数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 218-234

対称群上の帯球関数とリース行列式

(Zonal spherical functions on symmetric groups and the wreath determinant)

琉球大学・理学部・数理科学科　木本 一史 (Kazufumi KIMOTO)*
Department of Mathematical Sciences, University of the Ryukyus

Abstract

A function on the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ is called here a zonal spherical function (with respect to $\mathfrak{S}_\mu$) if it is biinvariant with respect to the subgroup $\mathfrak{S}_\mu$, the Young subgroup for a partition $\mu \vdash n$. In the article, we show that the values of such functions are expressed in terms of a certain matrix function called the wreath determinant, which is relative invariant with respect to the left translation, when the Young diagram of μ is rectangular. Further, as an application, we give a simple alternative proof of the Alon-Tarsi conjecture on Latin squares for a certain known specific case.

1 導入

N の分割 μ に対し，μ に対する $\mathfrak{S}_N$ のヤング型部分群を $\mathfrak{S}_\mu$ で表す．$\mathfrak{S}_N$ 上の関数 f であって両側 $\mathfrak{S}_\mu$ 不変なもの，すなわち

$$f(kxk') = f(x) \qquad (x \in \mathfrak{S}_N,\ k, k' \in \mathfrak{S}_\mu)$$

を満たすものをここでは $\mathfrak{S}_N$ 上の（$\mathfrak{S}_\mu$ に関する）帯球関数と呼ぼう（対 $(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_\mu)$ が Gelfand 対のときには，これは通常の [14] の意味での帯球関数となる）．特に，$\mathfrak{S}_N$ の既約指標 χ^λ $(\lambda \vdash N)$ を $\mathfrak{S}_\mu$ 上で平均して得られる帯球関数

$$\omega_\mu^\lambda(x) := \frac{1}{|\mathfrak{S}_\mu|} \sum_{k \in \mathfrak{S}_\mu} \chi^\lambda(xk) \qquad (x \in \mathfrak{S}_N)$$

に興味がある．分割 μ のヤング図形が長方形である場合には，リース行列式と呼ばれる（左からの正方行列の掛け算に関して乗法性を持つような）行列関数を用いて帯球関数 $\omega^\mu = \omega_\mu^\mu$ の値を表示することが出来る．このことを紹介するのが本稿の目的の一つである．

* kimoto@math.u-ryukyu.ac.jp

さらにこの結果の応用として，ラテン方陣に関する Alon-Tarsi 予想の（既知の）特別な場合のごく簡単な別証明が得られることもあわせて紹介する．n 次のラテン方陣とは，各行各列が $1, 2, \ldots, n$ の順列であるような n 次正方行列のことである．各ラテン方陣に対して「符号」が定義され，その値に応じて「偶方陣」「奇方陣」といった概念が導入される．n が奇数の場合，n 次の偶方陣と奇方陣の個数は等しいことが簡単に分かるが，n が偶数の場合には一般に「偶方陣と奇方陣の個数は相異なるであろう」と予想されており，この予想を Alon-Tarsi 予想と呼ぶ．上述の帯球関数とリース行列式との関係を利用すると，$n = p - 1$ (p は奇素数）の場合に Alon-Tarsi 予想が正しいという Glynn の結果の簡単な別証明が得られる．

記号について

よく使う記号についてまとめておく．

n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ で表し，その単位元を e で表す．置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の符号を $\operatorname{sgn}\sigma$ で，σ に対する置換行列を $P(\sigma) = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \le i,j \le n}$ で表す．

R 成分の $m \times n$ 行列全体を $\mathrm{Mat}_{m,n}(R)$ ($m = n$ のときは単に $\mathrm{Mat}_n(R)$) で表す．$R = \mathbb{C}$ のときは単に $\mathrm{Mat}_{m,n}$, Mat_n などと書く．I_n で n 次の単位行列を表す．全ての成分が 1 である行列を $\mathbf{1}_{m,n}$, $\mathbf{1}_n$ などと表す．(i, i) 成分が a_i の対角行列を $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ で表す．

λ が N の分割であることを $\lambda \vdash N$ と表す．λ の長さ（非ゼロ和因子の個数）を $l(\lambda)$ で表す．ヤング図形が長方形であるような分割 $(\overbrace{k, \ldots, k}^{n}) \vdash kn$ を簡単に (k^n) で表す．分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ や非負整数を成分に持つ行列 $M = (m_{ij})$ に対して

$$\lambda! := \prod_i \lambda_i!, \qquad M! := \prod_{i,j} m_{ij}!$$

とする．

有限集合 A の元の個数を $|A|$ で表す．

2 球関数

まず記号をいくつか導入する．N の分割 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$ に対し，

$$\Omega_i^\mu := \left\{ \sum_{r<i} \mu_r + s \,\middle|\, 1 \le s \le \mu_i \right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

とおく．$\Omega_1^\mu \sqcup \Omega_2^\mu \sqcup \cdots \sqcup \Omega_l^\mu = \{1, 2, \ldots, N\}$ である．

$$\mathfrak{S}_\mu := \{\sigma \in \mathfrak{S}_N \mid \sigma\Omega_i^\mu = \Omega_i^\mu,\ i = 1, 2, \ldots, l\}$$

と定める（ヤング型の部分群とよばれる）. $\mathfrak{S}_\mu \cong \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \mathfrak{S}_{\mu_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_l}$, $|\mathfrak{S}_\mu| = \mu!$ である.

