, C^\infty(G/K)) \ni \Psi \mapsto \gamma_0 \circ \Psi|_{V_1^M} \in \mathrm{Hom}_W(V_1^M, C^\infty(A)), \tag{4.1}$$

$$\mathrm{Hom}_K^{2\to 0}(V, C^\infty(G/K)) = \{\Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, C^\infty(G/K)) \mid \gamma_0 \circ \Psi|_{V_2^M} = 0\} \tag{4.2}$$

とすると，これらが $(C^\infty(G/K), C^\infty(A))$ に動径対の構造を与える．

注意 4.1. 一般に，動径対 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ に対して，(4.1)，(4.2) と同様の性質を持つ線形写像 $\gamma_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_G \to \mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ があるとき，これを「動径制限写像（radial restriction map）」と呼ぶことにする．$\gamma_{\mathcal{M}}$ が $\mathcal{M}$ の動径対としての構造を完全に定めていることに注意しよう．$(P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}), P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$ の場合は，§2.3 の $\gamma_{P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})}$ が動径制限写像になっている．§3.3 では $\mathscr{X} \in \mathbf{H}$-Mod から動径対 $(\Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X}), \mathscr{X})$ を構成した．この場合，注意 3.10 の $\gamma_{\mathrm{rad}} : \Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X}) \to \mathscr{X}$ は (4.1) を満たすが，(4.2) を満たすかは不明である．[*7] γ_{rad} が (4.2) も満たす場合は，Ξ_{rad} は §6.1 の $\Xi^{\min}$ と一致し，完全函手になる．

動径対であるためには，上で定めたデータが定義 3.1 の (i)–(iii) を満たす必要がある．$(P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}), P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))$ の場合は (i) 以外は自明であったが，$(C^\infty(G/K), C^\infty(A))$ に対する (i)–(iii) はすべて非自明な「定理」である．つまり，(i) は Chevalley 制限定理の一般化（[O1] の主要結果），(ii)，(iii) は $\ell(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ の作用に対する動径成分公式の一般化になっている．

4.2 $(\mathscr{A}(G/K,\lambda), \mathscr{A}(\mathbf{H},\lambda))$

$C^\infty(G)$ への G の右移動 $r(g) : f(x) \mapsto f(xg)$ による作用を考える．同一視 $C^\infty(G/K) \simeq \{f \in C^\infty(G) \mid r(k)f = f\ (\forall k \in K)\}$ により，$C^\infty(G/K)$ には可換代数 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K/U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K \cap U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})$ が作用するが（cf. (2.2)），この代数は Harish-Chandra 同型 $\Gamma_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}^{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}$ を通じて $\mathrm{End}_{\mathbf{H}} P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}) \simeq S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ とも同型であった（定理 2.3 (iii)）．さて，$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して

$$\mathscr{A}(G/K,\lambda) := \{f \in C^\infty(G/K) \mid r(D)f = \Gamma_{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}^{\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}}(D)(\lambda)f \quad (\forall D \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}))\},$$
$$\mathscr{A}(\mathbf{H},\lambda) := \{f \in C^\infty(A) \mid \mathscr{T}(D)f = D(\lambda)f \quad (\forall D \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W)\}$$

と置くと，$(\mathscr{A}(G/K,\lambda), \mathscr{A}(\mathbf{H},\lambda))$ は $(C^\infty(G/K), C^\infty(A)) \in \mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ の部分対象になる．これは，$r(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K)$ の K-不変とは限らない関数への作用に対する動径成分公式を使って示される．写像 $\gamma_0 : C^\infty(G/K) \to C^\infty(A)$ については，$\gamma_0(\mathscr{A}(G/K,\lambda)) \subset \mathscr{A}(\mathbf{H},\lambda)$ も $\gamma_0(\mathscr{A}(G/K,\lambda)) \supset \mathscr{A}(\mathbf{H},\lambda)$ も期待できないので，この動径対は「自然な」動径制限写像を

*7 $\mathrm{rank}(G/K) = 1$ なら常に満たされるが，著者は一般に成り立つことには懐疑的である．

持っていない．C^∞ ではなく $\mathscr{A}$ という記号を用いているのは，これらの空間に属する関数が解析的だからである．これは $\mathscr{A}(G/K,\lambda)$ については良く知られているが，$\mathscr{A}(\mathbf{H},\lambda)$ については別に証明する必要がある．

