数理解析研究所講究録
第2033巻 2017年 168-178

ある関数族の正定値関数による順序
Order for a class of functions by positeive definiteness

渚 勝 (千葉大学)
Masaru NAGISA (Chiba University)

Abstract. We denote, by $f \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$, f is a continuous function on $(0,\infty)$ to $(0,\infty)$, unital $(f(1)=1)$, and symmetric $(f(t)=tf(1/t))$. For $f \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$, we define the function $M_f : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty)$ as follows:

$$M_f(s,t) = tf(s/t), \quad s,t \in (0,\infty).$$

Then M_f has the following proprties:

$$M_f(s,t) > 0, \quad M_f(1,1) = 1,$$
$$M_f(\alpha s, \alpha t) = \alpha M_f(s,t) \quad (\alpha > 0), \qquad \text{and } M_f(s,t) = M_f(t,s).$$

For A be an $N \times N$ matrix, we define L_A and R_A as follows:

$$L_A : \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \ni X \mapsto AX \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}),$$
$$R_A : \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \ni X \mapsto XA \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}).$$

We see $(\mathbb{M}_N(\mathbb{C}), \mathrm{Tr})$ as a Hilbert space. Then L_A and R_A are bounded linear operator on $(\mathbb{M}_N(\mathbb{C}), \mathrm{Tr})$.

We call the function $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ positive-definite if, for any $n \in \mathbb{N}$ and $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, the matrix $(\phi(x_i - x_j))_{i,j=1}^n$ is positive, that ism

$$\sum_{i,j=1}^n \phi(x_i - x_j)\xi_i\bar{\xi_j} \geq 0 \quad \forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}.$$

For $f, g \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$, we denote $f \preceq g$ if

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{f(e^x)}{g(e^x)} \in \mathbb{R} \text{ is positive-definite.}$$

Hiai-Kosaki [3] proved that, for $f, g \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$, it is equivalent to hold $f \preceq g$ and to hols the following inequality:

$$|||M_f(L_H, R_K)X||| \leq |||M_g(L_H, R_K)X|||$$

for all $H, K, X \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$, H and K are positive and invertible, and $|||\cdot|||$ is any unitarily invariant norm on $\mathbb{M}_N(\mathbb{C})$. They also proved, for functions

$$f_a(t) = \frac{(a-1)(t^a-1)}{a(t^{a-1}-1)} \in C(0,\infty)^+_{1,sym} \quad (a \in \mathbb{R}),$$

it holds that $f_a \preceq f_b$ if $a \leq b$. Applying this for $f_{1/2}(t) = t^{1/2}$ and $f_2(t) = \frac{1+t}{2}$, they proved McIntosh's inequality:

$$|||H^{1/2}XK^{1/2}||| \leq \frac{1}{2}|||HX + XK|||.$$

Let $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. We consider the function

$$f_{\alpha,\beta}(t) = t^{\gamma(\alpha,\beta)} \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i(t^{a_i}-1)}{a_i(t^{b_i}-1)},$$

where $\gamma(\alpha, \beta) = \frac{1-\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)}{2}$. Then we can see that $f_{\alpha,\beta} \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$ and $f_{\alpha,\beta}(t) = f_a(t)$ if $n = 1$, $\alpha = (a)$, $\beta = (a-1)$.

Let $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha' = (c_1, \ldots, c_m)$, $\beta' = (d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{R}^m$. Under what condition does it hold $f_{\alpha,\beta} \preceq f_{\alpha',\beta'}$? This means whether it holds

$$|||M_{\alpha,\beta}(L_H, R_K)X||| \leq |||M_{\alpha',\beta'}(L_H, R_K)X|||$$

or not, and here $M_{\alpha,\beta}(s,t) = tf_{\alpha,\beta}(s/t)$.

