

## 2次元周期進行波の強非線形解とKP解の比較

九州大学・総合理工学府 平川 知明 (Tomoaki Hirakawa)<sup>1</sup>  
九州大学・応用力学研究所 岡村誠 (Makoto Okamura)<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Energy and Environmental Engineering, Kyushu University

<sup>2</sup>Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

### 概要

水平方向に2重周期の表面重力進行波は、波形に応じて short-crested wave と long-crested wave に区別される。浅水における short-crested wave と long-crested wave の両方を表すことで知られる Kadomtsev-Petviashvili 方程式 (KP 方程式) は弱非線形性, 弱分散性, 弱二次元性を仮定して水波の基礎方程式から導出でき, 2重周期解はリーマンチータ関数 (種数 2KP 解) で表される。本研究では, 水波の基礎方程式の有限水深2次元周期進行波解を数値的に求め, それに対応する種数 2KP 解と比較し, 弱非線形性, 弱分散性, 弱二次元性の不成立が種数 2KP 解の近似精度にいかん影響するかを定量的に調べる。

### 1 はじめに

2次元の波において最も単純と思われる水平方向に2重周期の表面重力進行波を考える。2次元波は1次元波よりも現実的であるため, 水の波の問題において2次元性を考慮することは実践的な応用の観点から重要である。2重周期波は, 異なる方向に伝播する波列が交差したり, または防波堤などの垂直な壁に入射した波列が自身の反射波と交わることなどで生じる。基礎方程式は強非線形性のため, 一般に2重周期解 (直接解) を求めることは難しい。直接解に関する研究は主に, 波の振幅の極限, 高調波共鳴による解の分岐, 解の安定性, 垂直壁面にかかる圧力, 弱非線形方程式の解との比較, などに対する興味を背景として, 解の計算方法を改善しながら発展してきた。

直接解に関する初期の研究においては, 摂動法がよく用いらてきた。例えば, [1] は, 3次の非線形効果まで考慮した有限水深の摂動展開解を求めている。この摂動展開解を考える際には次の4つの限界に注意しなければならない。1) 振幅を微小パラメータと仮定して展開するため, 振幅が大きくなると, 解の収束は遅くなる。2) 一般的に摂動展開は, 基本モード: 波数  $(j, k) = (1, 1)$  を1次解と仮定する, 言い換えれば, 高次のフーリエモードは高次でしか生成されないと仮定するのである。高調波共鳴により散在する特異点付近ではこの仮定は破綻し, 解の近似精度が悪化する原因となる。3) 高調波共鳴が無視できるほど小さい場合でも, 波形が1次元性 (long-crested wave) になる場合は (基本的に,  $\theta \rightarrow 90^\circ$  で起こる), 進行方向に対して垂直な方向のフーリエモードは減衰しにくくなる。4) 特に有限水深の場合に, 水深が浅くなり波形の幅が非常に狭まると, より高次のフーリエモードが必要になる。

準解析的な方法として, [2] は, 摂動法をプログラムし, 計算機を使って無限水深における27次まで考慮した摂動展開解を求めた。[3] は, そのプログラムを有限水深に一般化し35次まで考慮した摂動展開解を求めている。これらの仕事は, 高次の摂動展開によって, 上で述べた3番目の摂動展開の限界を押し広げた。

[4, 5, 6] は, 無限水深の2重フーリエ級数解を選点法によって求めた。選点法は, 摂動展開の1, 2番目の限界を含まない。しかし, 波が尖る場合, 表面変位の空間微分が特異的になり, 大きな数値誤差を引き起こす可能性がある。これに関して, よく用いられる表面変位  $\eta$  と速度ポテンシャル  $\phi$  の運動学的条件式の代わりに, Tsai は,  $\phi$  のみに依存する運動学的条件式を使うことで, 表面変位の空間微分の計算を避けている。最近では, [7] が, Galerkin 法を使い無限水深の大振幅波の2重フーリエ級数解を求めている。ここでは,  $\phi$  のみに依存する運動学的条件式を用い, さらに, 表面変位をイテレーションごとに評価することで Newton 法の収束性を向上させている。この方法も選点法と同じように摂動展開の1, 2番目の限界を含ま

ない。

Kadomtsev-Petviashvili 方程式 (KP 方程式) [8] も 2 重周期解を持つ。KP 方程式は、Kortewegde Vries 方程式 (KdV 方程式) を 2 次元へ拡張したもので、2 次元 KdV 方程式とも呼ばれる。KdV 方程式の 1 周期解はヤコビの楕円関数で表され、KP 方程式もまたヤコビの楕円関数の解を持つ。これらは周期無限大の極限で、1 ソリトン解となる。

[9, 10] は、KP 方程式の 2 重周期解がリーマンテータ関数で記述できることを示した。[11] は、種数 2KP 解の簡便な求め方を示し、より実践的なモデルとして種数 2KP 解について詳しく調べている。その上で、種数 2KP 解が浅水での '典型的' な非線形の周期波になると予想した。[12] は種数 2KP 解が典型的な 3 次元周期浅水波であることを支持する海岸線の波の写真を紹介している。この予想をきっかけとして、[13] は種数 2KP 解と水槽実験から得られた波形の比較を行い、仮定 (17) の範囲外の場合でさえ、KP 方程式が現実の波形とよく一致する解を持ちえることを示している。さらに、KP 理論の近似精度は角度 (弱二次元性) に対して特に敏感だとは言えないと結論づけている。ただし、実験と波形が最も一致する解を求め比較した結果であり、KP 方程式の近似精度を検証したわけではない。