4.3 球主系列 $(B_G(\lambda), B_{\mathbf{H}}(\lambda))$

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して

$$B_G(\lambda) := \{f \in C^\infty(G) \,|\, r(man)f = a^{\lambda-\rho} f \quad (\forall (m,a,n) \in M \times A \times N)\},$$
$$B_{\mathbf{H}}(\lambda) := \{f \in \mathbf{H}^* \,|\, f(\cdot\,{}^{\mathrm{t}}H) = -\lambda(H) f \quad (\forall H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})\}$$

と置く．前者は ℓ により $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群，後者は $h \in \mathbf{H}$ の作用を $h.f(\cdot) = f({}^{\mathrm{t}}h\cdot)$ と定めることにより $\mathbf{H}$-加群になる．両者はそれぞれ線形空間として $C^\infty(K/M)$，$\mathrm{Map}(W,\mathbb{C})$ と同型なので，$\gamma_{B(\lambda)} : C^\infty(K/M) \to C^\infty(\tilde{M}/M) = \mathrm{Map}(W,\mathbb{C})$ という写像が定まる．これを動径制限写像として $(B_G(\lambda), B_{\mathbf{H}}(\lambda))$ は動径対になる．他の例に比べると，動径対の公理系が満たされることの確認は容易である．

5 動径対の射の例

この節では G は連結半単純 Lie 群であるとする．

5.1 Poisson 変換

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とする．Poisson 変換 $\mathcal{P}_G^\lambda : B_G(\lambda) \to \mathscr{A}(G/K,\lambda)$ は，

$$\mathcal{P}_G^\lambda f\,(x) = \int_K f(k) e^{(\lambda+\rho)A(k^{-1}x)}\, dk$$

で定まる G-準同型である．ここで，$g \in G$ に対して $A(g) \in \mathfrak{a}$ は $g \in N \exp A(g)\, K$ を満たす唯一の要素とする．$\mathbf{H}$ 版の Poisson 変換の「核関数」となる関数を導入する．

定理 5.1 (非対称超幾何関数 [Op])**.** 次を満たす $\mathbf{G}(\lambda,x) \in C^\infty(A)$ が唯一存在する：

$$\begin{cases} \mathscr{T}(H)\mathbf{G}(\lambda,x) = \lambda(H)\,\mathbf{G}(\lambda,x) & \forall H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}, \\ \mathbf{G}(\lambda,1) = 1. \end{cases}$$

命題 5.2. 次の写像が定義され，$\mathbf{H}$ 準同型になる：

$$\mathcal{P}_{\mathbf{H}}^\lambda : B_{\mathbf{H}}(\lambda) \ni f(h) \longmapsto \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} f(w)\, \mathbf{G}(\lambda, w^{-1}x) \in \mathscr{A}(A,\lambda).$$

定理 5.3. 2 つの Poisson 変換の対：

$$\mathcal{P}^\lambda = (\mathcal{P}_G^\lambda, \mathcal{P}_{\mathbf{H}}^\lambda) : \big(B_G(\lambda), B_{\mathbf{H}}(\lambda)\big) \longrightarrow \big(\mathscr{A}(G/K,\lambda), \mathscr{A}(A,\lambda)\big)$$

は動径対の射をなす．特に，$V \in \widehat{K}$ が single-petaled であれば，各 $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(V, B_G(\lambda))$ に対して 2 つの写像

$$V^M \hookrightarrow V \xrightarrow{\Phi} B_G(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{P}_G^\lambda} \mathscr{A}(G/K, \lambda) \xrightarrow{\gamma_0} C^\infty(A),$$
$$V^M \hookrightarrow V \xrightarrow{\Phi} B_G(\lambda) \xrightarrow{\gamma_{B(\lambda)}} B_{\mathbf{H}}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{P}_{\mathbf{H}}^\lambda} \mathscr{A}(A, \lambda) \hookrightarrow C^\infty(A)$$

は一致する．より具体的には，等式

$$\int_K \Phi[v](k)\, e^{(\lambda+\rho)(A(k^{-1}x))}\, dk = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \Phi[v](\tilde{w})\, \mathbf{G}(\lambda, w^{-1}x) \quad \forall v \in V^M, \forall x \in A$$

が成立する（$\tilde{w} \in \tilde{W}$ は $w \in W$ の任意の代表）.