Since

$$\frac{f_{\alpha,\beta}(e^{2x})}{f_{\alpha',\beta'}(e^{2x})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i \sinh a_i x}{a_i \sinh b_i x} \prod_{j=1}^{m} \frac{c_j \sinh d_j x}{d_j \sinh c_j x},$$

our problem is reduced to the following: for $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_N > 0$, under what condition is

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\sinh a_i x}{\sinh b_i x}$$

positive definite? Our answer is

- If $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$ for all $k = 1, 2, \ldots, N$, then $\phi(x)$ is positive definite.
- If $a_1 > b_1$ or $a_1 + a_2 + \cdots + a_N > b_1 + b_2 + \cdots + b_N$, then $\phi(x)$ is not positive definite.
- Assume that $N = 2$. Then $\phi(x)$ is positive definite if and only if $a_1 \leq b_1$ and $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$.

1 Notations

この研究は Imam Nugraha Albania 氏との共同研究である.

$f \in C(0,\infty)^{+}_{1,sym}$ によって, f は $(0,\infty)$ から $(0,\infty)$ への連続写像で, 条件 $(f(1) = 1)$ と対称条件 $(f(t) = tf(1/t))$ を満たすものとする. このような $f \in C(0,\infty)^{+}_{1,sym}$ が与えられたとき, 次の定義式で f に関連した平均に近い 2 変数関数 $M_f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ が得られる:

$$M_f(s,t) = tf(s/t), \quad s,t \in (0,\infty).$$

つまり M_f は以下のような性質を持つ:

$$M_f(s,t) > 0, \quad M_f(1,1) = 1,$$
$$M_f(\alpha s, \alpha t) = \alpha M_f(s,t) \quad (\alpha > 0), \quad \text{and } M_f(s,t) = M_f(t,s).$$

$N \times N$ 行列 A に対して左から, 右からの作用として作用素 L_A, R_A を定義する.

$$L_A : \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \ni X \mapsto AX \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}),$$
$$R_A : \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \ni X \mapsto XA \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}).$$

トレースを内積と考えれば $(\mathbb{M}_N(\mathbb{C}), \mathrm{Tr})$ は Hilbert 空間なので, L_A, R_A は $(\mathbb{M}_N(\mathbb{C}), \mathrm{Tr})$ 上の可換な作用素になる.

関数 $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が正定値であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{pmatrix} \phi(x_1 - x_1) & \phi(x_1 - x_2) & \cdots & \phi(x_1 - x_n) \\ \phi(x_2 - x_1) & \phi(x_2 - x_2) & \cdots & \phi(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(x_n - x_1) & \phi(x_n - x_2) & \cdots & \phi(x_n - x_n) \end{pmatrix} \geq 0$$

となることである.

行列の正値性の性質より, 正定値関数の正数倍や, 正定値関数の和, 積、各点収束極限関数がまた正定値関数になる. また定義より, 有界であること $(|\phi(x)| \leq \phi(0))$ や

$$\phi(x) = 1, \qquad \phi(x) = e^{iax} \quad (a \in \mathbb{R})$$

が正定値であることが簡単にわかる.

Bochner の定理より, 原点で連続な正定値関数は, $\mathbb{R}$ 上の有限な測度 μ を用いて

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\mu(t).$$

となることが知られている.

関数 $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が無限分解可能であるとは, 任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $f^{1/n}$ が正定値になることをいう. このとき, 上に述べた性質より, 任意の $r > 0$ に対して f^r が正定値になることがわかる.

2 Introduction

ここでは, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ として, 次のような関数を対象とする.

$$f_{\alpha,\beta}(t) = t^{\gamma(\alpha,\beta)} \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i(t^{a_i} - 1)}{a_i(t^{b_i} - 1)},$$

ここで $\gamma(\alpha, \beta) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)}{2}$. まず注意することは

$$\frac{t^a - 1}{a} = \log t \text{ if } a = 0$$

を表すことと

$$f_{\alpha,\beta} \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$$

である.

この話の出発点になるのは, 次の McIntosh のノルム不等式である.

$$\|H^{1/2}XK^{1/2}\| \le \frac{1}{2}\|HX + XK\|$$

ここで $H, K, X \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ であり $H, K \ge 0$ を満たす.