この種数 2KP 解の無限波長の極限として 2 ソリトン解が知られている。[14] は、KP 方程式の 2 ソリトン解と同等の解を KdV 方程式から導いた。また、2 ソリトン解の最大振幅を予想できる相互作用パラメタを求めている。[15] は、KP1 ソリトン解と KdV 1 ソリトン解の比較から、KP 方程式の持つ弱二次元性の制限を緩和する補正方法を見つけた。Miles 理論は定常状態の KP2 ソリトン解と同等であり、Miles 理論の相互作用パラメタを補正すれば、Miles 理論の予想と数値計算結果の最大振幅はよく一致することを示している。[16] も補正された相互作用パラメタの有用性を示している。ただし、未だソリトン解の最大振幅に対してのみ、この補正の有用性は示されており、周期解に応用された例はない。さらに、波形に対してどれだけ有用なのかは明らかではない。

[17] は、 $O(\varepsilon)$  where  $\varepsilon = a/h$  までしか考慮していないが、2 重フーリエ級数形式の直接解を求めている。同様の方法で同形式の KP 2 重周期解を求め、両解を比較した。x, y 方向の波数の比  $K_x/K_y$  が大きい場合にのみ、波形が顕著に違った。また、 $K_x/K_y$  が大きいほど、直接解よりも KP 解の中心ピークは尖り、位相速度は速くなった。さらに、[14] の相互作用パラメタは、周期解の場合には、周期性のため適用できないと指摘している。Bryant の結果を発展させるとすれば、1) より高次の非線形効果を取り込んだ方程式を解くことで、Bryant の扱った解よりも大きな振幅の解を比較することができる。2) 直接解との比較には厳密な KP 2 重周期解である種数 2KP 解を使えばより厳密な比較ができる。しかし、その困難さから大振幅の有限水深の直接解を求めた論文は、我々の知る限り存在しない。直接解と種数 2KP 解を対応付けて比較した研究も存在しない。

本研究の主な目標は以下の 2 つである。1) [7] の計算方法を有限水深に一般化し、それによって求めた直接解と対応する種数 2KP 解とを比較することで、KP 方程式の近似の妥当性を調べること。2) [15] の KP 2 ソリトン解に対する補正を種数 2KP 解に応用し、その補正が位相速度、最大振幅、波形に対してどれほど有用なのかを検証することである。本研究では、定常な種数 2KP 解の近似の妥当性と有用性に焦点を絞っており、安定性は議論しない。また、浅水の場合を考えるため、直接解の表面張力は考慮しない。ここでは、1) についてのみ紹介する。

## 2 定式化

水平座標  $x, y$ , 上方向に増加する鉛直座標  $z$  から成る Cartesian 座標を使う。流体は、非粘性、非圧縮、渦なしを仮定すし、よって、ベクトル恒等式  $\mathbf{u} = \nabla \cdot \phi$  を満たす速度ポテンシャル  $\phi$  が存在する。重力加速

度  $g$  は  $z$  方向の負方向を向いている。波の表面変位  $z = \eta(x, y, t)$  と  $\phi$  に関する波の基礎方程式は

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{for } z \leq \eta(x, y, t), \quad (1)$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{on } z = -h, \quad (2)$$

$$\frac{p}{\rho} = \phi_t + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + gz = 0 \quad \text{on } z = \eta(x, y, t), \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) = (\partial_t + \nabla\phi \cdot \nabla) \left[ \phi_t + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + gz \right] = 0 \quad \text{on } z = \eta(x, y, t). \quad (4)$$

ただし  $h$  は平均水深,  $p$  は圧力,  $\rho$  は密度である。さらに次の周期条件と対称波条件を仮定する。

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y + 2\pi, z, t) = \phi(x + 2\pi, y, z, t),$$

$$\phi(x, y, z, t) = -\phi(-x, y, z, t) = -\phi(x, -y, z, t), \quad (5)$$

$$\phi(x, -y, z, t) = -\phi(\pi - x, \pi - y, z, t).$$

波長を  $\Lambda$ , 波の波数を  $K = 2\pi/\Lambda$  とする。波の  $x, y$  方向の周期  $\Lambda_x, \Lambda_y$  で決まる角度  $\theta = \arctan(\Lambda_y/\Lambda_x)$  を用いて,  $x, y$  方向の波数は  $K_x = K \sin\theta, K_y = K \cos\theta$  と書ける。次の (1) と (2) を満たす 2 重フーリエ級数の形の  $\phi$  を求める。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \sum_{j=1} \sum_{k=1} A_{jk} \cosh(\alpha(z+h)) \cos(kK_y y) \sin(j(K_x x - \omega t)) + \beta t \\ &= \varphi + \beta t. \end{aligned} \quad (6)$$

変数を次のように規格化する。

$$T = K_x x - \omega t, \quad Y = K_y y, \quad Z = Kz,$$

$$H(T, Y) = K\eta(x, y, t), \quad \Phi(T, Y, Z) = \frac{K^2}{\omega} \varphi(x, y, z, t), \quad G = \frac{K}{\omega^2} g, \quad B = \frac{K^2}{\omega^2} \beta. \quad (7)$$

(7) によって, (1), (2), (3), (4) は次式となる。

$$p^2 \Phi_{TT} + q^2 \Phi_{YY} + \Phi_{ZZ} = 0 \quad \text{for } Z \leq H(T, Y), \quad (8)$$

$$\Phi_Z = 0 \quad \text{on } Z = -\frac{h}{K}, \quad (9)$$

$$P(T, Y, Z) = -\Phi_T + B + \frac{1}{2}(p^2 \Phi_T^2 + q^2 \Phi_Y^2 + \Phi_Z^2) + GZ = 0 \quad \text{on } Z = H(T, Y), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Q(T, Y, Z) &= \Phi_{TT} + p^2 \Phi_T (-2\Phi_{TT} + p^2 \Phi_T \Phi_{TT} + q^2 \Phi_Y \Phi_{YT} + \Phi_Z \Phi_{ZT}) \\ &\quad + q^2 \Phi_Y (-2\Phi_{YT} + p^2 \Phi_T \Phi_{YT} + q^2 \Phi_Y \Phi_{YY} + \Phi_Z \Phi_{YZ}) \\ &\quad + \Phi_Z (-2\Phi_{ZT} + p^2 \Phi_T \Phi_{ZT} + q^2 \Phi_Y \Phi_{YZ} + \Phi_Z \Phi_{ZZ} + G) = 0 \quad \text{on } Z = H(T, Y). \end{aligned} \quad (11)$$

