数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 80-93

Remarks on quantum unipotent subgroup and dual canonical basis

木村 嘉之(神戸大学理学研究科数学専攻)
Yoshiyuki Kimura (Department of Mathematics, Kobe University)*†

概要

Quantum unipotent subgroup is the quantum coordinate ring of the unipotent subgroup associated with a finite subset which is defined by a Weyl group element of a symmetrizable Kac-Moody Lie algebra. I explain about the quantum coordinate ring of the pro-unipotent subgroup associated with a cofinite subset associated with a Weyl group element and its compatibility with the dual canonical basis and the multiplicity-free property between the dual canonical basis element in the quantum unipotent subgroups and the one in the opposite. This is based on [Kim15].

1 動機付け

Baumann-Kamnitzer-Tingley [BKT14] は，対称Kac-Moody Lie環$\mathfrak{g}$に付随する結晶構造$\mathscr{B}(\infty)$の積分解(以下では簡単のため，BKT分解という。)を，柏原-斉藤 [KS97]による前射影多元環の冪零表現のなす多様体(=Lusztig箙多様体)の既約成分のなす集合としての実現を用いて，前射影多元環の加群圏の安定性条件に付随するHarder-Narashimhanフィルトレーションに付随するねじれ対(の組)を用いて与えた。

定理 1.1 (Baumann-Kamnitzer-Tingley [BKT14, Theorem 4.4]). $(\mathcal{T},\mathcal{F})$を前射影多元環上の加群圏のねじれ対であって，開集合を与えるものとする。$\mathrm{Irr}\,(\Lambda)$をLusztig箙多様体Λの既約成分のなす集合，$\mathrm{Irr}\,(\Lambda^{\mathcal{T}})$ (resp. $\mathrm{Irr}\,(\Lambda^{\mathcal{F}})$)をそれぞれ一般の点が$\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{F}$)の点であるようなΛの既約成分のなす部分集合とする。このとき全単射

$$\mathrm{Irr}\,(\Lambda) \simeq \mathrm{Irr}\,(\Lambda^{\mathcal{T}}) \times \mathrm{Irr}\,(\Lambda^{\mathcal{F}})$$

が存在する。

前射影多元環上の加群圏のねじれ対として，Buan-Iyama-Reiten-Scott[BIRS09]，Geiss-Leclerc-Schröer[GLS11]らによるWeyl群の元$w \in W$に付随するものが知られている。それらについては，前射影多元環の鏡映関手と斉藤結晶鏡映(Saito crystal reflection)の比較を用いて，結晶構造を用いた組み合わせ的記述[BKT14, 5.5]を与えている。結晶構造を用いた解釈は，結晶構造$\mathscr{B}(\infty)$のLusztig箙多様体の既約成分としての実現そのものには依存しないゆえ，BKT分解の他の実現(標準基底等)に

* E-mail : ykimura@math.kobe-u.ac.jp
† 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1

よる分解の意味付け及びその内在的な意味付け等が問題として考えられる。本稿の目的は，結晶構造$\mathscr{B}(\infty)$の"実現"である双対標準基底に対して，BKT分解の構造を理解することである。また，BKT分解の応用として，Berenstein-Greensteinの予想への応用について述べる

1.1 記号

$(I, \mathfrak{h}, P, P^\vee, \Pi, \Pi^\vee, (-,-))$をルートデータとする。すなわち，$I$を有限添字集合，$\mathfrak{h}$を有限次元$\mathbb{Q}$ベクトル空間，$P \subset \mathfrak{h}^*$をウェイト格子，$P^\vee = \{h \in \mathfrak{h} \mid \langle h, P\rangle \subset \mathbb{Z}\}$を余ウェイト格子と自然なペアリング$\langle -,-\rangle : P^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} P \to \mathbb{Z}$，$\Pi = \{\alpha_i\}_{i\in I} \subset P$を単純ルートのなす集合，$\Pi^\vee = \{h_i\}_{i\in I} \subset P^\vee$を単純余ルートのなす集合，$(-,-) : P \times P \to \mathbb{Q}$を$\mathbb{Q}$-値 対称双線型形式であって，以下の条件を満たすものを言う:

(1) 任意の$i \in I$に対して，$d_i := (\alpha_i, \alpha_i)/2 \in \mathbb{Z}_{>0}$を満たす。

(2) 任意の$i \in I$及び$\lambda \in P$に対して，$\langle h_i, \lambda\rangle = 2(\alpha_i, \lambda)/(\alpha_i, \alpha_i)$を満たす。

(3) $A = (\langle h_i, \alpha_j\rangle)_{i,j\in I}$は(対称化可能)一般化Cartan行列を定める，すなわち$\langle h_i, \alpha_i\rangle = 2$，$i \neq j$に対して$\langle h_i, \alpha_i\rangle \in \mathbb{Z}_{\le 0}$かつ$\langle h_i, \alpha_j\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle h_j, \alpha_i\rangle = 0$を満たす。

(4) $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{h}^*$は線型独立。

簡単のため，$(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$は極小，すなわち$\dim \mathfrak{h} = 2\#I - \operatorname{rank}(A)$を満たすとする。

$Q = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset P$をルート格子，$Q^\vee = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}h_i \subset P^\vee$を余ルート格子といい，$Q_+ = \sum \mathbb{Z}_{\ge 0}\alpha_i \subset Q$ $Q_- = -Q_+$と定める。また$\xi = \sum_{i\in I} \xi_i\alpha_i \in Q$に対して，$\operatorname{ht}(\xi) = \sum \xi_i \in \mathbb{Z}$と定める。$P_+ = \{\lambda \in P \mid \langle h_i, \lambda\rangle \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \text{ for all } i \in I\}$を優整ウェイトのなすモノイドとする。

$(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$は，対称化可能Cartan行列$A$の実現を与える。実現$(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$に付随するKac-Moody Lie環を$\mathfrak{g}$とする。すなわち，$\{e_i\}_{i\in I} \cup \{f_i\}_{i\in I} \cup \mathfrak{h}$を生成元として，

$$
\begin{gathered}
[h, h'] = 0 \ (h, h' \in \mathfrak{h}), \\
[h, e_i] = \langle h, \alpha_i\rangle e_i, [h, f_i] = -\langle h, \alpha_i\rangle f_i, \\
[e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i, \\
\operatorname{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0, \operatorname{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0.
\end{gathered}
$$