この不等式および関係する不等式は数多く研究されている. この作用素ノルム不等式は, 行列の場合に示せば十分であるので, 日合-幸崎による方法 [3] では, 関数

$$g(t) = \frac{t+1}{2}, \quad f(t) = \sqrt{t} \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$$

について

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{f(e^x)}{g(e^x)}$$

が正定値関数になることを調べ, そのとき Bochner の定理による確率測度 μ を用いて

$$M_f(L_H, R_K)X = \int_{-\infty}^{\infty} H^{is}(M_g(L_H, R_K)X)K^{-is}d\mu(s)$$

という積分表示を導く. この積分表示から, 作用素ノルムだけでなくユニタリ不変ノルムに対して

$$|||M_f(L_H, R_K)X||| \le |||M_g(L_H, R_K)X|||$$

が成立することがわかる.

したがって, McIntosh の不等式のようなノルム不等式を得る方法は, ある関数族 $\mathcal{F} \subset C(0,\infty)^+_{1,sym}$ について, $f, g \in \mathcal{F}$ に対して

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{f(e^x)}{g(e^x)}$$

が正定値であること ($f \preceq g$ とかくことにする) がわかれば M_f, M_g に関するノルム不等式が得られることになる. 日合-幸崎 [3] においては, その手始めとして関数族

$$\mathcal{F} = \{f_a : f_a(t) = \frac{(a-1)(t^a-1)}{a(t^{a-1}-1)}, \; a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$$

を考察し $f_a, f_b \in \mathcal{F}$　に対して

$$f_a \preceq f_b \Leftrightarrow -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

を示している. ($f_{1/2} \preceq f_2$ が McIntosh の不等式に対応する.)

この論文では上のアプローチをなぞって, 対象とする関数族を

$$\mathcal{F} = \{f_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}\}$$

と考えている. $\alpha = (a), \beta = (a-1) \in \mathbb{R}$ とすると

$$f_{\alpha,\beta}(t) = f_a(t)$$

となるので, 扱う関数族をより広く取り替えたと考えて良い. $f_{\alpha,\beta} \preceq f_{\alpha',\beta'}$ が成立する条件が与えられれば, それに対応して作用素ノルム不等式が得られることになる. もちろん $f_{\alpha,\beta} \preceq f_{\alpha',\beta'}$ であるための同値条件を与えることは目標ではあるが, 今の段階では得られていない.

3 Results

$f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}$ であるとは $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ で

$$f_{\alpha,\beta}(t) = t^{\gamma(\alpha,\beta)} \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i(t^{a_i} - 1)}{a_i(t^{b_i} - 1)}, \quad \gamma(\alpha, \beta) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)}{2}$$

と表せることである. すでに述べたように $f_{\alpha,\beta}, f_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{F}$ に対して $f_{\alpha,\beta} \preceq f_{\alpha',\beta'}$ を示せば, これに付随した作用素ノルム不等式が得られるので, 当面の問題は

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{f_{\alpha,\beta}(e^{2x})}{f_{\alpha',\beta'}(e^2x)}$$

の正定値性を調べることである.

$\alpha' = (c_1, \ldots, c_m)$, $\beta' = (d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{R}^m$ とするとき

$$\begin{aligned}
\frac{f_{\alpha,\beta}(e^{2x})}{f_{\alpha',\beta'}(e^2x)} &= e^{2\gamma(\alpha,\beta)x - 2\gamma(\alpha',\beta')x} \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i(e^{2a_i x} - 1)}{a_i(e^{2b_i x} - 1)} \prod_{j=1}^{m} \frac{c_j(e^{2d_j x} - 1)}{d_j(e^{2c_j x} - 1)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i(e^{a_i x} - e^{-a_i x})}{a_i(e^{b_i x} - e^{-b_i x})} \prod_{j=1}^{m} \frac{c_j(e^{d_j x} - e^{-d_j x})}{d_j(e^{c_j x} - e^{-c_j x})} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i \sinh a_i x}{a_i \sinh b_i x} \prod_{j=1}^{m} \frac{c_j \sinh d_j x}{d_j \sinh c_j x}
\end{aligned}$$

