数理解析研究所講究録
第2033巻 2017年 22-31

メビウスジャイロベクトル空間の部分空間について
On subspaces in the Möbius gyrovector space

渡邉 恵一（新潟大学理学部）
Keiichi Watanabe (Niigata Univ.)

阿部 敏一（茨城大学工学部）氏との共同研究
joint work with Toshikazu Abe (Ibaraki Univ.)

アブストラクト. メビウスジャイロベクトル空間における有限生成ジャイロベクトル部分空間は, 同じ生成元によって生成される線形部分空間とメビウス球との共通部分と一致することを示す. 応用として, 直交ジャイロ分解の概念を提示し, 直交分解との関係を明らかにする. さらに, 著者によって最近得られた結果のアブストラクトの予報がなされるであろう. 主要な結果のひとつは, メビウスジャイロベクトル空間における直交基底に関する任意元の直交ジャイロ展開と, そのジャイロ係数を計算する具体的手続きである.

Abstract. We show that any finitely generated gyrovector subspace in the Möbius gyrovector space coincides with the intersection of the linear subspace generated by the same generators and the Möbius ball. As an application, we present a notion of orthogonal gyrodecomposition and clarify the relationship with the orthogonal decomposition. In addition, an announce of the abstract of the results which were recently obtained by the author will be made. One of the main results is the orthogonal gyroexpansion of an arbitrary element with respect to any orthogonal basis in the Möbius gyrovector space and its concrete procedure to calculate the gyrocoefficients.

おことわり

この RIMS 研究集会の約 1 週間前に RIMS 研究集会「等距離写像研究の多角的アプローチ」(10 月 31 日〜11 月 2 日) が開催され, そこでも講演する機会がありましたが, ふたつの講演・講究録の内容はほぼ同一です.

A week before this RIMS conference, another RIMS conference "Researches on isometries from various viewpoints" was held, in which I had an opportunity to make a talk. These two talks and the contents of RIMS-kokyuroku are almost identical.

1 導入

はじめに抽象的な (gyrocommutative) gyrogroup, gyrovector space の定義を述べる. 詳細や基本的事項は [U1] を参照していただきたい.

定義. 空でない集合 G と写像 $\oplus : G \times G \to G$ の組 $(G, \oplus)$ を magma という. $a, b \in G$ に対して $\oplus(a, b)$ を $a \oplus b$ によって表す. $\phi : G \to G$ が magma $(G, \oplus)$ の自己同型であるとは, G から G への全単射で $\phi(a \oplus b) = \phi(a) \oplus \phi(b)$ $(a, b \in G)$ であることをいう. $(G, \oplus)$ の自己同型全体の集合を $\mathrm{Aut}(G, \oplus)$ と表す.

定義 (Gyrocommutative Gyrogroups). [U1] magma $(G, \oplus)$ が gyrocommutative gyrogroup であるとは,

(G1) $\exists 0 \in G$ s.t. $0 \oplus a = a$ $(\forall a \in G)$

(G2) $\forall a \in G \, \exists x \in G$ s.t. $x \oplus a = 0$

(G3) $\exists 1 \mathrm{gyr}[a, b]c \in G$ s.t. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a, b]c$

(G4) $\mathrm{gyr}[a, b] \in \mathrm{Aut}(G, \oplus)$

(G5) $\mathrm{gyr}[a, b] = \mathrm{gyr}[a \oplus b, b]$

(G6) $a \oplus b = \mathrm{gyr}[a, b](b \oplus a)$

を $a, b, c \in G$ に対して満たすことである.

定義 (Gyrovector Spaces). [U1] $(G, \oplus, \otimes)$ が real inner product gyrovector space (単に gyrovector space という) であるとは, $(G, \oplus)$ が gyrocommutative gyrogroup で, 実内積空間 $\mathbb{V}$ が存在して $G \subset \mathbb{V}$,

(V0) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

また, 演算 $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$ が定義されて

(V1) $1 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

(V2) $(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes \boldsymbol{a} \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}$

(V3) $(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$

(V4) $\dfrac{|r| \otimes \boldsymbol{a}}{||r \otimes \boldsymbol{a}||} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}$

(V5) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\,(r \otimes \boldsymbol{a}) = r \otimes \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}$

(V6) $\mathrm{gyr}[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}] = I$

(VV) さらに集合 $||G|| = \{\pm ||\boldsymbol{a}||; \boldsymbol{a} \in G\} \subset \mathbb{R}$ 上に (別の) 演算 $\oplus, \otimes$ が定義されて $(||G||, \oplus, \otimes)$ は1次元のベクトル空間をなし,

(V7) $||r \otimes \boldsymbol{a}|| = |r| \otimes ||\boldsymbol{a}||$

(V8) $||\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}|| \oplus ||\boldsymbol{b}||$

を $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in G,\ r_1,r_2,r\in\mathbb{R}$ に対して満たすことである.