$\lambda \vdash N$ に対し, λ に対応する $\mathfrak{S}_N$ の既約表現を π^λ, その指標を χ^λ で表す.

$$\omega_\mu^\lambda(x) := \frac{1}{|\mathfrak{S}_\mu|} \sum_{k \in \mathfrak{S}_\mu} \chi^\lambda(xk) \qquad (x \in \mathfrak{S}_N)$$

と定める. これは $\mathfrak{S}_\mu$-両側不変な関数となる. 特に $\lambda = \mu$ の場合は簡単のため $\omega^\lambda = \omega_\lambda^\lambda$ とおく. ω_μ^λ は π^λ の行列成分によって書かれる関数であるから群環（$\mathfrak{S}_N$ 上の関数が畳み込み積によってなす代数）$L(\mathfrak{S}_N) = \{f \colon \mathfrak{S}_N \to \mathbb{C}\}$ のある π^λ-成分における $\mathfrak{S}_\mu$-不変元がなす部分空間に入っている. その次元 $\dim(\pi^\lambda)^{\mathfrak{S}_\mu}$ は Kostka 数 $K_{\lambda\mu}$ に等しいので, 特に natural (or dominance) ordering*1 に関して $\lambda \geq \mu$ でなければ $K_{\lambda\mu} = 0$ より $\omega_\mu^\lambda = 0$ であり, また $K_{\lambda\lambda} = 1$ なので non-zero な $v \in (\pi^\lambda)^{\mathfrak{S}_\mu}$ を取れば, π^λ 上の不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pi^\lambda}$ を用いて

$$\omega^\lambda(x) = \frac{\langle \pi^\lambda(x)v, v \rangle_{\pi^\lambda}}{\langle v, v \rangle_{\pi^\lambda}}$$

と書ける. また関係式

$$\omega^\lambda(x)\omega^\lambda(y) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_\lambda|} \sum_{k \in \mathfrak{S}_\lambda} \omega^\lambda(xky) \qquad (x, y \in \mathfrak{S}_N)$$

を満たす.

$\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して

$$M^\mu(\sigma) = (m_{ij}^\mu(\sigma))_{1 \leq i,j \leq l(\mu)}, \qquad m_{ij}^\mu(\sigma) = \left|\sigma\Omega_i^\mu \cap \Omega_j^\mu\right|$$

と定める. 簡単に分かるように,

$$\mathfrak{S}_\mu \sigma \mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_\mu \sigma' \mathfrak{S}_\mu \iff M^\mu(\sigma) = M^\mu(\sigma')$$

$$|\mathfrak{S}_\mu \sigma \mathfrak{S}_\mu| = \frac{|\mathfrak{S}_\mu|^2}{M^\mu(\sigma)!}$$

などが成り立つ.

3 ラテン方陣と Alon-Tarsi 予想

n 次のラテン方陣 (Latin square) とは, 各行各列が $1, 2, \ldots, n$ の順列であるような n 次正方行列のことである*2.

---

*1 $\lambda \geq \mu \iff \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i,\ \forall i \geq 1.$

*2 オイラー [4] が行列の成分にアルファベット（ラテン文字）を用いていることがこの名前の由来となっているようだ.

例 1. 2 次のラテン方陣は

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

の 2 つである.

例 2. 3 次のラテン方陣は全部で 12 個あり，それらを列挙すると以下の通り：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3&2\\3&2&1\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

注意 3. n 次ラテン方陣の総数 $\mathrm{ls}(n)$ の具体的な値は $n \leq 11$ までしか知られていない [18]：

$$\begin{aligned}
\mathrm{ls}(1) &= 1,\\
\mathrm{ls}(2) &= 2,\\
\mathrm{ls}(3) &= 12,\\
\mathrm{ls}(4) &= 576,\\
\mathrm{ls}(5) &= 161280,\\
\mathrm{ls}(6) &= 812851200,\\
\mathrm{ls}(7) &= 61479419904000,\\
\mathrm{ls}(8) &= 108776032459082956800,\\
\mathrm{ls}(9) &= 5524751496156892842531225600,\\
\mathrm{ls}(10) &= 3992975063285215948690025902768128\,00,\\
\mathrm{ls}(11) &= 776966836171770144107444346734230682311065600000.
\end{aligned}$$

漸近的には $\mathrm{ls}(n)^{1/n^2} \sim e^{-2}n$ であることが知られている [13].

L が n 次のラテン方陣ならば，$2n$ 個の置換 $r_1, \ldots, r_n, c_1, \ldots, c_n \in \mathfrak{S}_n$ が存在して

$$L = \begin{pmatrix} r_1(1) & \ldots & r_1(n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r_n(1) & \ldots & r_n(n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(1) & \ldots & c_n(1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_1(n) & \ldots & c_n(n)\end{pmatrix} \tag{1}$$

である．このとき，

$$\operatorname{sgn} L := \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} r_i \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} c_i.$$

で L の符号を定める．L の符号の値が $+1$ か -1 かに応じて L を偶方陣または奇方陣と呼ぶ．n 次の偶方陣および奇方陣の総数をそれぞれ $\mathrm{els}(n)$, $\mathrm{ols}(n)$ で表す．L の 1 行と 2 行を

入れ替えて得られる行列を L' とすれば L' も n 次のラテン方陣であって

$$\operatorname{sgn} L' = (-1)^n \operatorname{sgn} L$$

である．特に n が奇数ならば n 次の偶方陣と奇方陣の個数は等しい，つまり $\operatorname{els}(n) = \operatorname{ols}(n)$ である．

Alon-Tarsi 予想． $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$2 \mid n \implies \operatorname{els}(n) \neq \operatorname{ols}(n)$$

が成り立つ．

注意 4. 数値的には，$n = 2, 4, 6, 8$ に対しては $\operatorname{els}(n) > \operatorname{ols}(n)$ が成り立っている [19].