となる. この正定値性を判定するためには

$$\phi(x)=\prod_{i=1}^{N}\frac{b_i\sinh a_ix}{a_i\sinh b_ix}$$

という形の関数の正定値性が判定できれば良いことになる. したがって, 以下では $\phi(x)$ の正定値性を調べることについて述べる. 続く章で述べるが, $\phi(x)$ が正定値 (positive definite) であることを調べるよりもより強い性質である無限分解可能 (infinitely divisible) であることを調べる方が便利なことがある.

$$\frac{\sinh ax}{a}=\frac{\sinh(-a)x}{-a}$$

なので $a_i\geq 0, b_i\geq 0$ $(i=1,2,\ldots,N)$ と仮定する.

Theorem 1. *Let* $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_N>0$, $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_N>0$. *If* $\sum_{i=1}^{k}a_i\leq\sum_{i=1}^{k}b_i$ *for all* $k=1,2,\ldots,N$, *then* $\phi(x)$ *is infinitely divisible.*

この定理の仮定を満たさない特別な場合には, 次のように正定値にならないことがわかる.

Proposition 2. *(1) If* $a_1+\cdots+a_N>b_1+\cdots+b_N$, *then* $\phi(x)$ *is not positive definite.*

(2) If $\max\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}>\max\{b_1,b_2,\ldots,b_N\}$, *then* $\phi(x)$ *is not positive definite.*

$N=2$ のときに, 定理の条件を満たさない場合はこの proposition の状況にあてはまるので

Corollary 3. *Assume that* $N=2$. *Then* $\phi(x)$ *is infinitely divisible if and only if* $a_1\leq b_1$ *and* $a_1+a_2\leq b_1+b_2$.

$N>2$ のときに定理の仮定は $\phi(x)$ が無限分解可能であるための同値条件になるかどうか, というのは自然な問題だと思われる. 残念ながら以下のような例があるので, これは同値条件にはなっていない.

Example 4. $\dfrac{\sinh 8x\sinh 6x\sinh 3x}{\sinh 9x\sinh 4x\sinh 4x}$ *is not positive definite.*

Example 5. $\dfrac{\sinh 8x\sinh 6x\sinh x}{\sinh 9x\sinh 4x\sinh 4x}$ *is infinitely divisible.*

証明の詳細については preprint [1] を参考にしていただくことにして, outline については次の章で述べることにする.

4 Outline of proofs

Theorem 1 に関係して, $a, b > 0$ $(a \neq b)$ に対して

$$\frac{b\sinh ax}{a\sinh bx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \frac{\sin(\pi a/b)}{2a(\cosh(\pi t/b) + \cos(\pi a/b))} dt$$

の関係式が知られている [5]. これより $\frac{b\sinh ax}{a\sinh bx}$ が正定値であることと $a < b$ が同値であることがわかる. また対応する確率測度

$$\frac{\sin(\pi a/b)}{2a(\cosh(\pi t/b) + \cos(\pi a/b))} dt$$

は有限な 2 次のモーメントをもつ.

$\varphi(x)$ が無限分解可能 (infinitely divisible) である, つまり対応する有限測度が無限分解可能であり 2 次のモーメントが有限であるとき, Kolmogorov の定理により, $\varphi(x)$ の無限分解可能性は

$$\log\varphi(x) = i\gamma x + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{e^{ixt} - 1 - ixt}{t^2}) d\nu(t),$$

の形を持つことで特徴付けられる. ここで $\gamma \in \mathbb{R}$, ν は有限測度である. 幸崎 [6] により

$$\log(\frac{b\sinh ax}{a\sinh bx}) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{\sinh((1/a - 1/b)\pi t/2)}{2t\sinh(\pi t/2a)\sinh(\pi t/2b)} dt$$

が示されている. つまり

$$\gamma = 0, \quad d\nu(t) = \frac{t^2 \sinh((1/a - 1/b)\pi t/2)}{2t\sinh(\pi t/2a)\sinh(\pi t/2b)} dt$$

となるので, $\frac{b\sinh ax}{a\sinh bx}$ が無限分解可能であることと $a \leq b$ が同値であることがわかる.