を基本関係式とするLie環とする。

$\{e_i\}_{i\in I}$ (resp. $\{f_i\}_{i\in I}$) の生成する部分Lie環を，$\mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_-$)とすると，$\mathfrak{g}$はベクトル空間としての同型$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$(三角分解)をもつ。Lie環に関するPoincaré-Birkhoff-Wittの定理より，普遍展開環の線形空間としての同型

$$
\mathbf{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes \mathbf{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathbf{U}(\mathfrak{n}_+) \xrightarrow{\sim} \mathbf{U}(\mathfrak{g})
$$

が，積写像によって与えられる。

$\mathfrak{g}$は$\mathfrak{h}$の随伴作用に関する同時固有空間分解であるルート空間分解をもつ，すなわちベクトル空間としての分解

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha, \\
\mathfrak{g}_\alpha = \left\{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle h, \alpha\rangle x \ {}^\forall h \in \mathfrak{h}\right\}.
\end{gathered}
$$

を持つ。$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$をルートのなす集合として，$\Delta_+$ (resp. Δ_-)をそれぞれ，$\mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_-$)に対応する部分集合とする。

Gを$\mathfrak{g}$に付随するKac-Moody群とし，$N_\pm$を$\mathfrak{n}_\pm$に付随する副冪単部分群とし，Hを$\mathfrak{h}$に対応する極大トーラスとする。

1.2 完全基底

Lie環の表現(ないし普遍展開環)の“良い基底”(good base)については，Gelfand-Zelevinsky [GZ86]，Baclawski[Bac84]およびMathieu [Mat90]らによって研究され，テンソル積重複度(Littlewood-Richardson規則)やgood filtrationの構成などに応用された。

Lusztig[Lus93]，柏原[Kas91]による標準基底(=降標準基底)は，“結晶構造”とよばれる組合せ的構造をもつ“良い”基底であり，基底の組み合わせ的な構造を調べることで，テンソル積重複度(Littlewood-Richardson規則)やgood filtrationに関してより精密な結果が得られることが知られている。また結晶構造は，組み合わせ的実現や箙多様体による実現などをもつ。Berenstein-Kazhdan[BK07]は，冪単結晶(unipotent crystal)およびその超離散化の理論に関連して，**完全基底(perfect basis)**と呼ばれる基底のクラスを導入した。完全基底の双対基底の特徴付けは，Baumann[Bau12]によってbases of canonical typeや，Kahng-Kang-Kashiwara-Suh[KKKS15]によってdual perfect baseとして述べられている。以下では，**昇完全基底(upper perfect base)**と**降完全基底(lower perfect base)**として述べる[*1]。

$\mathfrak{n}_-$の普遍展開環$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$は，Chevalley生成元$\{f_i \mid i\in I\}$を生成元として，Serre関係式

$$\mathrm{ad}\,(f_i)^{1-a_{ij}}\,(f_j)=0$$

を基本関係式とする非可換$\mathbb{C}$代数である。$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$は$\deg(f_i)=-\alpha_i$とする$Q_-$次数付き代数$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)=\bigoplus_{\xi\in Q_-}\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)_\xi$である。任意の$\xi\in Q_-$に対して，$\dim\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)_\xi<\infty$であることに注意しておく。$F_i\colon\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)\to\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$を左乗法で定義する，すなわち$F_i(x)=f_ix$で定め，$*\colon\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)\to\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$を$*(f_i)=f_i$で定める反対合とする。

定義 1.2. $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$の$\mathbb{C}$-基底$\mathcal{B}^{\mathrm{low}}$が**降完全基底(lower perfect base)**であるとは，以下の条件をみたすことを言う。

(1) 任意の$\xi\in Q_-$に対して，$\mathcal{B}^{\mathrm{low}}\cap\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)_\xi$が，$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)_\xi$の基底をなし，$1\in\mathcal{B}^{\mathrm{low}}$。

(2) $\mathcal{B}^{\mathrm{low}}$は$*$で安定である。すなわち，$*\left(\mathcal{B}^{\mathrm{low}}\right)=\mathcal{B}^{\mathrm{low}}$をみたす。

(3) 任意の$i\in I$と非負整数$c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して，$\mathcal{B}^{\mathrm{low}}\cap\mathrm{Im}\,(F_i^c)$が$\mathrm{Im}\,(F_i^c)$の基底をなす。

(4) 任意の$i\in I$と非負整数$c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して，$F_i^{(c)}=F_i^c/c!\colon\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)\to\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$の誘導する線形写像

$$F_i^{(c)}=F_i^c/c!\colon\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)/\mathrm{Im}\,(F_i)\to\mathrm{Im}\,(F_i^c)/\mathrm{Im}\left(F_i^{c+1}\right)$$

は誘導された$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)/\mathrm{Im}\,(F_i)$および$\mathrm{Im}\,(F_i^c)/\mathrm{Im}\left(F_i^{c+1}\right)$の基底の間の全単射を与える。

降完全基底の公理より，優整ウェイト$\lambda\in P_+$に対して，部分空間

$$\sum_{i\in I}\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)\,f_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}$$

[*1] 昇(降)完全基底および昇(降)大域基底は，それぞれの定義に現れる昇(降)鎖列に関する整合性ということから訳出した。訳出のアイデアについては，電気通信大学の榎本直也氏との議論による。

が，$\mathcal{B}^{\mathrm{low}} \cap \sum_{i\in I} \mathrm{U}(\mathfrak{n}_-) f_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}$によって生成されることが従い，優整ウェイトに付随する可積分最高ウェイト加群$V(\lambda) \simeq \mathrm{U}(\mathfrak{n}_-) / \sum_{i\in I} \mathrm{U}(\mathfrak{n}_-) f_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}$の基底を誘導する。

次数双対空間にも同様の基底を考えることができる。$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$の次数双対は，対応する副冪単部分群$N$の座標環$\mathbb{C}[N]$と同一視される。$F_i$の双対作用素を，$E_i$で表す。$E_i$は局所冪零であることに注意する。また，$*: \mathbb{C}[N] \to \mathbb{C}[N]$を$*: \mathrm{U}(\mathfrak{n}_-) \to \mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$の双対作用素とする。

定義 1.3. $\mathbb{C}[N]$の$\mathbb{C}$基底$\mathcal{B}^{\mathrm{up}}$が昇完全基底(upper perfect base)であるとは，以下の条件をみたすことを言う。

(1) 任意の$\xi \in Q$に対して，$\mathcal{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbb{C}[N]_\xi$が$\mathbb{C}[N]_\xi$の基底をなし，$1 \in \mathcal{B}^{\mathrm{up}}$。

(2) $\mathcal{B}^{\mathrm{up}}$は$*$で安定である。すなわち，$*(\mathcal{B}^{\mathrm{up}}) = \mathcal{B}^{\mathrm{up}}$をみたす。