元々はグラフの彩色問題に関連して生じた予想である．n 次のラテン方陣に対する Alon-Tarsi 予想が正しいとすると，次の命題が従う [1].

定理 5 (Dinitz 予想). 完全二部グラフ $K_{n,n}$ のライングラフ*3 $L(K_{n,n})$ は n-choosable*4 である．

なお，Dinitz 予想じたいは一般の場合に Galvin [5] によって（Alon-Tarsi 予想とは独立に）解決された．

注意 6. (1) のラテン方陣 L に対して

$$\operatorname{rowsgn} L := \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} r_i, \qquad \operatorname{colsgn} L := \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} c_i$$

と定める（と $\operatorname{sgn} L = \operatorname{rowsgn} L \operatorname{colsgn} L$ である）．$\operatorname{rowsgn} = +1$ なる n 次のラテン方陣の総数を $\operatorname{rels}(n)$ で，$\operatorname{rowsgn} = -1$ なる n 次のラテン方陣の総数を $\operatorname{rols}(n)$ で表す．同様に $\operatorname{cels}(n)$, $\operatorname{cols}(n)$ を定義する．Alon-Tarsi 予想は

$$2 \mid n \implies \operatorname{rels}(n) \neq \operatorname{rols}(n),$$
$$2 \mid n \implies \operatorname{cels}(n) \neq \operatorname{cols}(n)$$

などとも同値であることが知られている [7]（こちらは Huang-White 予想と呼ばれることがある）．

*3 グラフ $G = (V, E)$ に対し，E を頂点集合とし，$e, e' \in E$ が G において端点を共有するときに e と e' は隣接するとして定義されるグラフ $L(G)$ を G のライングラフと呼ぶ．

*4 グラフ $G = (V, E)$ において，各頂点に「n 色からなるパレット」を任意に割り当てるとき，それぞれの「パレット」から適当に色を選ぶことで必ず G の彩色が得られるとき，G は n-choosable であるという．n-choosable ならば n-彩色可能であるが，逆は正しくない [3].

L を n 次のラテン方陣とすると

$$L = \sum_{i=1}^{n} i\, P(\sigma_i)$$

となる $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ がある（つまり L は n 個の置換行列の一次結合として表される）．L がラテン方陣であるという条件は $P(\sigma_1) + P(\sigma_2) + \cdots + P(\sigma_n) = \mathbf{1}_n$ となることであることを注意しておく．さてこのとき

$$\operatorname{symsgn} L := \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} \sigma_i$$

と定めると

$$\operatorname{symsgn} L = (-1)^{n(n-1)/2} \operatorname{sgn} L$$

となることが知られている [8]．symsgn $= +1$ なる n 次のラテン方陣の総数を $\mathrm{sels}(n)$，symsgn $= -1$ なる n 次のラテン方陣の総数を $\mathrm{sols}(n)$ で表すと，Alon-Tarsi 予想は

$$2 \mid n \implies \mathrm{sels}(n) \neq \mathrm{sols}(n)$$

と同値となる*5．以下ではこちらの同値命題を「Alon-Tarsi 予想」として扱う．

例 7.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (r_i(j))_{1 \le i,j \le 3} = (c_j(i))_{1 \le i,j \le 3} = \sum_{i=1}^{3} i\, P(\sigma_i)$$

とすると

$$\begin{aligned} r_1 &= (1\,2), \quad r_2 = (1\,3), \quad r_3 = (2\,3), \\ c_1 &= (1\,2\,3), \quad c_2 = e, \quad c_3 = (1\,3\,2), \\ \sigma_1 &= (1\,3\,2), \quad \sigma_2 = e, \quad \sigma_3 = (1\,2\,3) \end{aligned}$$

なので

$$\operatorname{rowsgn} L = -1, \quad \operatorname{colsgn} L = +1 \quad (\implies \operatorname{sgn} L = -1), \quad \operatorname{symsgn} L = +1$$

となる．

p を奇素数として，$n = p + 1$ のとき（Drisko [2]）と $n = p - 1$ のとき（Glynn [6]）には予想が正しいことが示されている．$n = p - 1$ の場合の簡単な別証明を後で与える．

Alon-Tarsi 予想と同値な命題，Alon-Tarsi 予想から従う命題は，上述の Dinitz 予想以外にも色々ある．二つほど例を挙げる．

---

*5 講演の際には簡単のため，ここでの symsgn L を sgn L と表し，初めからこの設定で Alon-Tarsi 予想を紹介した．

予想 8 (Rota 予想). F を標数 0 の体とし，V を F 上の n 次元ベクトル空間とする．$B_1, B_2, \ldots, B_n$ を V の n 組の基底とする．このとき，それぞれの基底のベクトルに適当に

$$B_i = \{\boldsymbol{b}_1^i, \boldsymbol{b}_2^i, \ldots, \boldsymbol{b}_n^i\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と名前を付けて，

$$B^j = \{\boldsymbol{b}_j^1, \boldsymbol{b}_j^2, \ldots, \boldsymbol{b}_j^n\} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