5.2 他の例

$w \in W$ とジェネリックな $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して定まる Knapp-Stein 型の繋絡作用素とその $\mathbf{H}$ 版の対：

$$(\tilde{A}_G(w, \lambda), \tilde{A}_{\mathbf{H}}(w, \lambda)) \colon \big(B_G(\lambda), B_{\mathbf{H}}(\lambda)\big) \longrightarrow \big(B_G(w\lambda), B_{\mathbf{H}}(w\lambda)\big)$$

や，Helgason-Fourier 変換と Opdam-Cherednik 変換の対：

$$(\mathcal{F}_G, \mathcal{F}_{\mathbf{H}}) \colon \big(C_c^\infty(G/K), C_c^\infty(A)\big) \longrightarrow \big(C^\infty(\mathfrak{a}^* \times K/M), C^\infty(\mathfrak{a}^* \times W)\big)$$

は $\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ の射になる（詳細は略）.

6 動径対と関わる函手

§3.3 の Ξ_{rad} から同様の函手 $\Xi^{\min}$, Ξ を構成できる．これらはそれぞれ別の普遍性を持つ．

6.1 函手 $\Xi^{\min}$

$\mathscr{X} \in \mathbf{H}$-Mod に対して，$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群

$$\Xi^{\min}(\mathscr{X}) = \Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X}) \,/\, \textstyle\sum \{ Z \subset \Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X}) \mid K\text{-不変部分空間で } \gamma_{\mathrm{rad}}(Z) = \{0\} \text{ であるもの} \}$$

を定める．$\gamma_{\mathrm{rad}} : \Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X}) \to \mathscr{X}$ は線形写像 $\gamma^{\min} : \Xi^{\min}(\mathscr{X}) \to \mathscr{X}$ を誘導し，$(\Xi^{\min}(\mathscr{X}), \mathscr{X})$ は $\gamma^{\min}$ を動径制限写像とする動径対になる．$\gamma^{\min}$ は (4.1)，(4.2) のような性質の他に，

$$\begin{aligned} &\gamma^{\min}(Hy) = (H + \rho(H))\gamma^{\min}(y) && (\forall H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}), \\ &\gamma^{\min}(Xy) = 0 && (\forall X \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}), \\ &\gamma^{\min}(my) = \gamma^{\min}(y) && (\forall m \in M) \end{aligned} \tag{6.1}$$

という性質を持っている．これは，$\gamma^{\min}$ が §2.3 で定めた $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$-ホモロジーに関連する線形写像 $\gamma_{\Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X})}: \Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X}) \to \Gamma(\Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X}))$ と適当な $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$-準同型 $\Gamma(\Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X})) \to \mathscr{X}$ に分解することと同値である．

定理 6.1. $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_{\mathbf{H}}) \in \mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ が (6.1) と同様の条件を満たす動径制限写像 $\gamma_{\mathcal{M}}$ を持つとする．このとき，任意の $\mathbf{H}$-準同型 $\mathcal{I}_{\mathbf{H}} : \mathscr{X} \to \mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ に対して，$(\mathcal{I}_G, \mathcal{I}_{\mathbf{H}}) : (\Xi^{\min}(\mathscr{X}), \mathscr{X}) \to (\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ が $\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ の射になるような $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-準同型 $\mathcal{I}_G : \Xi^{\min}(\mathscr{X}) \to \mathcal{M}_G$ が一意的に存在する．さらに，

$$\gamma_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{I}_G = \mathcal{I}_{\mathbf{H}} \circ \gamma^{\min}.$$

が成り立ち，$\mathcal{I}_{\mathbf{H}}$ が単射であれば $\mathcal{I}_G$ も単射になる．

系 6.2. $\Xi^{\min}(P_{\mathbf{H}}(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})) = P_G(\mathbb{C}_{\mathrm{triv}})$.