(3) 任意の$i \in I$と$c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して，$\mathrm{Ker}(E_i^c) \cap \mathcal{B}^{\mathrm{up}}$が$\mathrm{Ker}(E_i^c)$の基底をなす。

(4) 任意の$i \in I$と$c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して，$E_i^{(c)} := E_i^c/c!: \mathbb{C}[N] \to \mathbb{C}[N]$の誘導する線形写像

$$E_i^{(c)} := E_i^c/c!: \mathrm{Ker}\left(E_i^{c+1}\right)/\mathrm{Ker}\left(E_i^c\right) \to \mathrm{Ker}(E_i)$$

は，誘導された$\mathrm{Ker}\left(E_i^{c+1}\right)/\mathrm{Ker}(E_i^c)$及び$\mathrm{Ker}(E_i)$の誘導する基底の間の全単射を与える。

上完全基底の公理より，$\lambda \in P_+$に対して，部分空間

$$\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\left(E_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}\right)$$

が，$\mathcal{B}^{\mathrm{up}} \cap \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\left(E_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}\right)$によって生成されることがわかる。

注意 1.4. Gelfand-Zelevinsky [GZ86], Baclawski [Bac84]およびMathieu [Mat90]らによって調べられていた“良い基底”の定義は，Lie環の表現Mの基底$\mathcal{B}$であって，任意の優整ウェイト$\lambda \in P_+$に対して，部分空間

$$\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\left(e_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}\right)$$

が$\mathcal{B} \cap \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\left(e_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}\right)$によって生成されていることを要請するものであり，昇完全基底の公理は，good baseの公理を“結晶構造”を用いて精密化したものと言える。

完全基底は，基底の底集合に結晶構造を誘導し，結晶構造は，完全基底の取り方そのものには，依存しないことが知られている。

例 1.5 (完全基底の例). (1) Lusztig[Lus93] , 柏原[Kas91] による標準基底(=降大域基底)$\mathrm{B}^{\mathrm{low}}$(の特殊化)は，降完全基底である。

(2) Lusztig[Lus00]による半標準基底$\mathcal{S}$は，降完全基底である。

1.3 整合性予想

昇完全基底とWeyl群に付随する部分群の座標環に関する整合性の予想を述べる。

$s_i(\lambda) = \lambda - \langle h_i, \lambda\rangle \alpha_i$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$で定義される単純鏡映で生成される$GL(\mathfrak{h}^*)$の部分群をWeyl群といい，$W$で表す。また，$\ell = \ell_S: W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$を$S = \{s_i \mid i \in I\}$で定まる長さ関数とする。また，$w \in W$に対して，$I(w)$で最短表示のなす集合とする。

$w \in W$に対して，$\Delta_+ \cap w\Delta_-$を考える。このとき，$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$に対して

$$\Delta_+ \cap w\Delta_- = \left\{\beta_{k,\boldsymbol{i}} := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) \mid 1 \leq k \leq \ell\right\}$$

となり，$\Delta_+ \cap w\Delta_-$は，$\#(\Delta_+ \cap w\Delta_-) = \ell(w)$なる有限部分集合をなす。

$w \in W$の持ち上げ$\dot{w} \in \mathrm{Norm}_G(H)$に対して，$\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(\dot{w})(\mathfrak{n}_\mp)$および$\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(\dot{w})(\mathfrak{n}_\pm)$は，$\Delta_\pm \cap w\Delta_\mp$および$\Delta_\pm \cap w\Delta_\pm$に対応する部分Lie環であり，ベクトル空間としての直和分解

$$\mathfrak{n}_\pm = (\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(\dot{w})(\mathfrak{n}_\mp)) \oplus (\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(\dot{w})(\mathfrak{n}_\pm))$$

をなす。Poincare-Birkhoff-Wittの定理より，$\mathbf{U}(\mathfrak{n}_\pm)$における積写像は，ベクトル空間としての同型写像

$$\mathbf{U}(\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(w)(\mathfrak{n}_\mp)) \otimes \mathbf{U}(\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(w)(\mathfrak{n}_\pm)) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{U}(\mathfrak{n}_\pm)$$

を誘導する。また，$\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(\dot{w})(\mathfrak{n}_\mp)$ および$\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(\dot{w})(\mathfrak{n}_\pm)$に対応する冪単部分群$N_\pm \cap \dot{w}N_\mp\dot{w}^{-1}$および(副)冪単部分群$N_\pm \cap \dot{w}N_\pm\dot{w}^{-1}$に対して，$N_\pm$における積は，(ind) varietyとしての同型

$$\left(N_\pm \cap \dot{w}N_\mp\dot{w}^{-1}\right) \times \left(N_\pm \cap \dot{w}N_\pm\dot{w}^{-1}\right) \xrightarrow{\simeq} N_\pm$$

を誘導し，それぞれの左(右)作用に関する不変式環と補部分群の座標環との同一視

$$\mathbb{C}[N_\pm]^{N_\pm \cap \dot{w}N_\pm\dot{w}^{-1}} \simeq \mathbb{C}\left[N_\pm \cap \dot{w}N_\mp\dot{w}^{-1}\right],$$
$${}^{N_\pm \cap \dot{w}N_\mp\dot{w}^{-1}}\mathbb{C}[N_\pm] \simeq \mathbb{C}\left[N_\pm \cap \dot{w}N_\pm\dot{w}^{-1}\right]$$

を誘導する。以下は，Weyl群の元に付随する部分群の座標環と上完全基底との整合性である。

予想 1.6 (整合性予想). $\mathcal{B}^{\mathrm{up}}$を$\mathbb{C}[N_-]$の上完全基底とする。このとき以下が成り立つ。
(1) $\mathcal{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbb{C}[N_\pm]^{N_\pm \cap \dot{w}N_\pm\dot{w}^{-1}}$は，$\mathbb{C}[N_\pm]^{N_\pm \cap \dot{w}N_\pm\dot{w}^{-1}}$を生成する。
(2) $\mathcal{B}^{\mathrm{up}} \cap {}^{N_\pm \cap \dot{w}N_\mp\dot{w}^{-1}}\mathbb{C}[N_\pm]$は，${}^{N_\pm \cap \dot{w}N_\mp\dot{w}^{-1}}\mathbb{C}[N_\pm]$を生成する。

$w = s_i$のときには，上完全基底の公理より従う。

Geiss-Leclerc-Schröer は，Lusztigによる双対半標準基底$\mathcal{S}^*$に関して，前射影多元環のクラスター傾斜理論を用いて以下の整合性[GLS11, Theorem 15.1 (iii)]を示した。