例 (Einstein Gyrovector Spaces).[U1] c を真空中の光の速さ, 相対論的に許容される質点の速度の全体を $\mathbb{R}^3_c=\{\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3;\ ||\boldsymbol{a}||<c\}$ とする. Einstein の速度和とスカラー倍は

$$\boldsymbol{a}\oplus_{\mathrm{E}}\boldsymbol{b}=\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{c^2}}\left\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{c^2}\frac{\gamma_{\boldsymbol{a}}}{1+\gamma_{\boldsymbol{a}}}(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\right\}$$

$$r\otimes_{\mathrm{E}}\boldsymbol{a}=c\tanh\left(r\tanh^{-1}\frac{||\boldsymbol{a}||}{c}\right)\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}\quad(\text{if } \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}),\quad r\otimes_{\mathrm{E}}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

for all $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3_c,\ r\in\mathbb{R}$ によって定義される. ここで $\gamma_{\boldsymbol{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{||\boldsymbol{a}||^2}{c^2}}}$.

公理 (VV) の, 集合 $||\mathbb{R}^3_c||=(-c,c)$ における演算 $\oplus_{\mathrm{E}},\otimes_{\mathrm{E}}$ は

$$a\oplus_{\mathrm{E}}b=\frac{a+b}{1+\frac{1}{c^2}ab}$$

$$r\otimes_{\mathrm{E}}a=c\tanh\left(r\tanh^{-1}\frac{a}{c}\right)$$

for all $a,b\in(-c,c),\ r\in\mathbb{R}$ によって定義される. このとき, $(\mathbb{R}^3_c,\oplus_{\mathrm{E}},\otimes_{\mathrm{E}})$ は gyrovector space となる. Ungar は任意の実内積空間 $\mathbb{V}$ に対して, 外積の部分を内積で表すことにより, 開球 $\mathbb{V}_c$ へ上記の定義が拡張されることを示している.

例 (Möbius Gyrovector Spaces).[U1] $\mathbb{V}$ を任意の実内積空間, 固定された正の数 s に対して $\mathbb{V}_s=\{\boldsymbol{a}\in\mathbb{V};\ ||\boldsymbol{a}||<s\}$ とする. Möbius の和および Möbius のスカラー倍は

$$\boldsymbol{a}\oplus_{\mathrm{M}}\boldsymbol{b}=\frac{\left(1+\frac{2}{s^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{s^2}||\boldsymbol{b}||^2\right)\boldsymbol{a}+\left(1-\frac{1}{s^2}||\boldsymbol{a}||^2\right)\boldsymbol{b}}{1+\frac{2}{s^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{s^4}||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2}$$

$$r\otimes_{\mathrm{M}}\boldsymbol{a}=s\tanh\left(r\tanh^{-1}\frac{||\boldsymbol{a}||}{s}\right)\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}\quad(\text{if } \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}),\qquad r\otimes_{\mathrm{M}}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

for all $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{V}_s,\ r\in\mathbb{R}$ によって定義される. Möbius のスカラー倍と集合 $||\mathbb{V}_s||$ 上の演算は Einstein gyrovector space と同一である. (c が s に替わる.) このとき, $(\mathbb{V}_s,\oplus_{\mathrm{M}},\otimes_{\mathrm{M}})$ は gyrovector space となる. $\oplus_{\mathrm{M}},\otimes_{\mathrm{M}}$ をそれぞれ単に $\oplus,\otimes$ と書く.