ここからしばらくは $\mathscr{X} \in \mathbf{H}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{fd}}$（有限次元 $\mathbf{H}$-加群）とする．まず，上の定理を用いて $\Xi^{\min}(\mathscr{X})$ をより具体的に実現しよう．$\mathscr{X}$ への $\mathfrak{a}$ の作用を群 A の作用 σ に持ち上げ，これと MN の自明な作用を合わせて $\mathscr{X}$ を MAN-加群とみなす．これを誘導した G-加群（あるいはさらに K-有限ベクトルの空間を取った $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群）を

$$\operatorname{Ind}_{MAN}^{G} \mathscr{X} = \{f : G \xrightarrow{C^\infty} \mathscr{X} \mid f(gman) = \sigma(a^{-1})a^{-\rho}f(g) \quad (\forall (m,a,n) \in M \times A \times N)\}$$

とする．これは例 1.3 の圏 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{sph}}$ に属する．$\mathrm{ev} : \operatorname{Ind}_{MAN}^{G} \mathscr{X} \ni f \mapsto f(1) \in \mathscr{X}$ を評価写像として，部分加群

$$\mathscr{Y} = \sum \left\{ \Phi[p] \;\middle|\; \begin{array}{c} V \in \widehat{K}_M,\, p \in P_G(V), \\ \Phi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V), \operatorname{Ind}_{MAN}^{G} \mathscr{X}) \text{ で } \mathrm{ev} \circ \Phi|_{V_2^M} = \{0\}\} \text{ であるもの} \end{array} \right\}$$

を定めると，$(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$ は ev を動径制限写像とする動径対になる．ev は (6.1) と同様の条件を満たすので，定理 6.1 より $(\Xi^{\min}(\mathscr{X}), \mathscr{X}) \simeq (\mathscr{Y}, \mathscr{X})$ となる．

系 6.3. $\Xi^{\min}$ は $\mathbf{H}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{fd}}$ の対象を $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{sph}}$ の対象に写す．

$\Xi^{\min}(\mathscr{X}) = \mathscr{Y} \subset \operatorname{Ind}_{MAN}^{G} \mathscr{X}$ という実現のもう 1 つの応用として，「不変 1 次半形式の持ち上げ」がある．

定理 6.4. $\mathscr{X}_i \in \mathbf{H}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{fd}}$ $(i = 1, 2)$ とする．$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}$ を $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ 上の $\mathbf{H}$-不変な 1 次半形式とする．このとき，$\Xi^{\min}(\mathscr{X}_1) \times \Xi^{\min}(\mathscr{X}_2)$ 上の $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-不変な 1 次半形式 $(\cdot,\cdot)_G$ で次の条件を満たすものが一意的に存在する：

$$\forall V \in \widehat{K}_M, \forall (\Phi_1, \Phi_2) \in \begin{array}{c} \operatorname{Hom}_K^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}(V, \Xi^{\min}(\mathscr{X}_1)) \times \operatorname{Hom}_K(V, \Xi^{\min}(\mathscr{X}_2)) \\ \cup\ \operatorname{Hom}_K(V, \Xi^{\min}(\mathscr{X}_1)) \times \operatorname{Hom}_K^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}(V, \Xi^{\min}(\mathscr{X}_2)) \end{array}$$

$\{v_1,\dots,v_k\}$ を V^M の ONB，$\{v_{k+1},\dots,v_n\}$ を $(V^M)^\perp$ の ONB として

$$\sum_{i=1}^{n}(\Phi_1[v_i],\Phi_2[v_i])_G=\sum_{i=1}^{k}(\tilde{\Gamma}^V_{(\Xi^{\min}(\mathscr{X}_1),\mathscr{X}_1)}(\Phi_1)[v_i],\tilde{\Gamma}^V_{(\Xi^{\min}(\mathscr{X}_2),\mathscr{X}_2)}(\Phi_2)[v_i])_{\mathbf{H}}.$$