たちも全て V の基底となるように出来る．

予想 9 (Kumar-Landsberg [12]). dg を $SU(n)$ 上のハール測度とするとき，g_{ij} を標準的な $SU(n)$ の座標関数として

$$\int_{SU(n)} \prod_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dg \neq 0$$

が成り立つ．

Alon-Tarsi 予想を仮定すると Rota 予想が従う．また予想 9 は Alon-Tarsi 予想と同値である（[12] にはこれ以外にもいくつかの値の non-vanishingness が同値命題であることが示されている）ので Weingarten calculus の方向から Alon-Tarsi 予想にアプローチするのも面白いかもしれない．

4 アルファ行列式とリース行列式

4.1 アルファ行列式

$\mathfrak{S}_N$ 上の関数 ν を

$$\nu(\sigma) := N - (\sigma \text{ のサイクル分解におけるサイクルの個数}) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

で定義する．σ のサイクルタイプが $\mu \vdash N$ ならば

$$\nu(\sigma) = N - l(\mu) = \sum_{i \geq 2} (i-1)\mu_i$$

である．$\nu(\sigma)$ は，σ をいくつかの互換の積として表す時，必要となる互換の個数の最小値とも等しい．従って ν は $\mathfrak{S}_N$ 上の類関数であり，しかも自然な埋め込み $\iota\colon \mathfrak{S}_N \to \mathfrak{S}_M$ $(M > N)$ に対して $\nu(\sigma) = \nu(\iota(\sigma))$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_N)$ が成り立つ．

$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_N$ に対して

$$\det\nolimits_\alpha A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \alpha^{\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^{N} a_{\sigma(i)i}$$

と定め，これを A のアルファ行列式と呼ぶ.

例 10.

$$\det_\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \alpha^2 a_{21}a_{32}a_{13} + \alpha^2 a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$+ \alpha a_{11}a_{32}a_{23} + \alpha a_{31}a_{22}a_{13} + \alpha a_{21}a_{12}a_{33}.$$

$\det_{-1} A = \det A$，$\det_1 A = \operatorname{per} A$（$A$ のパーマネント）であるので，アルファ行列式は行列式とパーマネントを補間する行列関数のパラメタ族である．ν は（従って $\alpha^{\nu(\cdot)}$ も）類関数であり，分割 $\lambda \vdash N$ に対する A の immanant

$$\operatorname{Imm}^\lambda A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \chi^\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^{N} a_{\sigma(i)i}$$

を用いると，フーリエ展開（§A.2 参照）

$$\alpha^{\nu(\sigma)} = \frac{1}{N!} \sum_{\lambda \vdash N} f^\lambda f_\lambda(\alpha) \chi^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

により

$$\det_\alpha A = \frac{1}{N!} \sum_{\lambda \vdash N} f^\lambda f_\lambda(\alpha) \operatorname{Imm}^\lambda A \tag{2}$$

である．ここで $f^\lambda = K_{\lambda(1^N)}$ は λ のヤング図形 $D(\lambda)$ に対する標準盤の総数，$f_\lambda(x)$ は

$$f_\lambda(x) = \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} (1 + (j-i)x)$$

で定義される多項式である.

アルファ行列式は

- 行と列それぞれに関して多重線形である
- $\det_\alpha {}^t\!A = \det_\alpha A$
- $\det_\alpha \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \det_\alpha A \det_\alpha C$
- 「余因子展開」を持つ（例 11）

など，行列式と共通する性質を持つ．乗法性 $\det_\alpha(AB) = \det_\alpha A \det_\alpha B$ や中心性 $\det_\alpha(AB) = \det_\alpha(BA)$ などは一般には成り立たない（$n \geq 2$ のとき，任意の $A, B \in \mathrm{Mat}_n$ に対して $\det_\alpha(AB) = \det_\alpha(BA)$ が成立するのは $\alpha = -1$ のときに限る）が，特別な場合として

$$\det_\alpha AP(\sigma) = \det_\alpha P(\sigma)A \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

は成立する．

例 11 (余因子展開). 1 列で展開する場合，$A=(a_{ij})\in \mathrm{Mat}_n$ に対してその 1 行と r 行を入れ替えた後で 1 行と 1 列を取り除いて得られる行列を A_r とおけば

$$\det_\alpha A = a_{11}\det_\alpha A_1 + \alpha\sum_{r=2}^{n}\det_\alpha A_r$$

が成り立つ．たとえば $n=3$ の場合は

$$\begin{aligned}\det_\alpha &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \\ &= a_{11}\det_\alpha\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} + \alpha a_{21}\det_\alpha\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} + \alpha a_{31}\det_\alpha\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注意 12. アルファ行列式は Vere-Jones [17] が "α-permanent" として（ここと は少し違う定義で）導入した．ここで採用されている定義と "α-determinant" という名称は白井・高橋 [16] による．表現論的な簡単からの研究は松本・若山 [15] による巡回加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)\cdot\det X$ の既約分解の研究から始まった．より一般に $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)\cdot(\det X)^k$ を考えると，対称群 $\mathfrak{S}_{kn}$ 上の帯球関数が，既約分解の決定に（部分的に）寄与するという別の形で登場する [10].