(11) の代わりに, 表面変位  $Z = H$  のラグランジュ微分がよく用いられるが, これは  $H$  の空間微分を含んでおり, 表面変位が尖る場合は表面変位の空間微分が特異的になり数値誤差の原因になるため, ここでは (11) を使う。規格化された  $\varphi$  は

$$\varphi = \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^N A_{jk} [\cosh(\alpha Z) + \sinh(\alpha Z) \tanh(\alpha d)] \cos(kY) \sin(jT), \quad \alpha = \sqrt{k^2 q^2 + j^2 p^2}. \quad (12)$$

周期性により,  $k+j$  が odd なら  $A_{j,k} = 0$  となる。未知数変数は  $A_{j,k}$  が  $N(N+1)/2$  個と  $\beta, G$  である。

### 3 数値計算方法

次式のように直交性を使い, 未知数  $A_{j,k}$  の数  $N(N+1)/2$  以上の方程式を得ることができる。

$$F_{lm}(A_{j,k}, B, G) = \int_0^\pi dT \int_0^\pi dY Q(Y, T, H; A_{j,k}, B, G) \cos(lY) \sin(mT) \quad \text{on } Z = H(Y, T). \quad (13)$$

(13) は、2重フーリエ変換と解釈できる。波平均水面が0となる条件式を加える。

$$s = \int_0^{\Lambda_y/2} \int_0^{\Lambda_x/2} \eta dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi H dT dY = 0. \quad (14)$$

2重積分は、台形則を使って評価する。(14)の積分は台形則を使って数値的に積分する。最後に次式を加えて未知数変数の数以上の方程式を得る。

$$W(A_{jk}, B, G) = \varepsilon - H\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; A_{jk}, B, G\right) + H(\pi, 0; A_{jk}, B, G) = 0. \quad (15)$$

$\varepsilon$  は任意に決定する変数である。(T, Y) = (0, 0) で2波は交差し、相互作用は最も強くなる。基本的に  $H(0, 0)$  は最大振幅となる。 $H(\pi/2, \pi/2)$  の表面変位は相互作用の影響が最も小さい波の峰に当たる。(15)の代わりに、これまでは、wave steepness として、 $2\varepsilon - H(0, 0) + H(\pi, 0) = 0$  が主に用いられてきたが、ここでは、KP方程式の解との比較がしやすいように、(15)で $\varepsilon$ を定義している。数値計算方法としては、Newton法を使って(13)、(14)、(15)から、 $A_{j,k}, B, G$ を求める。残りの未知変数  $H$  は、イテレーション毎に予め数値的に評価し代入していき、 $H$ を求める際もNewton法を使う。最初のイテレーションの初期値としては[1]の第3近似解を使う。イテレーションのステップ前後の表面変位  $H$  の差の最大が  $10^{-10}$  以下となれば解は収束したとする。さらに、 $Q < 10^{-4}\varepsilon$  を満たす結果のみを解とする。

## 4 KP理論

KP方程式：

$$(U_T + 6UU_X + U_{XXX})_X + 3U_{YY} = 0. \quad (16)$$

(1), (2), (3), (4)に次の4つの仮定を課すことにより(16)を導くことができる。KP方程式の仮定：1) 小さい振幅の波 (弱非線形性)、2) 波の代表的水平長さに対して浅い水深 (弱分散性)、3) ほぼ1次元の波 (弱二次元性)、4) これら3つの効果が同程度の大きさ：

$$\frac{|U|_{\max}}{h} \ll 1, \quad (\kappa h)^2 \ll 1, \quad (k_y/k_x)^2 \ll 1, \quad \frac{|U|_{\max}}{h} \simeq (\kappa h)^2 \simeq (k_y/k_x)^2. \quad (17)$$

[9] はリーマンテータ関数がKP方程式の解となることを証明し、それをもとに[11]は、位相定数2つを含む11個のパラメタで構成されるKP解の簡便な求め方を紹介している。その一部で、実際の観測結果からKP解を構成するパラメタの決め方を紹介しているが、直接解とKP解の比較が複雑になるので、ここでこの方法は使わない。代わりに、直接解を導く連立方程式(13)、(14)、(15)に対応する種数2KP解を導く方程式を作成する。種数2KP解は次式で表される、

$$U(X, Y, T) = 2\partial_X^2 \ln \vartheta(\Theta_1, \Theta_2; \mathbf{B}), \quad (18)$$

where

$$\vartheta = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{dm_2^2}{2} + \frac{b}{2}(m_1 + \lambda m_2)^2\right] \cos(m_1\Theta_1 + m_2\Theta_2),$$

$$\Theta_i = M_i X + N_i Y + \Omega_i T + \pi, \quad (i = 1, 2), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & b\lambda \\ b\lambda & b\lambda^2 + d \end{pmatrix}.$$