注意 6.5. 特に，$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}$ が $\mathscr{X}\in\mathbf{H}\text{-Mod}_{\mathrm{fd}}$ の不変 Hermite 形式のときは，それを持ち上げた $(\cdot,\cdot)_G$ は $\Xi^{\min}(\mathscr{X})$ の不変 Hermite 形式になる．$(\cdot,\cdot)_G$ は埋め込み $\Xi^{\min}(\mathscr{X})\hookrightarrow\mathrm{Ind}^G_{MAN}\mathscr{X}$ を用いて構成されるが，その方法は少し複雑で，$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}$ が正定値であっても $(\cdot,\cdot)_G$ が正定値性であるとはいえない*8．但し，各 $V\in\widehat{K}_M$ に対して，$\mathscr{X}$ の部分空間 $V_{\mathbf{1}}^M\otimes\mathrm{Hom}_W(V_{\mathbf{1}}^M,\mathscr{X})$ 上 $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}$ が正定値（負定値）であれば，$\Xi^{\min}(\mathscr{X})$ の部分空間 $V\otimes\mathrm{Hom}_K^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}(V,\Xi^{\min}(\mathscr{X}))$ 上 $(\cdot,\cdot)_G$ も正定値（負定値）になる．[Ba] はこの原理を使って，例 1.2 で紹介した既約球表現に対するユニタリ性の対応を得ている．

6.2 函手 Ξ

動径対 $\mathcal{M}=(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ があるとき，$\mathcal{M}_G$ の中で $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ と何の関わりも持たない部分を潰して，$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$-加群 $\mathcal{M}'_G$ を作る．つまり，

(6.2)

$$\mathcal{L}:=\sum\{\Phi[p]\in\mathcal{M}_G\,|\,V\in\widehat{K}_M,\ \Phi\in\mathrm{Hom}^{\mathbf{2}\to\mathbf{0}}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V),\mathcal{M}_G),\ p\in P_G(V)\},$$
$$\mathcal{N}:=\sum\{\mathscr{Y}\subset\mathcal{L}\,|\,\forall V\in\widehat{K}_M\ \forall\Phi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(P_G(V),\mathscr{Y})\ \tilde{\Gamma}^V_{\mathcal{M}}(\Phi)=0\ \text{である部分加群}\},$$
$$\mathcal{M}'_G:=\mathcal{L}/\mathcal{N}$$

とする．このとき $\mathcal{M}':=(\mathcal{M}'_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ は自然に動径対になる．また，$\mathcal{M}''_G=\mathcal{M}'_G$ も成り立つ．$\mathcal{M}_G=\mathcal{M}'_G$（つまり $\mathcal{L}=\mathcal{M}_G$ かつ $\mathcal{N}=\{0\}$）である動径対 $\mathcal{M}$ は「被約である」ということにする．

さて，$\mathscr{X}\in\mathbf{H}\text{-Mod}$ に対して $\Xi(\mathscr{X})=\Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X})'$（もちろん動径対 $(\Xi_{\mathrm{rad}}(\mathscr{X}),\mathscr{X})$ の構造に関して $'$ を取る）と置くと，これは $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{-Mod}_M$ への函手を定める．次の定理は，被約な動径対は第 2 成分から完全に決まってしまうことを示す：

定理 6.6. 動径対 $\mathcal{M}=(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ が $\mathcal{L}=\mathcal{M}_G$ を満たすとき，第 2 因子が恒等射であるような射 $\mathcal{M}\to(\Xi(\mathcal{M}_{\mathbf{H}}),\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ が一意的に存在し，全射になる．特に $\mathcal{M}$ が被約であれば，$\mathcal{M}\simeq(\Xi(\mathcal{M}_{\mathbf{H}}),\mathcal{M}_{\mathbf{H}})$ が成り立つ．

これで，動径対の持つ不定性が表面的なものに過ぎないことが分かった．次の定理の後半も上の結果から導かれる．

定理 6.7. $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ とすると，§4.2 の $\mathscr{A}(G/K,\lambda)$，$\mathscr{A}(A,\lambda)$ はそれぞれ唯一の既約部分加群

*8 実は著者は正定値にならない具体例を 1 つも知らないが，この主張は正しいと思う．

$X_G(\lambda), X_{\mathbf{H}}(\lambda)$ を持つ．これらについて，$\Xi(X_{\mathbf{H}}(\lambda)) = X_G(\lambda)$ が成り立ち，$(X_G(\lambda), X_{\mathbf{H}}(\lambda))$ は被約な動径対になる[*9]．