4.2 リース行列式

行数が列数を割り切るような長方行列 $A=(a_{ij})\in\mathrm{Mat}_{n,kn}$ に対して

$$\mathrm{wrdet}_k A := \det_{-1/k}(A\otimes \mathbf{1}_{k,1})$$

と定め，これを A の k-リース行列式（または単にリース行列式 (wreath determinant)）と呼ぶ．ここに $A\otimes B$ は行列のクロネッカー積

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B\end{pmatrix} \qquad (A=(a_{ij}))$$

を表す．

注意 13. [11] におけるリース行列式の定義と上の定義は，行と列の役割が逆になっている．

例 14.

$$\mathrm{wrdet}_2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \det{}_{-1/2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}(a_{11}a_{12}a_{23}a_{24} + a_{13}a_{14}a_{21}a_{22})$$
$$- \frac{1}{8}(a_{11}a_{13}a_{22}a_{24} + a_{11}a_{14}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21}a_{24} + a_{12}a_{14}a_{21}a_{23}).$$

k-リース行列式は以下の性質を持つ [11].

(W1) wrdet_k は列に関して多重線形である.
(W2) $\mathrm{wrdet}_k\, QA = (\det Q)^k\, \mathrm{wrdet}_k\, A$ $(\forall Q \in GL_n)$ が成り立つ.
(W3) $\mathrm{wrdet}_k\, AP(\sigma) = \mathrm{wrdet}_k\, A$ $(\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{(k^n)})$ が成り立つ.

逆にこれらの 3 つの条件はリース行列式を特徴付ける：

定理 15. $f\colon \mathrm{Mat}_{n,kn} \to \mathbb{C}$ であって，上記の 3 条件 (W1),(W2),(W3) を満たすものは，定数倍を除いて wrdet_k に一致する.

この事実は (GL_n, GL_{kn})-duality を用いて簡潔に証明できるが (§A.3 参照)，より直接的かつ初等的な証明を与える．そのために少し記号を用意する.

$$\mathcal{M}_{n,k} = \left\{ M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \,\middle|\, \sum_{s=1}^{n} m_{is} = \sum_{s=1}^{n} m_{si} = k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}$$

とおく．$\sigma \in \mathfrak{S}_{kn}$ に対して $M^{(k^n)}(\sigma) \in \mathcal{M}_{n,k}$ である．$M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,k}$ に対して

$$\boldsymbol{I}(M) = (\overbrace{\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_1}^{m_{11}}\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{e}_n\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n}^{m_{n1}}\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_1}^{m_{1n}}\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{e}_n\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n}^{m_{nn}})$$

とおく．ここに $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準単位ベクトルを表す．たとえば特に

$$\boldsymbol{I}(kI_n) = (\overbrace{\boldsymbol{e}_1\ \ldots\ \boldsymbol{e}_1}^{k}\ \ldots\ \overbrace{\boldsymbol{e}_n\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n}^{k}) = I_n \otimes \mathbf{1}_{1,k}$$

である．また

$$\boldsymbol{I}(M^{(k^n)}(\sigma)) = \boldsymbol{I}(kI_n)P(\sigma) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_{kn}) \tag{3}$$

が成り立つ．n^2 個の変数 x_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ を用意し，$M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ に対して

$$x^M = \prod_{i,j=1}^{n} x_{ij}^{m_{ij}}$$

で単項式を略記する．また x_{ij} たちの多項式 P に対し，その展開における x^M の係数を $[x^M]P$ で表す.

Proof. $f\colon \mathrm{Mat}_{n,kn} \to \mathbb{C}$ は (W1),(W2),(W3) を満たすとする．$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,kn}$ に対して (W1) より

$$f(\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_n)A) = \sum_{i_1,\ldots,i_{kn}=1}^{n} t_{i_1}\ldots t_{i_{kn}} a_{i_1 1}\ldots a_{i_{kn} kn} f(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \ldots\ \boldsymbol{e}_{i_{kn}})$$

である．一方 (W2) により

$$f(\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_n)A) = \det(\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_n))^k f(A) = (t_1\ldots t_n)^k f(A)$$

である．よって $\{i_1,\ldots,i_{kn}\}$ が multiset として $\{\overbrace{1,\ldots,1}^{k},\ldots,\overbrace{n,\ldots,n}^{k}\}$ と等しくなければ $f(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \ldots\ \boldsymbol{e}_{i_{kn}}) = 0$ である．このことと (W3) を合わせれば結局，各 $M \in \mathcal{M}_{n,k}$ に対する $f(\boldsymbol{I}(M))$ の値が定数倍を除いて一意に決まることを言えば良い．

x_{ij} を (i,j) 成分とする n 次行列 $X = (x_{ij})$ を考える．$X \otimes \mathbf{1}_{1,k} = X\boldsymbol{I}(kI_n)$ に注意して

$$f(X \otimes \mathbf{1}_{1,k}) = (\det X)^k f(\boldsymbol{I}(kI_n))$$

である．一方で上の議論より

$$\begin{aligned} f(X \otimes \mathbf{1}_{1,k}) &= \sum_{i_1,\ldots,i_{kn}} x_{i_1 1}\ldots x_{i_k 1} x_{i_{k+1} 2}\ldots x_{i_{kn} n} f(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \ldots\ \boldsymbol{e}_{i_{kn}}) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}_{n,k}} \frac{k!^n}{M!} f(\boldsymbol{I}(M)) x^M \end{aligned}$$