幸崎により実質的に示されている命題であるが, $b \geq a \geq c \geq d > 0$ かつ $a + c \leq b + d$ のとき

$$\frac{bd\sinh ax \sinh cx}{ac\sinh bx \sinh dx}$$

は無限分解可能である. この命題は

$$\log\frac{bd\sinh ax \sinh cx}{ac\sinh bx \sinh dx} = \log\frac{b\sinh ax}{a\sinh bx} + \log\frac{d\sinh cx}{c\sinh dx}$$

に Kolmogorov の積分表示を適用して, 密度関数が非負になることを見ることによって無限分解可能性が判定できる.

この結果を用いて

$$f_5(x) = \frac{\sinh 3.1x \sinh 2.9x \sinh 2.4x \sinh 1.5x \sinh 1.3x}{\sinh 4x \sinh 3x \sinh 1.6x \sinh 1.4x \sinh 1.2x}$$

が無限分解可能であることを示してみる. 無限分解可能な関数の積は, また無限分解可能であるから, より易しい関数に帰着させることを考える.

まず, この関数は Theorem 1 の仮定を満たしている. また初めに分子の数が大きくなるのは $2.4 > 1.6$ なので, $3 + 1.6 - 2.4 = 2.2$ を用いて

$$\begin{aligned}
f_5(x) &= \frac{\sinh 3.1x \sinh 2.9x \sinh 2.2x \sinh 2.4x \sinh 1.5x \sinh 1.3x}{\sinh 4x \sinh 2.2x \sinh 3x \sinh 1.6x \sinh 1.4x \sinh 1.2x} \\
&= \frac{\sinh 2.2x \sinh 2.4x}{\sinh 3x \sinh 1.6x} \times \frac{\sinh 3.1x \sinh 2.9x \sinh 1.5x \sinh 1.3x}{\sinh 4x \sinh 2.2x \sinh 1.4x \sinh 1.2x} \\
&= \frac{\sinh 2.2x \sinh 2.4x}{\sinh 3x \sinh 1.6x} f_4(x)
\end{aligned}$$

と無限分解可能な関数と $f_4(x)$ の積になる. ここで $f_4(x)$ も Theorem 1 の仮定を満たすので $2.9 > 2.2$ に注目し, $4 + 2.2 - 2.9 = 3.3$ を用いて

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= \frac{\sinh 3.1x \sinh 3.3x \sinh 2.9x \sinh 1.5x \sinh 1.3x}{\sinh 3.3x \sinh 4x \sinh 2.2x \sinh 1.4x \sinh 1.2x} \\
&= \frac{\sinh 3.3x \sinh 2.9x}{\sinh 4x \sinh 2.2x} \times \frac{\sinh 3.1x \sinh 1.5x \sinh 1.3x}{\sinh 3.3x \sinh 1.4x \sinh 1.2x} \\
&= \frac{\sinh 3.3x \sinh 2.9x}{\sinh 4x \sinh 2.2x} f_3(x)
\end{aligned}$$

と無限分解可能な関数と $f_3(x)$ の積になる. さらに $f_3(x)$ に同様な議論を適用すると

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{\sinh 3.1x \sinh 3.2x \sinh 1.5x \sinh 1.3x}{\sinh 3.2x \sinh 3.3x \sinh 1.4x \sinh 1.2x} \\
&= \frac{\sinh 3.2x \sinh 1.5x}{\sinh 3.3x \sinh 1.4x} \times \frac{\sinh 3.1x \sinh 1.3x}{\sinh 3.2x \sinh 1.2x}
\end{aligned}$$

となるので, 帰納的に Theorem 1 が証明できることがわかる.