定理 6.4 の設定のもと，$\Xi^{\min}(\mathscr{X}_i)(i=1,2)$ から (6.2) の $\mathcal{L}_i, \mathcal{N}_i$ を作ると，$\mathcal{L}_i = \Xi^{\min}(\mathscr{X}_i)$, $\Xi(\mathscr{X}_i) = \mathcal{L}_i/\mathcal{N}_i$ となる．さらに，$\mathcal{N}_1$ は $(\cdot,\cdot)_G$ の左根基に，$\mathcal{N}_2$ は右根基に含まれることが示され，$\Xi(\mathscr{X}_1) \times \Xi(\mathscr{X}_2)$ 上の 1 次半形式で，定理 6.4 と同じ条件を満たすものが誘導される．この 1 次半形式は，$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}$ が非退化であるとき非退化になる．関連して次が成り立つ．

定理 6.8. $\mathscr{X} \in \mathbf{H}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{fd}}$ に対して，双対ベクトル空間 $\mathscr{X}^*$ に ${}^t\cdot$ で $\mathbf{H}$-加群の構造を入れる．このとき，2 つの許容 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群 $\Xi(\mathscr{X})$, $\Xi(\mathscr{X}^*)$ は互いに双対になる．

7 Ciubotaru-Trapa 函手

Ciubotaru と Trapa による函手 F_{CT} は，荒川と鈴木による函手 [AS], Etingof, Freund, Ma による函手 [EFM] を実簡約 Lie 群版に焼き直して，いろいろな古典群の場合に拡張したものである．[CT1] では，個々の場合に応じて具体的に F_{CT} の構成が与えられているが，共通している部分を著者なりに抽出すると，以下のようになっている．

定義 7.1. 有限次元の左 K, 右 W-加群 Z, 要素 $\dot{z} \in Z^M$, $\mathbb{C}$-代数の準同型 $\zeta : \mathbf{H}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} \mathring{P}_G(Z)$ は次を満たしているとする：

(i) Z の既約部分加群はすべて single-petaled K-タイプ．従って，§2.3 の $\Gamma^Z_Z : \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} \mathring{P}_G(Z) \to \mathrm{End}_{\mathbf{H}} P_{\mathbf{H}}(Z^M)$ は $\tilde{\Gamma}^Z_Z$ に等しい．

(ii) 線形写像 $\mathbb{C}W \to Z^M; w \mapsto \dot{z}w$ は両側 W-加群の同型．従って，$P_{\mathbf{H}}(Z^M) \simeq \mathbf{H}$, $\mathrm{End}_{\mathbf{H}} P_{\mathbf{H}}(Z^M) \simeq \mathbf{H}^{\mathrm{op}}$ となるので，Γ^Z_Z を $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} \mathring{P}_G(Z) \to \mathbf{H}^{\mathrm{op}}$ という $\mathbb{C}$-代数の準同型と考える．

(iii) $\Gamma^Z_Z \circ \zeta = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$.

(iv) ζ はスター作用素と可換．但し，$\mathbf{H}^{\mathrm{op}}$ のスター作用素は $\mathbf{H}$ と同一とし，$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} \mathring{P}_G(Z)$ のスター作用素は $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} P_G(Z)$ のスター作用素（[O2, §10] 参照）から誘導されるものとする[*10]．

このとき，$\mathscr{Y} \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)\text{-}\mathsf{Mod}_M$ に対して，$F^Z_{\mathrm{CT}}(\mathscr{Y}) := \mathrm{Hom}_K(Z, \mathscr{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(\mathring{P}_G(Z), \mathscr{Y})$ は ζ により $\mathbf{H}$-加群になる．$F^Z_{\mathrm{CT}} : (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)\text{-}\mathsf{Mod}_M \to \mathbf{H}\text{-}\mathsf{Mod}$ を「Ciubotaru-Trapa 函手」と呼ぶ．

[*9] 例 1.2 における既約球表現の対応は，$X_G(\lambda) \leftrightarrow X_{\mathbf{H}}(\lambda)$ に他ならない．

[*10] $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K} \mathring{P}_G(Z)$ のスター構造は Z の内積 $(\cdot,\cdot)_Z$ に依存する．ここでは，$(\dot{z}, w\dot{z})_Z = \delta_{1w}$ $(w \in W)$ が成り立つように規格化したものを使う．