異なる種類の演算が同一の数式に現れたならば, (1) 通常のスカラー倍 (2) 演算 $\otimes$ (3) 演算 $\oplus$ で優先順を与える, すなわち,

$$r_1\otimes w_1\boldsymbol{a}_1\oplus r_2\otimes w_2\boldsymbol{a}_2=\{r_1\otimes(w_1\boldsymbol{a}_1)\}\oplus\{r_2\otimes(w_2\boldsymbol{a}_2)\}.$$

そしてこのような場合の括弧は省略されるだろう.

一般には, 演算は可換でも, 結合的でも, 分配的でもないことに注意する:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} &\neq \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a} \\
\boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) &\neq (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{c} \\
r \otimes (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) &\neq r \otimes \boldsymbol{a} \oplus r \otimes \boldsymbol{b} \\
t(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) &\neq t\boldsymbol{a} \oplus t\boldsymbol{b}.
\end{aligned}
$$

しかし, 左 (および右) ジャイロ結合法則 (G3), ジャイロ交換法則 (G6), スカラー分配法則 (V2), スカラー結合法則 (V3) などがあるように, gyrovector space は解明すべき豊かな対称性を有している.

$s \to \infty$ とすると $\mathbb{V}_s$ は全空間 $\mathbb{V}$ に拡大して行き, 演算 $\oplus, \otimes$ は通常のベクトル和, スカラー倍に近づく. これは, 実内積空間における諸結果が Möbius gyrovector spaces における諸結果から復元されうるということを示唆している.

命題. [U1]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} &\to \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad (s \to \infty) \\
r \otimes \boldsymbol{a} &\to r\boldsymbol{a} \quad (s \to \infty).
\end{aligned}
$$

例. $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視すると, $\mathbb{R}^2_1$ における演算は $a \oplus b = \dfrac{a+b}{1+\overline{a}b}$ となる.

$$
a = \frac{i}{2}, \qquad b = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}i, \qquad c = \frac{1}{2},
$$

とすると, このとき

$$
\begin{aligned}
a \oplus (b \oplus c) &= 0 \\
(a \oplus b) \oplus c &= \frac{4+16i}{53-8i} \\
(a \oplus b) \oplus \frac{1+a\overline{b}}{1+\overline{a}b} c &= 0 \\
a \oplus \left(b \oplus \frac{1+b\overline{a}}{1+\overline{b}a} c \right) &= \frac{4+16i}{53-8i}.
\end{aligned}
$$

阿部氏は講演 [A] で次の問題を提起した.

問 (Abe). $(G,\oplus,\otimes)$ を gyrovector space またはその一般化されたものとし, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\in G$ とする. 次は成り立つか：

$$\{r_1\otimes\boldsymbol{a}_1\oplus r_2\otimes\boldsymbol{a}_2\,;\,r_1,r_2\in\mathbb{R}\}=\{\lambda_2\otimes\boldsymbol{a}_2\oplus\lambda_1\otimes\boldsymbol{a}_1\,;\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}\,?$$

$$r\otimes(r_1\otimes\boldsymbol{a}_1\oplus r_2\otimes\boldsymbol{a}_2)\in\{\lambda_1\otimes\boldsymbol{a}_1\oplus\lambda_2\otimes\boldsymbol{a}_2\,;\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}\,?$$

この講究録のもとになる講演では, 我々は上の問題とその自然な一般化を Möbius gyrovector space に限定して考察した. ここではその結果を概説し, さらに, 最近得られた結果の概要をアナウンスする.

2 有限生成ジャイロベクトル部分空間と直交ジャイロ分解

簡単のため $s=1$ の場合を述べる.
Möbius gyrovector space では次が成り立つ：

$$\{r_1\otimes\boldsymbol{a}_1\oplus r_2\otimes\boldsymbol{a}_2\,;\,r_1,r_2\in\mathbb{R}\}=\{\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2;\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}\cap\mathbb{V}_1$$

for $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\in\mathbb{V}_1$.

($\subset$) 演算 $\oplus,\otimes$ の定義から $r_1\otimes\boldsymbol{a}_1\oplus r_2\otimes\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ の線形結合であり, $\mathbb{V}_1$ が gyrovector space であるということに $\oplus,\otimes$ について閉じていることが含まれているので $r_1\otimes\boldsymbol{a}_1\oplus r_2\otimes\boldsymbol{a}_2\in\mathbb{V}_1$.
($\supset$) 次の定理による.