つまり、 $h, \theta$  には、直接解と同じ値を使うので、KP解の未知パラメタの数は3つ ( $b, \lambda, \Omega_1$ ) となる。4種類の  $\mathbf{p}$  で決まる次の4つの式をパラメタが満たすとき(18)はKP方程式を満たす。ここで  $D$  は積分定数。テータ定数  $\hat{\vartheta}[\mathbf{p}]$  は次のように定義する。

$$\hat{\vartheta}[\mathbf{p}] \equiv \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \exp\{(\mathbf{m} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{m} + \mathbf{p})\}, \quad (19)$$

where

$$\mathbf{m} \equiv \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4.$$

and

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{p}$  は 2 成分ベクトルで,  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$  のいずれかである.

$$\frac{4\mathbf{Q}_{i,j}\mathbf{V} - \mathbf{Q}_{i,j}\mathbf{Y}_2}{\mathbf{Q}_{i,j}\mathbf{Y}_1} = \frac{4\mathbf{Q}_{k,\ell}\mathbf{V} - \mathbf{Q}_{k,\ell}\mathbf{Y}_2}{\mathbf{Q}_{k,\ell}\mathbf{Y}_1}, \quad (20)$$

$$i \neq j, (i, j) \neq (2, 3), (3, 2), k \neq \ell, (k, \ell) \neq (2, 3), (3, 2), (i, j) \neq (k, \ell).$$

where

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \left( \hat{\vartheta}[\mathbf{p}_j]\mathbf{S}_i - \hat{\vartheta}[\mathbf{p}_i]\mathbf{S}_j \right), \quad \mathbf{V} = M_1^4 \left( 1, 4(1-\lambda), 6(1-\lambda)^2, 4(1-\lambda)^3, (1-\lambda)^4 \right)^T,$$

$$\mathbf{Y}_1 = M_1 \left( 1, 2(1-\lambda), (1+\lambda)^2 \right)^T, \quad \mathbf{Y}_2 = 3N_1^2 \left( 1, -2(1+\lambda), (1+\lambda)^2 \right)^T.$$

and

$$\mathbf{S}_i = \left( \partial_b^2 \hat{\vartheta}[\mathbf{p}_i], \partial_b \left( \frac{1}{2b} \partial_\lambda \hat{\vartheta}[\mathbf{p}_i] \right), \partial_b \partial_d \hat{\vartheta}[\mathbf{p}_i], \frac{1}{2b} \partial_d \partial_\lambda \hat{\vartheta}[\mathbf{p}_i], \partial_d^2 \hat{\vartheta}[\mathbf{p}_i] \right) \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

パラメタ  $(b, \lambda)$  が (20) を満たせば, (18) は KP 方程式の解になる. その点, (20) は, (13) に対応する KP 周期解を導く方程式である. 対称波の場合に (20) は (4.13c) と同じである. 最後に, (15) に対応する方程式は

$$\varepsilon - 2 \frac{\partial_{XX}}{\partial} \Big|_{X=\Lambda_X/4, Y=\Lambda_Y/4} + 2 \frac{\partial_{XX}}{\partial} \Big|_{X=\Lambda_X/2, Y=0} = 0. \quad (21)$$

つまり, (20) と (21) を  $(b, \lambda)$  について解くことで直接解に対応した種数 2KP 解を求めることができる. ここでは Mathematica の FindRoot 関数 (Newton 法) を使って数値的に (20) と (21) を解く. FindRoot 関数のオプションの WorkingPrecision は 40, Jacobian は “Symbolic” と設定する. ヤコビアンを有限差分法で評価すると一部の条件下では計算速度を上げることができるが, 一部の条件では解に収束しない場合がある. 解を常に収束させるには, 収束の早い形式のテータ関数を使うことが特に重要である. [11] は,  $b, d$  の大きさによって収束の異なるテータ関数 (4.7), (4.19a,b) とテータ定数 (4.10), (4.20a,b) の表現を求めている. テータ関数には,  $b \geq 5$  の場合, (4.19b) を用いてそれ以外は (4.7) を用いた. テータ定数には  $b \geq 5$  の場合は (4.20b) をそれ以外は (4.10) を用いた. また, テータ関数とテータ定数の 2 重和の上限  $m_{\max}$  と下限  $m_{\min}$  は, 全て  $(m_{\max}, m_{\min}) = (5, -5)$  として解を求めている. (21) を  $10^{-5}\varepsilon$  の精度で満たす  $b, \lambda$  のみを解とする.

## 5 結果と考察

以下では, KP 方程式の弱分散性がよく成り立つ次の条件を A, B, C, D, E, F, G, H, I と名付けて, 一貫して詳しく調べる. A, B, C, D, E, F, G, H, I, は全て  $h/\Lambda = h^* = 1/50$  であり, それぞれ  $(\varepsilon, \theta)$  が  $(0.1, 45^\circ)$ ,  $(0.05, 45^\circ)$ ,  $(0.01, 45^\circ)$ ,  $(0.1, 59.5^\circ)$ ,  $(0.05, 59.5^\circ)$ ,  $(0.01, 59.5^\circ)$ ,  $(0.1, 69.5^\circ)$ ,  $(0.05, 69.5^\circ)$ ,  $(0.01, 69.5^\circ)$  の条件である. この章の構成は以下の通りである. まず, §5.1 では, 条件 A-I の直接解のフーリエモード  $|A_{j,k}|$  から収束とパラメタ  $(\varepsilon, h, \theta)$  依存性を調べる. 次に, 仮定 (17) の不成立が種数 2KP 解の位相速度, 最大振幅の近似精度にいかにか影響するか調べるために, §5.2 では, 弱非線形性と弱二次元性を表すパラメタ  $\varepsilon$  と  $\theta$  を変化させて直接解と種数 2KP 解を比較する. さらに, §5.3 では条件 A-I の解を例として, 直接解と種数 2KP 解の波形を定量的に比較する.