定理 1.7 (Geiss-Leclerc-Schröer). $\mathcal{S}^* \cap \mathbb{C}[N_-]^{N_- \cap wN_-w^{-1}}$が，$\mathbb{C}[N_-]^{N_- \cap wN_-w^{-1}}$を生成する。

2 量子冪単部分群

双対標準基底の整合性に関する結果[Kim12, Kim15]を述べる。

2.1 量子展開環

ルートデータを固定する。qを不定元とし，$i \in I$に対して，$q_i = q^{d_i}$と定め，$\xi = \sum \xi_i\alpha_i \in Q$に対して，$q_\xi := \prod_{i \in I} q_i^{\xi_i}$と定める。

$n \in \mathbb{Z}$ と$i \in I$に対して，

$$[n]_i := \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$$

と定める。また$n > 0$に対して，$[n]_i! = [n]_i[n-1]_i \cdots [1]_i$ と定め，$[0]! = 1$と約束する。

定義 2.1. 対称化可能Kac-Moody Lie環 $\mathfrak{g}$ に対して，$\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})$を付随するDrinfeld-神保 量子包絡環を$\{e_i\}_{i\in I}\cup\{f_i\}_{i\in I}\cup\{q^h\}_{h\in P^\vee}$を生成元として，

$$q^h q^{h'} = q^h q^{h'} = q^{h+h'}, q^0 = 1,$$
$$q^h e_i q^{-h} = q^{\langle h,\alpha_i\rangle} e_i, q^h f_i q^{-h} = q^{-\langle h,\alpha_i\rangle} f_i,$$
$$[e_i, f_j] = \delta_{i,j}\frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$
$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k f_i^{(k)} f_j f_i^{(1-a_{ij}-k)} = 0, \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k e_i^{(k)} e_j e_i^{(1-a_{ij}-k)} = 0\ (i\neq j).$$

を基本関係式とする$\mathbb{Q}(q)$代数とする。ここで$k_i = q^{d_i h_i}, f_i^{(c)} = f_i^c/[c]_i!$で定める。

$\{e_i\}_{i\in I}$(resp. $\{f_i\}_{i\in I}$)によって生成される部分$\mathbb{Q}(q)$代数を，$\mathrm{U}_q^+(\mathfrak{g})$(resp. $\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$)であらわす。また，$\mathrm{U}_q^0(\mathfrak{g})$を$\{q^h\}_{h\in P^*}$で生成される部分$\mathbb{Q}(q)$代数とする。$\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})$は，三角分解をもつ，すなわち積写像によって，$\mathbb{Q}(q)$ベクトル空間としての同型

$$\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})\otimes\mathrm{U}_q^0(\mathfrak{g})\otimes\mathrm{U}_q^+(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_q(\mathfrak{g})$$

が成り立つ。$\xi\in Q$に対して，$\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})_\xi = \{x\in\mathrm{U}_q(\mathfrak{g}) \mid q^h x q^{-h} = q^{\langle h,\xi\rangle} x\ h\in P^\vee\}$と定めると，$\mathrm{U}_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\xi\in Q}\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})_\xi$が成り立つ。

$\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$は$\{f_i\}_{i\in I}$で生成される部分$\mathbb{Q}(q)$代数であり，$\{f_i\}_{i\in I}$を生成元とし，$q$-Serre関係式

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k f_i^{(k)} f_j f_i^{(1-a_{ij}-k)} = 0\ (i\neq j)$$

を基本関係式とする$\mathbb{Q}(q)$代数である。$\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})_\xi = \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})\cap\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})_\xi$と定めると，$\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\xi\in Q_-}\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})_\xi$が成り立つ。

定義 2.2. $\mathbb{Q}(q)$-代数としての反対合$*$: $\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})\to\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})$ を

$$*(e_i) = e_i, \qquad *(f_i) = f_i, \qquad *(q^h) = q^{-h}.$$

で定め，スター対合($*$-involution)という。

$\mathbb{Q}$-代数対合 $^-$: $\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})\to\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})$ を

$$\overline{e_i} = e_i, \qquad \overline{f_i} = f_i, \qquad \overline{q} = q^{-1}, \qquad \overline{q^h} = q^{-h}.$$

で定め，バー対合($^-$-involution)という。

2.2 標準基底

標準基底を導入する。まず，結晶基底を導入する。詳しくは [Kas91, Section 3]等を見られたい。

$\mathrm{U}_q^-\otimes\mathrm{U}_q^-$には，積を斉次元$x_1, x_2, y_1, y_2\in\mathrm{U}_q^-$に対して，

$$(x_1\otimes y_1)(x_2\otimes y_2) = q^{-(\mathrm{wt}(x_2),\mathrm{wt}(y_1))} x_1 x_2\otimes y_1 y_2,$$

で定める。このとき$r = r_- \colon \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$を

$$r (f_i) = f_i \otimes 1 + 1 \otimes f_i$$

で定めると，$\mathbb{Q}(q)$代数射に一意的に拡張される。これを捻り余積(twisted coproduct)という。

$\mathbb{Q}(q)$-値非退化対称双線型形式 $(\cdot,\cdot)_K : \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(q)$ を 斉次元$x, y_1, y_2, x_1, x_2, y \in \mathrm{U}_q^-$ に対して，以下の条件をみたすように定める。

$$(1,1)_K = 1, (f_i, f_j)_K = \delta_{ij}, \qquad (r(x), y_1 \otimes y_2)_K = (x, y_1 y_2)_K, (x_1 \otimes x_2, r(y))_K = (x_1 x_2, y)_K$$

但し $(\cdot \otimes \cdot, \cdot \otimes \cdot)_K \colon (\mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})) \otimes (\mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})) \to \mathbb{Q}(q)$ は，斉次元 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$に対して，$(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2)_K = (x_1, y_1)_K (x_2, y_2)_K$ と定める。

$i \in I$に対して，$\mathbb{Q}(q)$-線形写像 ${}_ir \colon \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$ (resp. $r_i \colon \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$) が，左(resp. 右)乗法に関する随伴作用素として，任意の$x, y \in \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$に対して，$({}_ir(x), y)_K = (x, f_i y)_K$(resp. $(r_i(x), y)_K = (x, y f_i)_K$)を満たすように定義される。

このとき，任意の$x, y \in \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$に対して，$q$-Leibnitz法則

$$\begin{aligned} {}_ir(xy) &= {}_i r(x) y + q^{(\mathrm{wt}\, x, \alpha_i)} x {}_ir(y), \\ r_i(xy) &= q^{(\mathrm{wt}\, y, \alpha_i)} r_i(x) y + x r_i(y) \end{aligned}$$