定理 1.[AW] Let $(\mathbb{V}_1,\oplus,\otimes)$ be the Möbius gyrovector space and $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\in\mathbb{V}_1$. Put $\alpha=\frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}\cdot\frac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||}$. Suppose that $0\neq t_1,t_2\in\mathbb{R}$ satisfy the condition

$$\left|\left|t_1\frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}+t_2\frac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||}\right|\right|<1.$$

(I) If $2\alpha t_2+t_1\neq 0$, then we put

$$c_1=\frac{{t_1}^2+2\alpha t_1t_2+{t_2}^2+1-\sqrt{({t_1}^2+2\alpha t_1t_2+{t_2}^2+1)^2-8\alpha t_1t_2-4{t_1}^2}}{2(2\alpha t_2+t_1)}$$

$$c_2=\frac{{t_1}^2+2\alpha t_1t_2+{t_2}^2-1+\sqrt{({t_1}^2+2\alpha t_1t_2+{t_2}^2+1)^2-8\alpha t_1t_2-4{t_1}^2}}{2t_2}.$$

(II) If $2\alpha t_2 + t_1 = 0$, then we put

$$c_1 = \frac{t_1}{{t_2}^2 + 1}$$
$$c_2 = t_1.$$

Then, we have $0 < |c_1|, |c_2| < 1$ and

$$t_1 \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} + t_2 \frac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||} = r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}_2,$$

where

$$r_1 = \frac{\tanh^{-1} c_1}{\tanh^{-1} ||\boldsymbol{a}_1||} \quad \text{and} \quad r_2 = \frac{\tanh^{-1} c_2}{\tanh^{-1} ||\boldsymbol{a}_2||}.$$

これは次の定理 2 から導かれる. 定理 2 の証明で x, y の右辺を導くのは難しくないが, 絶対値を 1 と比較することが重要であり, それなりの議論を要する.

定理 2.[AW] Consider the following system of equations for real numbers:

$$\begin{cases} x^2y^2 + (\gamma x^2 + 2\alpha x - \gamma)y + 1 = 0 & (1) \\ xy^2 + ((2\alpha+\beta)x^2 - \beta)y + x = 0 & (2) \end{cases}$$

Suppose that $-1 \le \alpha \le 1$, $\beta \ne 0$ and $1 + \beta(2\alpha+\beta) < \gamma^2$.

(I) If $2\alpha + \beta \ne 0$, then

$$x = \frac{1 + \beta(2\alpha+\beta) + \gamma^2 - \sqrt{(1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2)^2 - 4(2\alpha+\beta)\beta\gamma^2}}{2(2\alpha+\beta)\gamma}$$
$$y = \frac{1 + \beta(2\alpha+\beta) - \gamma^2 + \sqrt{(1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2)^2 - 4(2\alpha+\beta)\beta\gamma^2}}{2\gamma}$$

is a unique pair as the solution to the system of equations (1), (2), which satisfies $0 < |x|, |y| < 1$. Moreover,

$$x = \frac{1 + \beta(2\alpha+\beta) + \gamma^2 + \sqrt{(1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2)^2 - 4(2\alpha+\beta)\beta\gamma^2}}{2(2\alpha+\beta)\gamma}$$
$$y = \frac{1 + \beta(2\alpha+\beta) - \gamma^2 - \sqrt{(1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2)^2 - 4(2\alpha+\beta)\beta\gamma^2}}{2\gamma}$$

is a unique pair as the solution to the system of equations (1), (2), which satisfies $|x|, |y| > 1$.

(II) If $2\alpha + \beta = 0$, then

$$x = \frac{\beta\gamma}{1+\gamma^2}$$

$$y = \frac{1}{\gamma}$$

is a unique pair as the solution to the system of equations (1), (2), which satisfies $0 < |x|, |y| < 1$.