## 5.1 計算精度

条件 A-I の直接解のフーリエモード  $|A_{j,k}|$  を調べることで、直接解の収束とパラメタ  $(\varepsilon, h, \theta)$  依存性を理解する。Figure 1 は、条件 A-I で求めた直接解の  $\log |A_{j,k}|$  の分布を表している。

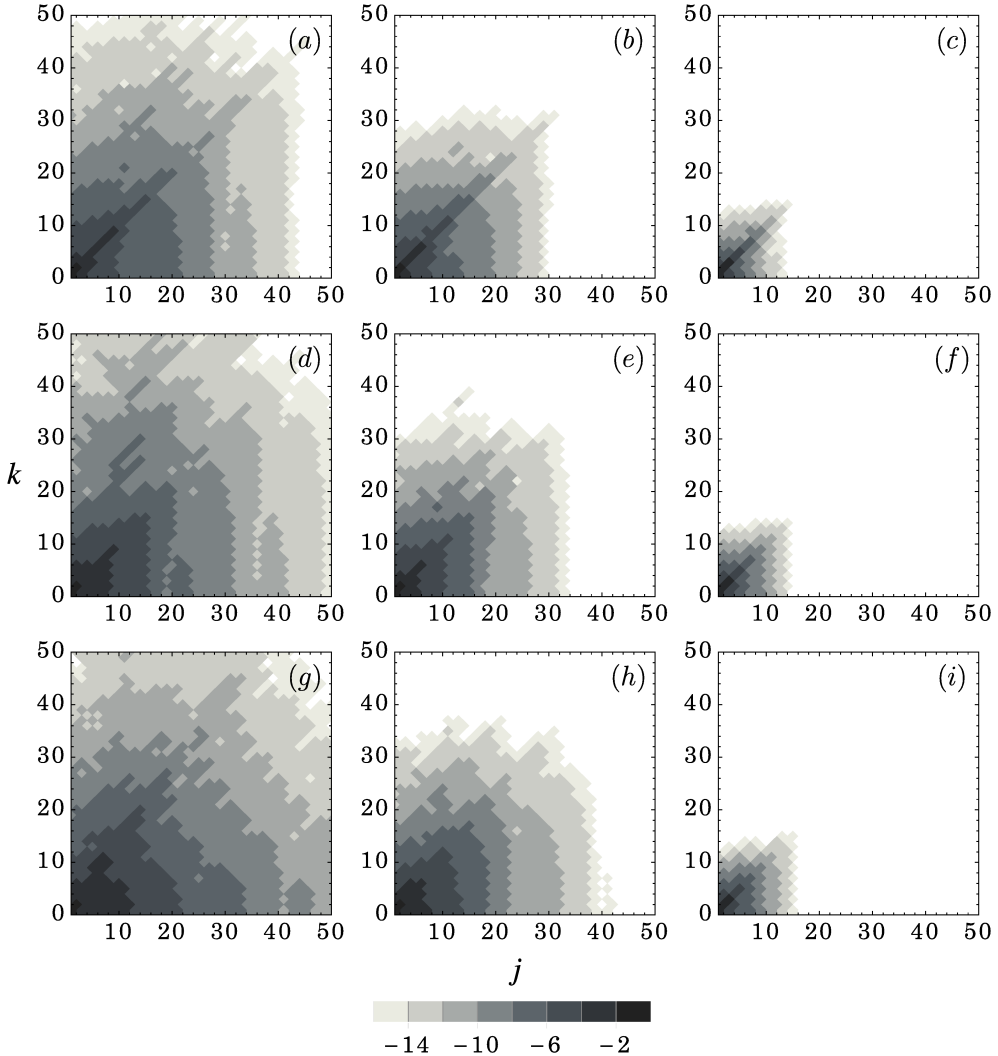


FIGURE 1. The Fourier modes  $\log |A_{j,k}|$  over the wavenumbers  $j$  and  $k$  for the conditions A-I where the depth is fixed to  $h^* = h/(2\pi) = 1/50$ : (a)  $(\varepsilon, \theta) = (0.1, 45^\circ)$  as the condition A; (b)  $(\varepsilon, \theta) = (0.05, 45^\circ)$  as B; (c)  $(\varepsilon, \theta) = (0.01, 45^\circ)$  as C; (d)  $(\varepsilon, \theta) = (0.1, 69.5^\circ)$  as D; (e)  $(\varepsilon, \theta) = (0.05, 69.5^\circ)$  as E; (f)  $(\varepsilon, \theta) = (0.1, 69.5^\circ)$  as F; (g)  $(\varepsilon, \theta) = (0.1, 69.5^\circ)$  as G; (h)  $(\varepsilon, \theta) = (0.05, 69.5^\circ)$  as H; (i)  $(\varepsilon, \theta) = (0.1, 69.5^\circ)$  as I.

Figure 1 から、 $\varepsilon$  が比較的小さい場合  $\varepsilon = \{0.01, 0.05\}$  では、高波数になるにつれ  $|A_{j,k}|$  が非常に早く減衰し、高波数での  $|A_{j,k}|$  は、倍精度の範囲外となっているため直接解への影響は無視できるだろう。 $\varepsilon$  が大きい場合  $\varepsilon = 0.1$  では、他の条件の場合に比べ、 $|A_{j,k}|$  が緩やかに減衰するが、最高波数  $N = 50$  での  $|A_{j,k}|$

では十分小さく ( $|A_{j,k}| < 10^{-10}$ ), 条件 A-I の直接解は十分収束している。

$\theta$  が大きいほど,  $|A_{j,k}|$  の減衰は遅い傾向がある。この傾向は,  $\varepsilon$  が大きいほど顕著である。この  $\theta$  の増加に伴う  $|A_{j,k}|$  の減衰の遅れは, oblique interaction が  $\theta$  の増加に伴い強まるために起こると考えられる。ここで言う “oblique interaction” とは 1 周期解には含まれない 2 重周期解特有の相互作用を意味しており, ステムの長さ (位相のずれ) で定義できるものである。Figure 1(i): 条件 I よりもさらに  $\theta$  が大きい場合 ( $\varepsilon, h^*, \theta$ ) = (0.01, 1/50, 88°) の条件で求めた直接解のフーリエモードとその波形をそれぞれ figures 2(a) and 2(b) に示す。