をみたす事がわかる。また，$x \in \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$に対して，

$$[e_i, x] = \frac{r_i(x) k_i - k_i^{-1} {}_ir(x)}{q_i - q_i^{-1}}$$

を満たすことがよく知られている。f_iの左乗法との交換関係を，q-Leibnitz法則から計算することでq-Boson関係式を得ることができ，それを用いて以下の分解を得る。

補題 2.3 ([Lus93, Lemma 38.1.2, Proposition 38.1.6]). $i \in I$に対して，任意の$x \in \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$ は以下の形で一意的に書くことができる。

$$x = \sum_{c \geq 0} f_i^{(c)} x_c \ (x_c \in \mathrm{Ker}({}_ir)).$$

上の分解を用いて，結晶作用素を導入する。

定義 2.4. $x = \sum_{c \geq 0} f_i^{(c)} x_c$に対して，$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i \colon \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g})$を以下で定める。

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i x &= \sum_{c \geq 1} f_i^{(c-1)} x_c, \\ \tilde{f}_i x &= \sum_{c \geq 0} f_i^{(c+1)} x_c. \end{aligned}$$

$\mathbb{Q}(q)$の$\mathbb{Q}$部分代数$\mathcal{A}_0$，および$\mathcal{A}_\infty$を$q = 0$で正則な有理関数，$q = \infty$で正則な有理関数とする。

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\infty) &:= \sum_{\substack{\ell \geq 0 \\ i_1, \cdots, i_\ell \in i}} \mathcal{A}_0 \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell} 1 \subset \mathrm{U}_q^- (\mathfrak{g}), \\ \mathscr{B}(\infty) &:= \left\{ \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell} 1 \bmod q\mathscr{L}(\infty) \middle| l \geq 0, i_1, \cdots, i_\ell \in I \right\} \setminus \{0\} \subset \mathscr{L}(\infty) / q\mathscr{L}(\infty). \end{aligned}$$

と定める。このとき，$\mathscr{L}(\infty)$は$\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$の$\mathcal{A}_0$格子であり，$\mathscr{B}(\infty)$は$\mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty)$の$\mathbb{Q}$上のベクトル空間の基底をなす。$\mathscr{L}(\infty)$を**結晶格子**，$\mathscr{B}(\infty)$を**結晶基底**という。

$\mathcal{A} = \mathbb{Q}[q^{\pm 1}]$とし，$\mathrm{U}_{\mathcal{A}}^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{low}}$を$\left\{f_i^{(c)} \mid i \in I, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$で生成される$\mathcal{A}$部分代数とする。バー対合$^-$: $\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$を用いて，$\overline{\mathscr{L}(\infty)} = \{\overline{x} \mid x \in \mathscr{L}(\infty)\}$と定める。このとき，射影$\mathscr{L}(\infty) \to \mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty)$は，$\mathbb{Q}$ベクトル空間としての同型

$$\mathscr{L}(\infty) \cap \overline{\mathscr{L}(\infty)} \cap \mathrm{U}_{\mathcal{A}}^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{low}} \to \mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty)$$

を誘導する。

定義 2.5. 上の同型写像の，逆写像をG^{low}で表し，$\mathrm{B}^{\mathrm{low}} := \left\{G^{\mathrm{low}}(b) \mid b \in \mathscr{B}(\infty)\right\}$を**標準基底(canonical base)**ないし**降大域基底(lower global base)**という。

双対標準基底(dual canonical base)ないし昇大域基底(upper global base)は，$\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$の非退化内積$(,)_K$を用いて，双対基底として定義される。すなわち，$\sigma = \sigma_K : \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$を$x \in \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$に対して，任意の$y \in \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$に対して

$$(\sigma(x), y)_K = \overline{(x, \overline{y})_K}$$

が成り立つような対合とする。これを**双対バー対合(dual bar involution)**という。また，$\mathcal{A}$格子を

$$\mathrm{U}_{\mathcal{A}}^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{up}} := \left\{x \in \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g}) \mid \left(x, \mathrm{U}_{\mathcal{A}}^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{low}}\right)_K \subset \mathcal{A}\right\}.$$

で定め。なお，$\mathscr{L}(\infty) = \left\{x \in \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g}) \mid (x, \mathscr{L}(\infty))_K \subset \mathcal{A}_0\right\}$という事実に注意しておく。このとき，射影$\mathscr{L}(\infty) \to \mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty)$は$\mathbb{Q}$ベクトル空間としての同型

$$\mathscr{L}(\infty) \cap \sigma(\mathscr{L}(\infty)) \cap \mathrm{U}_{\mathcal{A}}^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{up}} \to \mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty)$$

を誘導する。

定義 2.6. 上の同型写像の逆写像をG^{up}で表し，$\mathrm{B}^{\mathrm{up}} := \{G^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathscr{B}(\infty)\}$を**双対標準基底(dual canonical base)**ないし**昇大域基底(upper global base)**という。

注意 2.7. 非退化内積をとらずに，単にQ次数付きベクトル空間としての双対空間における双対基底を考えることが簡明であるが，さまざまな計算上，具体的な非退化内積をとって計算する方が便利なことが多い。他の正規化としては，$(f_i, f_i)_L = 1/(1 - q_i^{\pm 2})$で正規化するLusztigによる非退化内積もある。また，本稿では，簡明のため，柏原による非退化内積$(,)_K$を採用した。

双対標準基底には，以下の様な積展開の評価式が知られている。$i \in I$と$c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して，$f_i^{\{c\}} = f_i^{(c)}/\left(f_i^{(c)}, f_i^{(c)}\right)_K$と定める。簡単な計算により，$f_i^{\{c\}} = q_i^{c(c-1)/2} f_i^c$であることが分かる[*2]。

定理 2.8 ([Kas12, Proposition 2.2]). 任意の$b \in \mathscr{B}(\infty)$, $i \in I$ および $c \geq 1$に対して，以下の積展開の評価式が成り立つ。

$$f_i^{\{c\}} G^{\mathrm{up}}(b) = q_i^{-c\varepsilon_i(b)} G^{\mathrm{up}}\left(\tilde{f}_i^c b\right) + \sum_{\varepsilon_i(b') < \varepsilon_i(b) + c} F_{i;b,b'}^{\{c\}}(q)\, G^{\mathrm{up}}\left(b'\right)$$