である．よって上の二つの式で x^M の係数を比較することで

$$f(\boldsymbol{I}(M)) = f(\boldsymbol{I}(kI_n)) \times \frac{M!}{k!^n}[x^M](\det X)^k$$

を得るが，この値は共通の定数 $f(\boldsymbol{I}(kI_n))$ を除けば M だけで決まっている． □

系 16. $M \in \mathcal{M}_{n,k}$ に対し

$$\frac{\mathrm{wrdet}_k\, \boldsymbol{I}(M)}{\mathrm{wrdet}_k\, \boldsymbol{I}(kI_n)} = \frac{M!}{k!^n}[x^M](\det X)^k.$$

注意 17. リース積 $\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_k^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ を $\mathfrak{S}_k^n = \mathfrak{S}_{(k^n)}$ の同一視を通じて $\mathfrak{S}_{kn}$ の部分群とみなしたとき，$g = ((\tau_1,\ldots,\tau_n),\sigma) \in \mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\mathrm{wrdet}_k\, AP(g) = (\mathrm{sgn}\,\sigma)^k\, \mathrm{wrdet}_k\, A$$

が成り立つ．つまり wrdet_k はリース積 $\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_n$ の右側からの作用に関して相対不変である．

5 リース行列式による帯球関数の表示

分割 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l) \vdash N$ に対して行列 $\mathbf{1}_\mu \in \mathrm{Mat}_N$ を

$$\mathbf{1}_\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{1}_{\mu_l} \end{pmatrix}$$

で定めると任意の $\lambda \vdash N$ と $x \in \mathfrak{S}_N$ に対して

$$\mathrm{Imm}^\lambda(\mathbf{1}_\mu P(x)) = \sum_{\sigma \in x\mathfrak{S}_\mu} \chi^\lambda(\sigma) = \mu!\, \omega_\mu^\lambda(x)$$

であることに注意しておく.

定理 18. $\sigma \in \mathfrak{S}_{kn}$ に対して

$$\begin{aligned} \omega^{(k^n)}(\sigma) &= \left(\frac{k^k}{k!}\right)^n \sum_{y \in \mathfrak{S}_{(k^n)}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(\sigma y)} \\ &= \frac{\mathrm{wrdet}_k\, \boldsymbol{I}(M(\sigma))}{\mathrm{wrdet}_k\, \boldsymbol{I}(M(e))} \\ &= \frac{M(\sigma)!}{(k!)^n}[x^{M(\sigma)}](\det X)^k \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし簡単のため $M(\sigma) = M^{(k^n)}(\sigma)$ と書いた. また X は (i,j) 成分が x_{ij} なる n 次行列である.

Proof. (2) により

$$\det_\alpha(\mathbf{1}_{(k^n)} P(\sigma)) = \frac{1}{(kn)!} \sum_{\lambda \vdash kn} f^\lambda f_\lambda(\alpha)\, \mathrm{Imm}^\lambda(\mathbf{1}_{(k^n)} P(\sigma))$$

が成り立つ. 両辺を計算すると

$$\sum_{y \in \mathfrak{S}_{(k^n)}} \alpha^{\nu(\sigma y)} = \frac{k!^n}{(kn)!} \sum_{\lambda \vdash kn} f^\lambda f_\lambda(\alpha) \omega_{(k^n)}^\lambda(\sigma)$$

である. $\omega_{(k^n)}^\lambda$ は $\lambda \geq (k^n)$ でなければ恒等的に 0 である. また $f_\lambda(\alpha)$ は $\lambda_1 > k$ のとき $1 + k\alpha$ を因子に持つので, $f_\lambda(-1/k)$ は $\lambda_1 \leq k$ でなければ 0 になる. 二つの条件 $\lambda \geq (k^n)$ と $\lambda_1 \leq k$ を両立する kn の分割は $\lambda = (k^n)$ しかない. よって $\alpha = -1/k$ を代入することで

$$\sum_{y \in \mathfrak{S}_{(k^n)}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(\sigma y)} = \frac{k!^n}{(kn)!} f^{(k^n)} f_{(k^n)}(-1/k) \omega^{(k^n)}(\sigma) \tag{4}$$

となる．f^{λ} に対するフックの公式と $f_{\lambda}(x)$ の定義から

$$
\begin{aligned}
f^{(k^n)}f_{(k^n)}(-1/k) &= \frac{(kn)!}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}((n-i)+(k-j)+1)} \times \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\Bigl(1-\frac{j-i}{k}\Bigr) \\
&= \frac{(kn)!}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(i+j-1)} \times \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\frac{i+j-1}{k} \\
&= \frac{(kn)!}{k^{kn}}
\end{aligned}
$$

なので第 1 の等号が示された．また (4) は ((3) に注意して)

$$
\det_{-1/k}(\mathbf{1}_{(k^n)}P(\sigma)) = \det_{-1/k}(\boldsymbol{I}(M(e))P(\sigma)\otimes \mathbf{1}_{k,1}) = \mathrm{wrdet}_k\, \boldsymbol{I}(M(\sigma))
$$