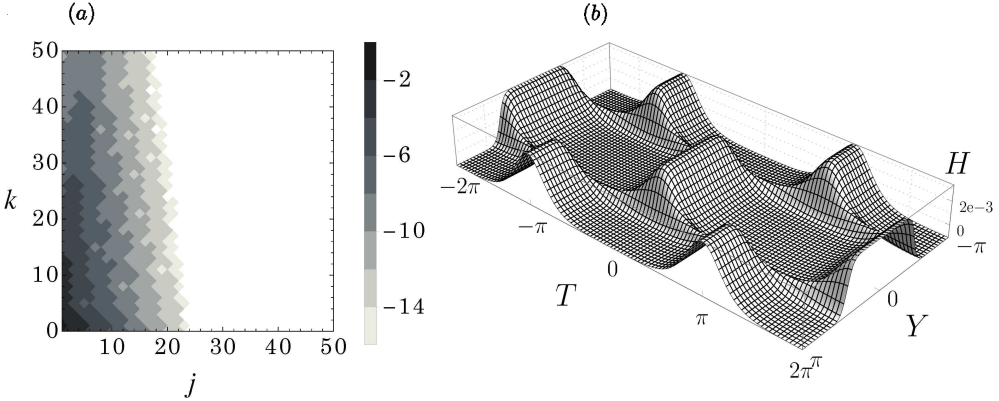


FIGURE 2. (a) The Fourier modes  $\log |A_{j,k}|$  over the wavenumbers  $j$  and  $k$ , and (b) its wave profile of the direct solution for the condition  $(\varepsilon, h^*, \theta) = (0.01, 1/50, 88^\circ)$ .

$\theta$  が増加し波の相互作用が強まると,  $k$  方向の  $|A_{j,k}|$  は減衰が遅くなり偏った分布となる。これは, 波形が  $Y$  方向に矩型波になっているためである。振幅が小さくても, long-crested wave の場合は, 基本モード  $(j, k) = (1, 1)$  を 1 次解と設定して振動展開したのでは, 高次のフーリエモードのオーダーが仮定とは矛盾するため, 妥当な振動展開解を求めることはできないだろう。[18] は,  $\theta \ll 1$  の場合を想定し,  $Y$  方向の三角関数を楕円関数に書き換えることで, long-crested wave の 4 次までの振動展開解を解析的に求めている。このように, 2 重フーリエ級数解で long-crested wave を求めるには,  $k$  方向の最大波数  $N$  を十分に大きくして解を計算する必要がある。今回は  $N = 50$  と設定して解を求めた結果,  $(\varepsilon, h^*, \theta) = (0.01, 1/50, 88.8^\circ)$  の直接解でも収束は良好であり, また, 前に述べた通り, 条件 A-I の中で最も  $\varepsilon$  と  $\theta$  が大きい D の場合でも解の収束は良好である。 $\varepsilon$  または  $\theta$  がこれらより大きい場合には,  $|A_{j,k}|$  の収束が十分でない可能性は残る。そこで, 解の精度を保証するために, 条件  $Q < 10^{-4}\varepsilon$  を満たさない直接解は全て排除している。

## 5.2 位相速度 $c$ と最大振幅 $\alpha$ の角度 $\theta$ と振幅 $\varepsilon$ 依存性の比較

次に, 直接解と種数 2KP 解の位相速度と最大振幅を比較する。まず, 弱非線形性と弱二次元性の不成立の解への影響について調べる。そのために (17) の弱分散性の仮定を十分満たすように, 水深を十分浅くして ( $h^* = 1/50$ ), 直接解と種数 2KP 解の位相速度と最大振幅を比較する。比較する位相速度  $c$  は  $\theta$  方向の位相速度で, 解が 1 周期解の重ね合わせなら  $c$  は角度に依存しない。直接解の位相速度は  $c_{\text{dir}} = c_0/\sqrt{Gh}$ , 種数 2KP 解の位相速度は次式で求まる。

$$c_{\text{KP}} = \omega_i = c_0 \left( \sin \theta - \frac{\Omega_i}{6h} \right) \quad \text{where } i = 1, 2. \quad (22)$$

$\Omega_i$  は (20) である。最大振幅は  $\alpha_{\text{dir}} = H(0, 0)/(\varepsilon h)$ ,  $\alpha_{\text{KP}} = U(0, 0)/(\varepsilon h)$  である。Table 1 には, 条件 A-I で求めた直接解と種数 2KP 解の  $c/c_0^*$  と  $\alpha$  を載せている。ただし, 浅水の位相速度  $c_0 = \sqrt{gh}$  ではなく, も

ともとの線形解の位相速度  $c_0^* = c_0 \sqrt{h \coth(h)}$  で規格化した位相速度  $c/c_0^*$  を比較している. Figures 3(a) and 3(b) は, 条件 A-I の解を含むように  $\varepsilon$  と  $\theta$  を変化させて求めた解の  $c/c_0^*$  と  $\alpha$  である.  $\theta = 90^\circ$  付近では, 種数 2KP 解は求めることができなかった. これは,  $\lambda$  が対称波の種数 2KP 解の範囲  $-1/\sqrt{2} \leq \lambda \leq 1/\sqrt{2}$  の最大値に達したためである.