[*2] ここで，$(f_i, f_i)_K = 1$という正規化を用いている。

ここで，展開係数$F^{\{c\}}_{i;b,b'}(q)$は，以下をみたす。

$$F^{\{c\}}_{i;b,b'}(q) := \left(f_i^{\{c\}} G^{\mathrm{up}}(b), G^{\mathrm{low}}\left(b'\right)\right)_K = q_i^{c(c-1)/2}\left(G^{\mathrm{up}}(b), ({}_ir)^c G^{\mathrm{low}}\left(b'\right)\right)_K \in q_i^{-c\varepsilon_i(b)} q\mathbb{Z}[q]$$

2.3 Lusztigの組み紐群対称性

Wを$\mathfrak{g}$のWeyl群とする。Lusztig [Lus93, Section 37.1.3]に従って，$i \in I$と$\epsilon \in \{\pm 1\}$に対して，$\mathbb{Q}(q)$-代数自己同型$T_i\left(=T''_{i,1}\right) : \mathbf{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$を以下で定義する。

$$T_i\left(q^h\right) = q^{s_i(h)},$$
$$T_i(e_j) = \begin{cases} -f_i k_i & \text{for } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r+s=-\langle h_i, \alpha_j\rangle} (-1)^r q_i^{-r} e_i^{(s)} e_j e_i^{(r)} & \text{for } j \neq i, \end{cases}$$
$$T_i(f_j) = \begin{cases} -k_i^{-1} e_i & \text{for } j = i, \\ \displaystyle\sum_{r+s=-\langle h_i, \alpha_j\rangle} (-1)^r q_i^{r} f_i^{(r)} f_j f_i^{(s)} & \text{for } j \neq i. \end{cases}$$

$\{T_i\}_{i\in I}$は組み紐関係式をみたすこと及び，$T_i^{-1} = * \circ T_i \circ *$を満たすことが知られている。$T_i$と${}_ir$及び$r_i$の関係は以下で述べられる。

命題 2.9 ([Lus93, Proposition 38.1.6, Lemma 38.1.5]). (1) $i \in I$に対して，以下が成り立つ。：

$$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) = \left\{x \in \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \mid {}_ir(x) = 0\right\},$$

(2) $i \in I$に対して，$(\cdot,\cdot)_K$に関する以下の直交分解が成り立つ。：

$$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) = \left(\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\right) \oplus f_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}),$$

$\mathbf{B}^{\mathrm{low}}$は降完全基底であるから，$f_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$が，それぞれ$\mathbf{B}^{\mathrm{low}} \cap f_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$によって生成されている。よって，直交補空間に関しては，$\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$が，それぞれ$\mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$によって生成されていることが従う。上の分解を繰り返し使うことで，

$$\mathcal{F}^{\mathrm{up}}(i,c) := \bigoplus_{c'=0}^{c} f_i^{c'}\left(\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})\right)$$

が$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$との共通部分によって生成されていることも従う。

以下の結果は斉藤 [Sai94]による。

命題 2.10 ([Sai94, Proposition 3.4.7, Corollary 3.4.8]). (1) $x \in \mathscr{L}(\infty) \cap T_i^{-1}\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ および $b := x \bmod q\mathscr{L}(\infty) \in \mathscr{B}(\infty)$に対して，以下が成り立つ。

$$T_i(x) \in \mathscr{L}(\infty) \cap T_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}),$$
$$T_i(x) \equiv \tilde{f}_i^{*\varphi_i(b)} \tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)} b \bmod q\mathscr{L}(\infty) \in \mathscr{B}(\infty).$$

(2) σ_i: $\{b \in \mathscr{B}(\infty) \mid \varepsilon_i^*(b) = 0\} \to \{b \in \mathscr{B}(\infty) \mid \varepsilon_i(b) = 0\}$ を$\sigma_i(b) = \tilde{f}_i^{*\varphi_i(b)} \tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)} b$で定義される写像とする。このとき σ_iは全単射であり，逆写像は，$\sigma_i^*(b) = (* \circ \sigma_i \circ *)(b) = \tilde{f}_i^{\varphi_i^*(b)} \tilde{e}_i^{*\varepsilon_i^*(b)} b$で与えられる。

全単射σ_iおよびσ_i^*を**斉藤結晶鏡映(Saito crystal reflection)**という。Baumann-Kamnitzer-Tingley [BKT14, Section 5.5]に従って，$\hat{\sigma}_i(b) := \sigma_i(\tilde{e}_i^{*\max}(b))$および$\hat{\sigma}_i^*(b) := \sigma_i^*(\tilde{e}_i^{\max}(b))$と約束しておく。

${}^i\pi\colon \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$を命題2.9 (2)におけるそれぞれ$f_i\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$を核とする直交射影とする。このとき，以下の双対標準基底と組み紐群作用との関係がある。

定理 2.11. $\varepsilon_i^*(b) = 0$を満たす$b \in \mathscr{B}(\infty)$に対して，以下が成り立つ。

$$T_i\left(\pi^i G^{\mathrm{low}}(b)\right) =^i \pi\left(G^{\mathrm{low}}(\sigma_i(b))\right),$$
$$\left(1-q_i^2\right)^{\langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle} T_i G^{\mathrm{up}}(b) = G^{\mathrm{up}}(\sigma_i b).$$

注意 2.12. ここで，$\left(1-q_i^2\right)^{\langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle}$は非退化内積$(-,-)_K$の取り方に起因する項である。Lusztigによる非退化内積$(-,-)_L$を採用して定義すると，この項は存在しない。

2.4 有限型

Weyl群の元$w \in W$に対して，部分代数$\mathbf{U}_q^- \cap T_w\mathbf{U}_q^{\geq 0}$を考える。

定義 2.13. 最短表示$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$および$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_\ell) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell$に対して，

$$F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) = f_{i_1}^{(c_1)} T_{i_1}\left(f_{i_2}^{(c_1)}\right) \cdots \left(T_{i_1} \cdots T_{i_{\ell-1}}\right)\left(f_{i_\ell}^{(c_\ell)}\right)$$

と定める。

LusztigとBeck-Chari-Pressleyの結果を組み合わせる事により，以下が分かる。

定理 2.14. $w \in W$と最短表示$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$に対して，$F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{i}) = \left\{F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \mid \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell\right\}$は$\mathbf{U}_q^- \cap T_w\mathbf{U}_q^{\geq 0}$の基底を与える。

$F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{i})$を最短表示$\boldsymbol{i} \in I(w)$に付随した**Poincaré-Birkhoff-Witt型基底(Poincaré-Birkhoff-Witt base)**と言う。

注意 2.15. 旧来，$F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{i})$によって生成された部分空間をDe Concini-Kac-Procesi達が導入し，量子Schubert胞体(quantum Schubert cell)と呼んでいた。Levendorskii-Soibelmanによる$F^{\mathrm{low}}(\beta_{k,\boldsymbol{i}})$の間の$q$交換関係式の凸性により，部分代数であることを示していた。また，部分空間自体が$\boldsymbol{i}$の取り方によらない事は，rank2の場合に帰着することにより示されていた。

以下の結果は，斉藤[Sai94]による。

定理 2.16. $w \in W$と最短表示$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$および$\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell$に対して，以下が成り立つ。

(1) $F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \in \mathscr{L}(\infty)$

(2) $b(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) := F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \mod q\mathscr{L}(\infty) \in \mathscr{B}(\infty)$.