[CT1] は，G が $GL(n,\mathbb{R})$, $U(p,q)$, $O(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$ のときに，このような $(Z,\dot{z},\zeta)$ を見つけて F_{CT}^{Z} を構成している．著者は Ciubotaru から個人的に $GL(n,\mathbb{C})$ のときもできるはずと聞いていたが，実際 [CT1] の計算を模倣して $GL(n,\mathbb{C})$ に対する $(Z,\dot{z},\zeta)$ を見つけることができた．[Gu] による single-petaled K-タイプの分類から，多くの G に対してはこのような $(Z,\dot{z},\zeta)$ が存在しないことが分かっている．

定理 7.2 ([CT1]). 同じスペクトルパラメータを持つ既約球表現 $X_G(\lambda)\in(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{-Mod}_M$，$X_{\mathbf{H}}(\lambda)\in\mathbf{H}\text{-Mod}$ について，$F_{\mathrm{CT}}^{Z}(X_G(\lambda))=X_{\mathbf{H}}(\lambda)$ である．$\mathscr{Y}\in(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{-Mod}_M$ が不変 Hermite 形式 $(\cdot,\cdot)_G$ を持つとき，$F_{\mathrm{CT}}^{Z}(\mathscr{Y})$ も不変 Hermite 形式 $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}}$ を持つ．ここで，前者が正定値であれば後者も正定値になる．

G に F_{CT}^{Z} が存在するならば一意的ではないかと考えやすいが，そうではない．

注意 7.3. K-加群として $Z^*\simeq Z$ でない場合がある．一般に，Z^* から $(Z,\dot{z},\zeta)$ と同様の条件を満たす $(Z^*,\dot{z}^*,\zeta^*)$ が構成できて $F_{\mathrm{CT}}^{Z^*}$ が定まるが，$Z^*\not\simeq Z$ のとき $F_{\mathrm{CT}}^{Z^*}$ は F_{CT}^{Z} と本質的に異なる函手になる[*11]．

F_{CT}^{Z} 動径対との関係は次のようになっている．

定理 7.4. 函手 $\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}\ni(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})\mapsto F_{\mathrm{CT}}^{Z}(\mathcal{M}_G)\in\mathbf{H}\text{-Mod}$ と函手 $\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}\ni(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})\mapsto\mathcal{M}_{\mathbf{H}}\in\mathbf{H}\text{-Mod}$ は自然同値．特に，任意の $(\mathcal{M}_G,\mathcal{M}_{\mathbf{H}})\in\mathscr{C}_{\mathrm{rad}}$ に対して $F_{\mathrm{CT}}^{Z}(\mathcal{M}_G)\simeq\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$.

系 7.5. $\Xi_{\mathrm{rad}},\Xi^{\min},\Xi$ はすべて F_{CT}^{Z} の右逆で，F_{CT}^{Z} は実質的全射（essentially surjective）である．さらに，F_{CT}^{Z} を制限して $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{-Mod}_{\mathrm{sph}}$ から $\mathbf{H}\text{-Mod}_{\mathrm{fd}}$ への函手と考えた場合，$\Xi^{\min},\Xi$ がその右逆を与える．

$(\sigma,\mathscr{U})$ を任意の有限次元 A-加群とすると，

$$\mathrm{Ind}_{MAN}^{G}\mathscr{U}=\{f:G\xrightarrow{C^\infty}\mathscr{U}\mid f(gman)=\sigma(a^{-1})a^{-\rho}f(g)\quad(\forall(m,a,n)\in M\times A\times N)\}$$

は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{-Mod}_{\mathrm{sph}}$ に属する．次の補題は，F_{CT}^{Z} が $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{-Mod}_{\mathrm{sph}}$ を $\mathbf{H}\text{-Mod}_{\mathrm{fd}}$ に結びつける函手であることを裏付ける．