$\theta$	$\varepsilon$	Condition	$\frac{c_{\text{dir}}}{c_0^*} - 1$	$\frac{c_{\text{KP}}}{c_0^*} - 1$	$\alpha_{\text{dir}}$	$\alpha_{\text{KP}}$	$\frac{c_{\text{KP}}}{c_{\text{dir}}} - 1$	$\frac{\alpha_{\text{KP}}}{\alpha_{\text{dir}}} - 1$
$45^\circ$	0.1	A	$2.52 \times 10^{-2}$	$8.39 \times 10^{-2}$	1.81	1.96	5.73%	8.41%
	0.05	B	$6.90 \times 10^{-3}$	$6.83 \times 10^{-2}$	1.64	1.79	6.10%	9.18%
	0.01	C	$-4.39 \times 10^{-3}$	$5.80 \times 10^{-2}$	1.23	1.39	6.27%	12.9%
$59.5^\circ$	0.1	D	$2.96 \times 10^{-2}$	$4.50 \times 10^{-2}$	2.09	2.39	1.50%	14.4%
	0.05	E	$8.14 \times 10^{-3}$	$2.07 \times 10^{-2}$	1.76	1.89	1.25%	7.62%
	0.01	F	$-4.34 \times 10^{-3}$	$7.80 \times 10^{-3}$	1.25	1.32	1.22%	5.66%
$69.5^\circ$	0.1	G	$6.03 \times 10^{-2}$	$8.29 \times 10^{-2}$	3.28	3.60	2.13%	9.59%
	0.05	H	$1.31 \times 10^{-3}$	$1.78 \times 10^{-2}$	2.20	2.38	0.467%	8.33%
	0.01	I	$-4.20 \times 10^{-3}$	$-1.52 \times 10^{-3}$	1.31	1.35	0.269%	3.00%

TABLE 1. The phase velocity of direct solutions  $c_{\text{dir}}/c_0^* - 1$ , phase velocity of KP solutions of genus-2  $c_{\text{KP}}/c_0^* - 1$ , maximum amplitude of direct solutions  $\alpha_{\text{dir}}$ , maximum amplitude of KP solutions of genus-2  $\alpha_{\text{KP}}$ , differences between  $c_{\text{dir}}$  and  $c_{\text{KP}}$ ,  $c_{\text{KP}}/c_{\text{dir}} - 1$ , and differences between  $\alpha_{\text{dir}}$  and  $\alpha_{\text{KP}}$ ,  $c_{\text{KP}}/c_{\text{dir}} - 1$ , for the conditions A-I.

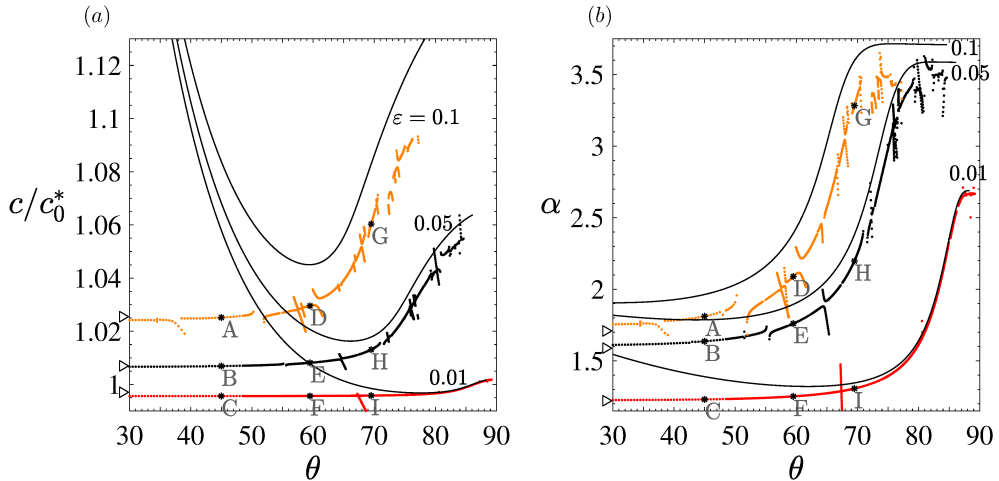


FIGURE 3. Direct solutions (dots) and KP solutions of genus-2 (lines) for  $\varepsilon = 0.01$  (bottom),  $0.05$  (middle) and  $0.1$  (top), showing the dependence of (a) the phase velocity  $c/c_0^*$  and (b) the maximum amplitude  $\alpha$  on  $\theta$ . \* describe direct solutions of the indicated conditions A-I.  $\triangleright$  describe superposition of KdV solutions of Jacobian elliptic function.

Figures 3(a) and 3(b) では, 振幅  $\varepsilon$  が小さくかつ角度  $\theta$  が大きい場合は, (17) がよく満足されるので,  $c/c_0^*$  も  $\alpha$  においても, 直接解と種数 2KP 解はよく一致する.  $\varepsilon = 0.01$  のように  $\varepsilon$  が小さくても,  $\theta$  が小さいと弱二次元性の仮定が満足されず, 種数 2KP 解の  $c/c_0^*$  は増加し直接解からずれてしまう. さらに,  $\theta \rightarrow 0$  では  $M_1 \rightarrow 0$  となり,  $\mathbf{Y}_1 \rightarrow 0$  と  $\mathbf{Y}_2$  は有限であることからわかるように, (20) の  $\Omega_i (i = 1, 2)$  は  $\theta \rightarrow 0$  で  $\Omega_i \rightarrow -\infty$  となる. 従って,  $\theta \rightarrow 0$  では  $c_{\text{KP}} \rightarrow \infty$  である. これは, 明らかな KP 方程式の欠点である.  $\theta$