定義 2.17. $w \in W$と最短表示$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$および$\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell$に対して，

$$F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) := F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) / \left(F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}), F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})\right)_K$$

と定める。

$F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{i})$は，$(,)_K$に関して直交基底であることが知られており，$F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{i}) := \{F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{i}) | \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^{\ell}_{\geq 0}\}$は，$\mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^{\geq 0}$の基底をなす。これを，**双対Poincaré-Birkhoff-Witt基底(dual Poincaré-Birkhoff-Witt base)**という。

定理 2.18. $w \in W$に対して，以下が成り立つ。
(1) $\mathrm{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^{\geq 0}$は$\mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^{\geq 0}$を生成する。
(2) 最短表示$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$および$\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^{\ell}_{\geq 0}$に対して，以下が成り立つ。

$$G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c},\boldsymbol{i})) - F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{i}) \in \sum_{\boldsymbol{c}' <_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{c}} q\mathbb{Z}[q] F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}',\boldsymbol{i}).$$

$F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{i})$への$\sigma$作用をLevendorskii-Soibelmanのq交換関係式を用いて，三角性を示すことで，σ不変性と$F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{i})$との変換行列の三角性で特徴付けられる基底が構成される。また，balanced tripleによる双対標準基底の特徴付けにより，得られた基底が双対標準基底と一致することが証明できる。

2.5 余有限型

$w \in W$に対して，$\mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^-$を調べる。(有限型およびアフィン型を除いて)$\mathfrak{n}_\pm \cap \mathrm{Ad}(\dot{w})(\mathfrak{n}_\pm)$のルート基底の構成は知られておらず，$\mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^-$の“Poincaré-Birkhoff-Witt型基底”は知られていない。しかしながら，以下の非自明な“分解”が分かる。

命題 2.19 ([Kim15, Proposition 3.4]). Weyl群の元 wと，その最短表示$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$に対して，

$$\mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^- = \mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T_{i_1}\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap T_{i_1}T_{i_2}\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g}) \cap \cdots \cap T_{i_1}\cdots T_{i_\ell}\mathrm{U}_q^-(\mathfrak{g})$$

が成り立つ。

定理 2.20 ([Kim15]). Weyl群の元 $w \in W$に対して，$\mathrm{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^-$ は，$\mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^-$ を生成する。

Proof. まず，$w = s_i$の場合は，直交分解$\mathrm{U}_q^- = (\mathrm{U}_q^- \cap T_i\mathrm{U}_q^-) \oplus f_i\mathrm{U}_q^-$と$\mathrm{B}^{\mathrm{low}} \cap f_i\mathrm{U}_q^-$が$f_i\mathrm{U}_q^-$を生成することから従う。上の命題を用いることで，$w$の長さ$\ell(w)$に関する帰納法により，証明される。 □

2.6 応用：Berenstein-Greenstein 予想

Berenstein-Greenstein[BG14]は，以下の主張を予想した。

予想 2.21. Weyl群の元 $w \in W$に対して，U_q^-における積写像は，ベクトル空間としての同型

$$(\mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^{\geq 0}) \otimes (\mathrm{U}_q^- \cap T_w\mathrm{U}_q^-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_q^-$$

を与える。

$\mathrm{U}_q(\mathfrak{g})$の三角分解から，単射性は直ちに従う。よって，非自明な点は，全射性である。

定理 2.22. Berenstein-Greensteinによる予想は，任意の$w \in W$に対して，正しい。

注意 2.23. 谷崎俊之氏[Tan14, Proposition 2.10]によって，Lusztig form、De Concini-Kac form、De Concini-Procesi formとよばれる$\mathcal{A}$-form上での自由加群としてのテンソル積分解を証明されてい

る。双対標準基底の定める$\mathcal{A}$-formに関する全射性を以下で証明する。なお，双対標準基底を定義する非退化内積の取り方によって，De Concini-Kac formおよびDe Concini-Procesi formに関する主張が得られる。

この主張は，有限型の場合には，Poincare-Birkhoff-Witt基底の構成より従うので，無限型のみ非自明な主張となる。証明は，$\mathrm{U}_q^- \cap T_w \mathrm{U}_q^{\geq 0}$と$\mathrm{U}_q^- \cap T_w \mathrm{U}_q^-$がそれぞれ双対標準基底と整合的であるので，それぞれの双対標準基底の元の間の積を調べる。

はじめに，Baumann-Kamnitzer-Tingleyは，前射影多元環上の加群圏のねじれ対(torsion pair)を用いて，(対称型Kac-Moody Lie環$\mathfrak{g}$に対する)結晶構造$\mathscr{B}(\infty)$の"積分解"を与えたと述べたが，Berenstein-Greensteinによる予想は，その答えと考えることができる。

斉藤結晶鏡映を用いて，$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$に沿った$\boldsymbol{i}$-Lusztigデータを定義する。

定義 2.24. (1) $w \in W$と$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$に対して，$\boldsymbol{i}$-Lusztigデータ$L_{\boldsymbol{i}}(b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$を

$$L_{\boldsymbol{i}}(b) = \left(\varepsilon_{i_1}(b), \varepsilon_{i_2}\left(\hat{\sigma}_{i_1}^*(b)\right), \cdots, \varepsilon_{i_\ell}\left(\hat{\sigma}_{i_{\ell-1}}^* \cdots \hat{\sigma}_{i_1}^*(b)\right)\right)$$

で定める。

(2) $w \in W$と$\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$に対して，$\tau_{\boldsymbol{i}}(b), \tau^{\boldsymbol{i}}(b) \in \mathscr{B}(\infty)$を以下で定める:

$$\begin{aligned} \tau_{\boldsymbol{i}}(b) &:= b\left(L_{\boldsymbol{i}}(b), \boldsymbol{i}\right), \\ \tau^{\boldsymbol{i}}(b) &:= \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_\ell} \hat{\sigma}_{i_\ell}^* \hat{\sigma}_{i_{\ell-1}}^* \cdots \hat{\sigma}_{i_1}^*(b). \end{aligned}$$