Proposition 2 (1) については $\phi(x)$ が非有界な関数になることからわかる. (2) については, 日合-幸崎-Petz-Ruskai [4] による $a, b > 0$ のとき

$$\frac{\sinh ax \sinh bx}{\sinh^2 x}$$

が正定値であるための同値条件は $a, b \leq 1$ であることの証明と本質的に同じである.

この関数は分母分子とも 2 個の hyperbolic sine 関数の積になっているが, これを N 個の場合に考えるという煩雑な議論になる. 目標とする命題は p を 3 以上の素数とするとき

$$\frac{\sinh((p+1)x/p)(\sinh(x/p))^{N-1}}{(\sinh x)(\sinh((p-1)x/p))^{N-1}}$$

が正定値でないことを示すことである. つまり Fourier 変換した関数が非負関数とならないことを計算する.

Theorem 1 と Proposition 2 により, $N=2$ のとき, つまり

$$\frac{b_1 b_2 \sinh a_1 x \sinh a_2 x}{a_1 a_2 \sinh b_1 x \sinh b_2 x}$$

が無限分解可能になるための条件が完全に決定されたことになる (Corollary 3). $N > 2$ のときは, Theorem 1 の仮定を満たさない関数で, 正定値にならない関数 (Example 4), 無限分解可能になる関数 (Example 5) が存在する.

Example 4 については, 適当な点を選んで正定値行列にならないものが存在することで示すことができる.

Example 5 については,

$$\log \frac{\sinh 8x \sinh 6x \sinh x}{\sinh 9x \sinh 4x \sinh 4x} = \log \frac{\sinh 8x}{\sinh 9x} + \log \frac{\sinh 6x}{\sinh 4x} + \log \frac{\sinh x}{\sinh 4x}$$

として, それぞれに Kolmogorov の積分表示を考えて, 密度関数が非負になることを確かめることによって, 無限分解可能であることがわかる.

5 Applications

Theorem 1 の仮定を満たす a_i, b_i を考える. これを用いて多くの作用素ノルム不等式が得られることになります. 具体的な例として, 無限分解可能であることをみた関数

$$\frac{\sinh 3.1x \sinh 2.9x \sinh 2.4x \sinh 1.5x \sinh 1.3x}{\sinh 4x \sinh 3x \sinh 1.6x \sinh 1.4x \sinh 1.2x}$$

を考えます. この関数は

$$\frac{\sinh 3.1x \sinh 1.5x}{\sinh 3x \sinh 1.6x} \times \frac{\sinh 2.9x \sinh 2.4x \sinh 1.3x}{\sinh 4x \sinh 1.4x \sinh 1.2x}$$
$$\frac{\sinh 3.1x \sinh 2.4x \sinh 1.3x}{\sinh 4x \sinh 1.6x \sinh 1.2x} \times \frac{\sinh 2.9x \sinh 1.5x}{\sinh 3x \sinh 1.4x}$$

などいろいろな見方ができます. これに対応して

$$f_{(3.1,1.5),(3,1.6)} \preceq f_{(4,1.4,1.2),(2.9,2.4,1.3)}$$
$$f_{3.1,2.4,1.3),(4,1.6,1.2)} \preceq f_{(3,1.4),(2.9,1.5)}$$

が得られるので, これをもとに 2.Introduction で述べたように作用素ノルム不等式が得られます.

参考文献

[1] Albania, I. N. and Nagisa, M., Some families of operator norm inequalities, ArXiv:1610.07302.

[2] Bhatia, R., *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, 2007.

[3] Hiai, F. and Kosaki, H., Means for matrices and comparison of their norms, Indiana Univ. Math. J. 48(1999), 899–936.

[4] Hiai, F., Kosaki, H., Petz, D. and Ruskai, M. B., Families of completely positive maps associated with monotone metrics, Linear Algebra Appl. 439(2013), 1749–1791.

[5] Kosaki, H., Arithmetic-Geometric mean and related inequalities for operators, J. Funct. Anal. 159(1998), 429–451.

[6] Kosaki, H., Strong monotonicity for various means, J. Funct. Anal. 267(2014), 1917–1958.