に等しいので第 2 の等号が成り立つ．第 3 の等号の成立は系 16 より明らか． □

注意 19. 行列式の 2 パラメタ変形

$$
\det_{\alpha,\beta} A = \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_N} \alpha^{\nu(\sigma)}\beta^{\nu(\tau)}\prod_{i=1}^{N} a_{\sigma(i)\tau(i)}
$$

を考えると，同様の議論で

$$
\det_{-1/k,1/n} A = \frac{\det_{-1/k,1/n} I_{kn}}{f^{(k^n)}}\,\mathrm{Imm}^{(k^n)} A \qquad \Bigl(\det_{-1/k,1/n} I_{kn} = \frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\Bigr)
$$

が得られるので，$\lambda=(k^n)$ に対する既約指標やそれから得られる球関数 $\omega_{\mu}^{(k^n)}$ $(\mu\vdash kn)$ の値に対する公式

$$
\omega_{\mu}^{(k^n)}(\sigma) = \frac{f^{(k^n)}}{\mu!}\frac{\det_{-1/k,1/n}(\mathbf{1}_{\mu}P(\sigma))}{\det_{-1/k,1/n} I_{kn}} \qquad (\sigma\in\mathfrak{S}_{kn})
$$

$$
\Bigl(\text{特に}\quad K_{(k^n)\mu} = \omega_{\mu}^{(k^n)}(e) = \frac{f^{(k^n)}}{\mu!}\frac{\det_{-1/k,1/n}\mathbf{1}_{\mu}}{\det_{-1/k,1/n} I_{kn}}\Bigr)
$$

$$
\frac{\chi^{(k^n)}(\sigma)}{f^{(k^n)}} = \frac{\det_{-1/k,1/n} P(\sigma)}{\det_{-1/k,1/n} I_{kn}} \qquad (\sigma\in\mathfrak{S}_{kn})
$$

が得られる [9].

6 Alon-Tarsi 予想と帯球関数

$M=M^{(n^n)}$ とする．$g_n\in\mathfrak{S}_{n^2}$ を

$$
g_n((i-1)n+j) = (j-1)n+i \quad (i,j=1,2,\ldots,n)
$$

によって定めると $M(g_n)=\mathbf{1}_n$ であり，また $\boldsymbol{I}(M(g_n))=(\overbrace{I_n\ I_n\ \ldots\ I_n}^{n})$ である．

$$\omega^{(n^n)}(g_n)=\left(\frac{n^n}{n!}\right)^n\sum_{y\in\mathfrak{S}_{(n^n)}}\left(-\frac{1}{n}\right)^{\nu(g_ny)}=\frac{\mathrm{wrdet}_k\,\boldsymbol{I}(M(g_n))}{\mathrm{wrdet}_k\,\boldsymbol{I}(M(e))}=\frac{1}{(n!)^n}[x^{\mathbf{1}_n}](\det X)^n$$

だが，$\det X=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)x^{P(\sigma)}$ に注意すれば

$$\mathrm{sels}(n)-\mathrm{sols}(n)=\sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in\mathfrak{S}_n\\P(\sigma_1)+\cdots+P(\sigma_n)=\mathbf{1}_n}}\mathrm{sgn}(\sigma_1\ldots\sigma_n)=[x^{\mathbf{1}_n}](\det X)^n$$

なので，次の結果を得る．

定理 20. Alon-Tarsi 予想は以下の (1)～(3) のそれぞれと同値である．

(1) $\mathrm{wrdet}_n(\overbrace{I_n\ I_n\ \ldots\ I_n}^{n})\neq 0$
(2) $\omega^{(n^n)}(g_n)\neq 0$
(3) $\sum_{y\in\mathfrak{S}_{(n^n)}}\left(-\frac{1}{n}\right)^{\nu(g_ny)}\neq 0$

特に p を奇素数として $n=p-1$ のとき，$-\frac{1}{n}\equiv 1\pmod p$ なので

$$\sum_{y\in\mathfrak{S}_{(n^n)}}\left(-\frac{1}{n}\right)^{\nu(g_ny)}\equiv\sum_{y\in\mathfrak{S}_{(n^n)}}1\ (=((p-1)!)^{p-1})\equiv 1\pmod p$$

であり，従ってこの場合には Alon-Tarsi 予想が正しいことが分かる．

注意 21. $\mathrm{per}\,X=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x^{P(\sigma)}$ なので

$$\mathrm{ls}(n)=\sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in\mathfrak{S}_n\\P(\sigma_1)+\cdots+P(\sigma_n)=\mathbf{1}_n}}1=[x^{\mathbf{1}_n}](\mathrm{per}\,X)^n$$

である．

付録 A

A.1 ls(n) の値の素因数分解

$$\begin{aligned}\mathrm{ls}(1)&=1,\\\mathrm{ls}(2)&=2,\\\mathrm{ls}(3)&=2^2\times 3,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ls}(4) &= 2^6 \times 3^2, \\
\mathrm{ls}(5) &= 2^9 \times 3^2 \times 5 \times 7, \\
\mathrm{ls}(6) &= 2^{13} \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2, \\
\mathrm{ls}(7) &= 2^{18} \times 3^5 \times 5^3 \times 7 \times 1103, \\
\mathrm{ls}(8) &= 2^{28} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 1361291, \\
\mathrm{ls}(9) &= 2^{35} \times 3^8 \times 5^2 \times 7^2 \times 5231 \times 3824477, \\
\mathrm{ls}(10) &= 2^{43} \times 3^{10} \times 5^2 \times 7^2 \times 31 \times 37 \times 547135293937, \\
\mathrm{ls}(11) &= 2^{51} \times 3^{12} \times 5^5 \times 7^2 \times 11 \times 2801 \times 2206499 \times 62368028479.
\end{aligned}
$$