構成から，$\boldsymbol{i}$-Lusztigデータは，全射$L_{\boldsymbol{i}} \colon \mathscr{B}(\infty) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$を定める。$\tau_{\boldsymbol{i}}$は，$L_{\boldsymbol{i}}$のsectionである。

上の命題は，B^{up}への双対Poincaré-Birkhoff-Witt単項式の積の評価式から，証明される。

命題 2.25. (1) $b \in \mathscr{B}\left(\mathrm{U}_q^- \cap T_w \mathrm{U}_q^-\right)$ および$\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$に対して，

$$F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})\, G^{\mathrm{up}}(b) - G^{\mathrm{up}}\left(\tilde{f}_{i_1}^{c_1} \sigma_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_{\ell-1}}^{c_{\ell-1}} \sigma_{i_{\ell-1}} \tilde{f}_{i_\ell}^{c_\ell} \sigma_{i_\ell} \sigma_{i_\ell}^* \cdots \sigma_{i_1}^*(b)\right) \in \sum_{L\left(b', \boldsymbol{i}\right) <_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{c}} q\mathbb{Z}[q]\, G^{\mathrm{up}}\left(b'\right)$$

を満たす。

(2) $b \in \mathscr{B}\left(\mathrm{U}_q^- \cap T_w \mathrm{U}_q^-\right)$ および$\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$に対して，

$$G^{\mathrm{up}}\left(b(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})\right) G^{\mathrm{up}}(b) - G^{\mathrm{up}}\left(\tilde{f}_{i_1}^{c_1} \sigma_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_{\ell-1}}^{c_{\ell-1}} \sigma_{i_{\ell-1}} \tilde{f}_{i_\ell}^{c_\ell} \sigma_{i_\ell} \sigma_{i_\ell}^* \cdots \sigma_{i_1}^*(b)\right) \in \sum_{L\left(b', \boldsymbol{i}\right) <_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{c}} q\mathbb{Z}[q]\, G^{\mathrm{up}}\left(b'\right)$$

を満たす。

この命題を用いて，以下の定理が得られる。

定理 2.26. $b \in \mathscr{B}(\infty)$に対して，

$$G^{\mathrm{up}}(b) - G^{\mathrm{up}}\left(\tau^{\boldsymbol{i}}(b)\right) G^{\mathrm{up}}\left(\tau_{\boldsymbol{i}}(b)\right) \in \sum_{L_{\boldsymbol{i}}(b') <_{\boldsymbol{i}} L_{\boldsymbol{i}}(b)} q\mathbb{Z}[q]\, G^{\mathrm{up}}(b')$$

が成り立つ。ここで，$L_{\boldsymbol{i}}(b') <_{\boldsymbol{i}} L_{\boldsymbol{i}}(b)$は$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$に関する左辞書式順序である。

上の定理によって，任意の$c \in \mathbb{Z}^{\ell}_{\geq 0}$に対して，

$$\mathcal{F}^{\mathrm{up}}(c, i) := \bigoplus_{c' \leq_{i} c} F^{\mathrm{up}}(c', i)\left(\mathrm{U}_q^- \cap T_w \mathrm{U}_q^-\right)$$

とおくと，$\mathcal{F}^{\mathrm{up}}(c, i) \cap \mathrm{B}^{\mathrm{up}}$は，$\mathcal{F}^{\mathrm{up}}(c, i)$を生成することが分かる。

謝辞

2016年度RIMS 研究集会“表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題”において講演の機会を与えて下さった青木茂様にこの場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

[Bac84] Kenneth Baclawski, A new rule for computing Clebsch-Gordan series, Adv. in Appl. Math. **5** (1984), no. 4, 416–432. MR 766605

[Bau12] Pierre Baumann, The canonical basis and the quantum frobenius morphism, arXiv preprint `http://arxiv.org/abs/1201.0303`, 01 2012.

[BG14] Arkady Berenstein and Jacob Greenstein, Double canonical bases, arXiv preprint `https://arxiv.org/abs/1411.1391`, 11 2014.

[BIRS09] A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, and J. Scott, Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups, Compos. Math. **145** (2009), no. 4, 1035–1079. MR 2521253

[BK07] Arkady Berenstein and David Kazhdan, Geometric and unipotent crystals. II. From unipotent bicrystals to crystal bases, Quantum groups, Contemp. Math., vol. 433, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 13–88. MR 2349617

[BKT14] Pierre Baumann, Joel Kamnitzer, and Peter Tingley, Affine Mirković-Vilonen polytopes, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **120** (2014), 113–205. MR 3270589

[GLS11] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer, Kac-Moody groups and cluster algebras, Adv. Math. **228** (2011), no. 1, 329–433. MR 2822235

[GZ86] I. M. Gelfand and A. Zelevinsky, Canonical basis in irreducible representations of $\mathfrak{gl}_3$ and its applications, Group theoretical methods in physics, Vol. II (Yurmala, 1985), VNU Sci. Press, Utrecht, 1986, pp. 127–146. MR 919787

[Kas91] M. Kashiwara, On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 465–516. MR 1115118

[Kas12] Masaki Kashiwara, Notes on parameters of quiver Hecke algebras, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **88** (2012), no. 7, 97–102. MR 2946856

[Kim12] Yoshiyuki Kimura, Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis, Kyoto J. Math. **52** (2012), no. 2, 277–331. MR 2914878

[Kim15] Yoshiyuki Kimura, Remarks on quantum unipotent subgroup and dual canonical basis, to appear in Pacific Journal of Mathematics (2015).

[KKKS15] Byeong Hoon Kahng, Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, and Uhi Rinn Suh, Dual perfect bases and dual perfect graphs, Mosc. Math. J. **15** (2015), no. 2, 319–335, 405. MR 3427426

[KS97] Masaki Kashiwara and Yoshihisa Saito, Geometric construction of crystal bases, Duke Math. J. **89** (1997), no. 1, 9–36. MR 1458969

[Lus93] George Lusztig, Introduction to quantum groups, Progress in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993. MR 1227098

[Lus00] G. Lusztig, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, Adv. Math. **151** (2000), no. 2, 129–139. MR 1758244

[Mat90] Olivier Mathieu, Filtrations of G-modules, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **23** (1990), no. 4, 625–644. MR 1072820

[Sai94] Yoshihisa Saito, PBW basis of quantized universal enveloping algebras, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), no. 2, 209–232. MR 1265471

[Tan14] T. Tanisaki, Modules over quantized coordinate algebras and PBW-bases, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan (2014).