補題 7.6. $\mathscr{Y}$ を $\mathrm{Ind}_{MAN}^{G}\mathscr{U}$ の任意の部分商すると，$(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}\overset{\circ}{P}_G(Z))^{\mathrm{op}}$-加群としての $F_{\mathrm{CT}}^{Z}(\mathscr{Y})=\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}(\overset{\circ}{P}_G(Z),\mathscr{Y})$ に，イデアル $(\mathrm{Ker}\,\Gamma_Z^{Z})^{\mathrm{op}}$ は自明に作用する．つまり，$F_{\mathrm{CT}}^{Z}(\mathscr{Y})$ の $\mathbf{H}$-加群の構造から，$(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K}\overset{\circ}{P}_G(Z))^{\mathrm{op}}$-加群の構造が完全に回復できる．

この補題と定理 2.1（の $\overset{\circ}{P}_G(Z)$ 版），系 7.5，定理 7.2，§6.2 の最後に述べたことより，次

[*11] G が Hermite 型のときが顕著で，「F_{CT}^{Z} によって反正則離散系列はすべて $\{0\}$ に写るが，正則離散系列についてはそうではない．$F_{\mathrm{CT}}^{Z^*}$ はその逆」ということが起こる．

を得る：

定理 7.7. F_{CT}^{Z} は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-$\mathsf{Mod}_{\mathrm{sph}}$ に属する既約加群を $\{0\}$ または既約 $\mathbf{H}$-加群に写す．この対応は

$$\{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathrm{sph}} \text{ に属する既約加群で } K\text{-タイプの 1 つが } Z \text{ に含まれれるもの }\\ \leftrightarrow \{ \text{既約 } \mathbf{H}\text{-加群} \}$$

という 1 対 1 対応を導く．これにより，両辺の Hermite 加群たちは完全に対応する．また，左辺に属する $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群がユニタリであれば，対応する右辺の $\mathbf{H}$-加群もユニタリである[*12]．

参考文献

[AS] T. Arakawa and T. Suzuki, *Duality between $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ and the degenerate affine Hecke algebra*, J. Algebra **209** (1998), 288–304.

[Ba] D. Barbasch, *The unitary spherical spectrum for split classical groups*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), 265–356.

[BCP] D. Barbasch, D. Ciubotaru and A. Pantano, *Unitarizable minimal principal series of reductive groups*, In: *Representation theory of real reductive Lie groups*, Contemp. Math., **472**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 63–136.

[BM] D. Barbasch and A. Moy, *Reduction to real infinitesimal character in affine Hecke algebras*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993) 611–635.

[Bo] A. Borel, *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*, Invent. Math. **35** (1976) 233–259.

[Ch] I. Cherednik, *A unification of Knizhnik-Zamolodchikov equations and Dunkl operators via affine Hecke algebras*, Invent. Math. **106** (1991), 411–431.

[CT1] D. Ciubotaru and P. E. Trapa, *Functors for unitary representations of classical real groups and affine Hecke algebras*, Adv. Math. **227** (2011), 1585–1611.

[CT2] D. Ciubotaru and P. E. Trapa, *Duality between $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{Q}_p)$, and the degenerate affine Hecke algebra for $\mathfrak{gl}(n)$*, Amer. J. Math. **134** (2012), 141–170.

[EFM] P. Etingof, R. Freund and X. Ma, *A Lie-theoretic construction of some representations of the degenerate affine and double affine Hecke algebras of type BC_n*, Represent. Theory **13** (2009), 33–49.

[*12] 現段階で逆が成り立つかは不明である．

[Gu] J. Gu, *Single-petaled K-types and Weyl group representations for classical groups*, PhD thesis, MIT, 2008.

[HC] Harish-Chandra, *Representations of semisimple Lie groups. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 26–65.

[KV] A. W. Knapp and D. A. Vogan, *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series **45**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[LM] J. Lepowsky and G. W. McCollum, *On the determination of irreducible modules by restriction to a subalgebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 45–57.

[Kn] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction. Second edition*, Progress in Mathematics **140**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[Lu1] G. Lusztig, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras, I*, Publ. Math. de IHES **67** (1988), 145–202.

[Lu2] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 599–635.

[O1] H. Oda, *Generalization of Harish-Chandra's basic theorem for Riemannian symmetric spaces of non-compact type*, Adv. Math. **281** (2007), 549–596.

[O2] H. Oda, *Differential-difference operators and radial part formulas for non-invariant elements*, preprint, arXiv:1402.3231.

[Op] E. M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. **175**(1995), no. 1, 75–121.