定義. $\mathbb{V}_1$ の空でない部分集合 M が gyrovector subspace であるとは, M が演算 $\oplus, \otimes$ について閉じていることをいう, すなわち,

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M,\ r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} \in M,\ r \otimes \boldsymbol{a} \in M.$$

A を含むような, $\mathbb{V}_1$ のすべての gyrovector subspace の共通部分を A によって生成された gyrovector subspace といい, $\bigvee^g A$ と表す, すなわち,

$$\bigvee{}^g A = \bigcap \{M;\ A \subset M,\ M \text{ is a gyrovector subspace of } \mathbb{V}_1\}.$$

例えば $n = 4$, $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (1, 4, 2, 3)$ とする. 数式 $\boldsymbol{c}_1 \oplus \boldsymbol{c}_4 \oplus \boldsymbol{c}_2 \oplus \boldsymbol{c}_3$ に, ジャイロ和の順序を特定するため括弧を書き加えるならば, 以下のように 5 つの可能性がある：

$$\boldsymbol{c}_1 \oplus \{\boldsymbol{c}_4 \oplus (\boldsymbol{c}_2 \oplus \boldsymbol{c}_3)\}$$

$$(\boldsymbol{c}_1 \oplus \boldsymbol{c}_4) \oplus (\boldsymbol{c}_2 \oplus \boldsymbol{c}_3)$$

$$\boldsymbol{c}_1 \oplus \{(\boldsymbol{c}_4 \oplus \boldsymbol{c}_2) \oplus \boldsymbol{c}_3\}$$

$$\{\boldsymbol{c}_1 \oplus (\boldsymbol{c}_4 \oplus \boldsymbol{c}_2)\} \oplus \boldsymbol{c}_3$$

$$\{(\boldsymbol{c}_1 \oplus \boldsymbol{c}_4) \oplus \boldsymbol{c}_2\} \oplus \boldsymbol{c}_3$$

定理 3.[AW] Let $(\mathbb{V}_1, \oplus, \otimes)$ be the Möbius gyrovector space, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{V}_1$ and let $(i_1, \cdots, i_n)$ be a permutation of $(1, \cdots, n)$. For an arbitrary given order of gyroaddition for $r_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus r_{i_n} \otimes \boldsymbol{a}_{i_n}$, we have the following:

$$\bigvee{}^g \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$$

$$= \{r_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus r_{i_n} \otimes \boldsymbol{a}_{i_n};\ r_{i_1}, \cdots, r_{i_n} \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{ t_1 \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} + \cdots + t_n \frac{\boldsymbol{a}_n}{||\boldsymbol{a}_n||};\ t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R} \right\} \cap \mathbb{V}_1.$$

注意. Einstein gyrovector space の有限生成な gyrovector subspace についても同様である.

次に, 直交ジャイロ分解について述べる. 通常の直交分解から具体的かつ容易に求めることができる. また, $s=1$ の場合から一般の $s>0$ での結果を導くことも容易である.

定理 4.[AW] Let $\mathbb{V}$ be a real Hilbert space and let $(\mathbb{V}_1, \oplus, \otimes)$ be the Möbius gyrovector space, and let M be a gyrovector subspace of $\mathbb{V}_1$ that is topologically relatively closed. Suppose that

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{clin} M, \ \boldsymbol{x}_2 \in M^{\perp}$$

is the (ordinary) orthogonal decomposition of an arbitrary element $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_1$ with respect to $\mathrm{clin}M$, which is the closed linear subspace generated by M. Then, a unique pair $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ exists that satisfies

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{y} \in M, \ \boldsymbol{z} \in M^{\perp} \cap \mathbb{V}_1.$$

Moreover, if $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$, then these elements $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ are determined by

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{z} = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2,$$

where

$$\lambda_1 = \frac{||\boldsymbol{x}_1||^2 + ||\boldsymbol{x}_2||^2 + 1 - \sqrt{(||\boldsymbol{x}_1||^2 + ||\boldsymbol{x}_2||^2 + 1)^2 - 4||\boldsymbol{x}_1||^2}}{2||\boldsymbol{x}_1||^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{||\boldsymbol{x}_1||^2 + ||\boldsymbol{x}_2||^2 - 1 + \sqrt{(||\boldsymbol{x}_1||^2 + ||\boldsymbol{x}_2||^2 + 1)^2 - 4||\boldsymbol{x}_1||^2}}{2||\boldsymbol{x}_2||^2}.$$

In addition, the inequalities $0 < \lambda_1 < 1$ and $\lambda_2 > 1$ hold.

注意. 上記の M が Ungar によって導入された Poincaré の距離 h に関して閉ならば, ノルムに関して相対閉であることが分かるので, 定理が適用可能である.

注意. Einstein gyrovector space でも対応する結果が得られる.