A.2 $\alpha^{\nu(\cdot)}$ のフーリエ展開

Frobenius の指標公式

$$p_\mu = \sum_{\lambda \vdash N} \chi_\mu^\lambda s_\lambda$$

において $p_1 = p_2 = \cdots = \alpha^{-1}$ という特殊化をすると $p_\mu = \alpha^{-l(\mu)}$ である．また

$$E(t) = \sum_i e_i t^i = (1+t)^{\alpha^{-1}}$$

なので

$$s_\lambda = \alpha^{-N} \frac{f^\lambda}{N!} f_\lambda(\alpha)$$

となる（たとえば [14] の第 1 章第 3 節の Example 4)．よって

$$\alpha^{\nu(\sigma)} = \frac{1}{N!} \sum_{\lambda \vdash N} f^\lambda f_\lambda(\alpha) \chi^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

が成り立つ．

A.3 リース行列式の特徴付け

$\mathrm{Mat}_{n,kn}$ 上の多項式関数の全体がなす代数を $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}_{n,kn})$ とする．これは自然な作用で $GL_n \times GL_{kn}$-加群となるが，

$$\mathcal{P}(\mathrm{Mat}_{n,kn}) = \sum_\lambda \mathcal{P}(\mathrm{Mat}_{n,kn})_\lambda, \qquad \mathcal{P}(\mathrm{Mat}_{n,kn})_\lambda \cong \rho_n^\lambda \boxtimes \rho_{kn}^\lambda$$

と既約分解する（Howe duality)．ここに ρ_m^λ は最高ウェイト λ を持つ既約 GL_m-加群を表す（GL_m における最高ウェイトと長さが高々 m の分割を同一視している)．$\mathbb{T}_{kn}$ を kn 次の正則な対角行列の全体として

$$V = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathrm{Mat}_{n,kn})_{(k^n)} \,\middle|\, f(Xt) = \det(t) f(X),\ t \in \mathbb{T}_{kn} \right\}$$

とおく．$(\sigma.f)(X)=f(XP(\sigma))$ によって V は $\mathfrak{S}_{kn}$-加群となるが，$V\cong\pi^{(k^n)}$ であることが知られている．3 つの条件を満たす $\mathrm{Mat}_{n,kn}$ 上の関数のなす空間は $V^{\mathfrak{S}_{(k^n)}}$ に一致するが，$\dim V^{\mathfrak{S}_{(k^n)}}=K_{(k^n)(k^n)}=1$ なので $V^{\mathfrak{S}_{(k^n)}}=\mathbb{C}\cdot\mathrm{wrdet}_k$ である．

参考文献

[1] N. Alon and M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica* **12** (1992), 125–134.

[2] A. A. Drisko, On the number of even and odd Latin squares of order $p+1$. *Adv. Math.* **128** (1997), 20–35.

[3] P. Erdös, A. Rubin and H. Taylor, Choosability in graphs. Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979), pp. 125–157, Congress. Numer., XXVI, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1980.

[4] L. Euler, Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques. Verh. Zeeuwsch Gennot. Weten Vliss **9**, 85–239, 1782.
`http://eulerarchive.maa.org/pages/E530.html`

[5] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph. *J. Combin. Theory Ser. B* **63** (1995), 153–158.

[6] D. G. Glynn, The conjectures of Alon-Tarsi and Rota in dimension prime minus one. *SIAM J. Discrete Math.* **24** (2010), no.2, 394–399.

[7] R. Huang and G.-C. Rota, On the relations of various conjectures on Latin squares and straightening coefficients. *Discrete Math.* **128** (1994), 225–236.

[8] J. C. M. Janssen, On even and odd Latin squares. *J. Combin. Theory Ser. A* **69** (1995), 173–181.

[9] K. Kimoto, Averages of alpha-determinants over permutations. arXiv:1403.3723

[10] K. Kimoto, S. Matsumoto and M. Wakayama, Alpha-determinant cyclic modules and Jacobi polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 6447–6473.

[11] K. Kimoto and M. Wakayama, Invariant theory for singular α-determinants. *J. Combin. Theory Ser. A* **115** (2008), no. 1, 1–31.

[12] S. Kumar and J. M. Landsberg, Connections between conjectures of Alon-Tarsi, Hadamard-Howe, and integrals over the special unitary group. *Discrete Math.* **338** (2015), 1232–1238.

[13] J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics* (*2nd ed.*), Cambridge University Press, 2001.

[14] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials (2nd ed.)*, Oxford University Press, 1995.

[15] S. Matsumoto and M. Wakayama, Alpha-determinant cyclic modules of $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. *J. Lie Theory* **16** (2006), no. 2, 393–405.

[16] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants. I. Fermion, Poisson and boson point processes. *J. Funct. Anal.* **205** (2003), no. 2, 414–463.

[17] D. Vere-Jones, A generalization of permanents and determinants. *Linear Algebra Appl.* **63** (1988), 267–270.

[18] `http://oeis.org/A002860`

[19] `http://oeis.org/A114630`