3 直交基底に関する直交ジャイロ展開など

ここでは最近得られた結果の概要を述べる.

定義. 有限集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{V}_s$ がジャイロ線形独立であるとは, $\{1, \cdots, n\}$ のいかなる置換 $(i_1, \cdots, i_n)$ といかなるジャイロ和の順序に対しても

$$r_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus r_{i_n} \otimes \boldsymbol{a}_{i_n} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \cdots = r_n = 0$$

が成り立つことと定義する. 1節の例で述べた複素数の組 $\{a, b, c\}$ はジャイロ線形独立ではない.

定理 (W). $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{V}_s$ を線形独立とする. 2つのジャイロ線形結合 $r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus r_n \otimes \boldsymbol{a}_n$, $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes \boldsymbol{a}_n$ が同じジャイロ和の順序をもち,

$$r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus r_n \otimes \boldsymbol{a}_n = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes \boldsymbol{a}_n$$

であるとする. このとき $r_j = \lambda_j \ (j = 1, \cdots, n)$ が成り立つ.

定理 (W). $\mathbb{V}_s$ の有限部分集合に対して, 線形独立とジャイロ線形独立の概念は一致する.

Ungar によって導入された距離 h の定義を述べる.

定義 (Ungar).[U1] Möbius gyrovector space $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ 上で d と h が

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{b} \ominus \boldsymbol{a}||$$

$$h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \tanh^{-1} \frac{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{s}$$

for all $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s$ によって定義され, $(\mathbb{V}_s, h)$ は距離空間となる. さらに $(\mathbb{V}, ||\cdot||)$ が完備ならば, $(\mathbb{V}_s, h)$ も完備である.

定理 (W). M を h-closed gyrovector subspace of $\mathbb{V}_s$ で, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ とする.

(1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y} \in M$, $\boldsymbol{z} \in M^\perp \cap \mathbb{V}_s$ を M に関する直交ジャイロ分解とする. このとき, $\boldsymbol{y}$ は M の元として h に関する $\boldsymbol{x}$ の最近点である. すなわち $\boldsymbol{y}$ は次の等式を満たす：

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \inf_{\boldsymbol{m} \in M} h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}). \tag{3}$$

(2) 逆に, $\boldsymbol{y}$ が M の元として h に関する $\boldsymbol{x}$ の最近点であるとする, すなわち $\boldsymbol{y} \in M$ で等式 (3) を満たすとする. このとき,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \oplus (\ominus \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x})$$

は M に関する直交ジャイロ分解である. すなわち $\ominus \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} \in M^\perp \cap \mathbb{V}_s$.

定理 (W). $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実 Hilbert 空間 $\mathbb{V}$ の正規直交基底とする. $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $0 < w_n < s$ なる実数列とする. このとき, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ は次のように直交ジャイロ展開される：

$$\boldsymbol{x} = r_1 \otimes w_1 \boldsymbol{e}_1 \oplus r_2 \otimes w_2 \boldsymbol{e}_2 \oplus \cdots \oplus r_n \otimes w_n \boldsymbol{e}_n \oplus \cdots .$$

収束は上記の距離 h に関するものであり, 有限部分和は直交性から演算の順序によらず, 括弧を必要としない. また直交ジャイロ展開係数 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ は具体的な手続きで計算できる.

補題. $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\} \subset \mathbb{V}_s$ が直交系ならば $\oplus$ は結合的である, すなわち

$$\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}.$$

References

[A] Toshikazu Abe, On gyrolinear spaces (Oral presentation), the 90th Yonezawa Mathematics Seminar, July 2nd, 2016.

[AW] Toshikazu Abe and Keiichi Watanabe, Finitely generated gyrovector subspaces and orthogonal gyrodecomposition in the Möbius gyrovector space, J. Math. Anal. Appl. 449 (2017), no. 1, 77–90. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.039

[U1] Abraham Albert Ungar, Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.

[U2] Abraham Albert Ungar, From Möbius to gyrogroups, Amer. Math. Monthly 115 (2008), no. 2, 138–144.

[W1] Keiichi Watanabe, A confirmation by hand calculation that the Möbius ball is a gyrovector space, Nihonkai Math. J. 27 (2016), 99–115.

[W2] Keiichi Watanabe, Orthogonal gyroexpansion in Möbius gyrovector spaces, preprint.