が小さいと、直接解と種数 2KP 解の  $\alpha$  の差も増加する。 $\theta \rightarrow 0$  では  $\alpha \rightarrow \infty$  である。以上のように、 $\theta$  が小さいと、種数 2KP 解は KdV1 周期解の重ね合わせには収束せず非物理的になる。これは、種数 2KP 解が回転対称でないからである。[15] は、KP ソリトン解を扱い、仮定 (17) の枠組みの範囲内でこの弱二次元性の不成立の影響を緩和するための補正を示している。

振幅  $\varepsilon$  が増加すると、直接解には分岐が次々と現れるが、分岐の枝の部分を無視して種数 2KP 解と比較すれば、 $\varepsilon$  が増加するにつれて、種数 2KP 解と直接解の  $c/c_0^*$  と  $\alpha$  の差は増加することがわかる。(17) の弱非線形性の仮定が妥当でなくなるためである。比較的大きな  $\theta$  (例えば、table 1 の  $\theta = 69.5^\circ$ ) で、 $c_{KP}/c_{dir} - 1$  よりも  $\alpha_{KP}/\alpha_{dir} - 1$  のずれが大きくなり弱非線形性の不成立は  $\omega$  にはあまり影響しない。摂動展開解の周波数  $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$  において、 $\omega_1 = 0$  であることから、この影響の違いは合理的である。

以上の浅水の場合  $h^* = 1/50$  の結果を簡単にまとめる。 $c$  は弱非線形性の不成立の影響に対して比較鈍感である。弱二次元性の不成立に対しては強い影響を受けるものの、 $\varepsilon \leq 0.1$  かつ  $\theta \leq 45^\circ$  の範囲では近似精度は良好である。一方、 $\alpha$  は、比較的大きな  $\theta$  の場合の条件 G:  $(\varepsilon, \theta) = (0.1, 69.5^\circ)$  において、9.59% のずれが生じていることから、弱非線形性の不成立の影響を強く受けると言える。条件 C:  $\varepsilon, \theta = (0.01, 45^\circ)$  の場合に 12.9% のずれが生じることから、 $\alpha$  が弱二次元性の影響に対して鈍感であるとは言えない。

[17] は、2重フーリエ級数形式の直接解を求め、同様に、同形式の KP 2重周期解を求めている。我々の表記法で書けば3つ条件:  $(H(0,0) - H(\pi/2,0), h^*, \theta) = (0.0220, 0.0350, 63^\circ), (0.0322, 0.0515, 72^\circ), (0.0796, 0.126, 82.8^\circ)$  の下で解を比較し、直接解よりも種数 2KP 解は位相速度が速く、最大振幅は大きくなった。また、 $\theta$  が大きいほどその傾向は顕著になった。我々の比較結果は、Bryant の結果を支持していることがわかる。ここでは新たに、 $\varepsilon$  が大きくと、その傾向は保たれ、さらに、 $\varepsilon$  が大きいほど、その傾向は顕著になることもわかった。

種数 2KP 解の最大振幅  $\alpha$  の近似精度は、空間全体の表面変位の近似精度の代表値として重要であるが、 $\alpha$  は飽くまでもある一点の振幅である。次の章では、種数 2KP 解の、空間全体の表面変位の近似精度を詳しく調べる。

### 5.3 表面変位の比較

誤差の尺度として、標準二乗平均平方根 (R.M.S.)  $\sigma$  がよく用いられる [13]。ここでは次の R.M.S. を使って解の表面変位の差を定量的に評価する。

$$\sigma^2 = \frac{\int_0^\pi \int_0^\pi [H(T, Y) - U(T, Y)]^2 dT dY}{\int_0^\pi \int_0^\pi H(T, Y)^2 dT dY} \quad (23)$$

where  $\delta = \pi/N$ 。(23) は、Hammack の R.M.S. の和を積分に置き換えたものである。積分は台形則を用いて評価する。台形則の和の上限を増やしていき、 $\sigma$  の変化が  $10^{-5}$  以下となった場合の  $\sigma$  を結果として以下では扱っている。 $\sigma = 0$  は直接解と種数 2KP 解の表面変位の完全な一致を表し、 $\sigma$  が大きいほど表面変位の差が大きいことを表す。条件 A-I の  $\sigma$  はそれぞれ、 $2.539 \times 10^{-1}$ ,  $2.400 \times 10^{-1}$ ,  $1.676 \times 10^{-1}$ ,  $1.344 \times 10^{-1}$ ,  $1.088 \times 10^{-1}$ ,  $6.492 \times 10^{-2}$ ,  $1.556 \times 10^{-1}$ ,  $6.454 \times 10^{-2}$ ,  $2.732 \times 10^{-2}$  であった。 $\sigma$  で解を比較すると、 $\varepsilon$  が大きいほど、または  $\theta$  が小さいほど、 $\sigma$  は増加し、弱非線形性と弱二次元性の不成立による解の近似精度の悪化傾向は明白である。次に波形の詳細を比較する。

[17] は 3 つの条件で、最低次の非線形効果  $O(\varepsilon)$  まで考慮した基礎方程式の直接解と KP 解の波形を比較し、全ての場合で直接解よりも KP 解の中心ピークが高く、尖るという結果を得ている。条件 A-I における波形の中央ピーク  $(T, Y) = (0, 0)$  の  $Y$  方向断面を比較すれば Bryant と同じ結果が得られた。波形の  $T$  方向断面に関しては、Bryant は詳しく議論していないが、中央ピークが  $Y$  方向に伸びてできるステムからは、波の位相のずれつまり oblique interaction の強さを知ることができる。Figures 4(a) and 4(b) は、条件 A-I の直接解と種数 2KP 解の波形の  $T$  方向断面の比較である。ここでは、 $\{Y\} - \pi/2 \leq Y \leq \pi/2$ ,  $T = \{0, \pi/6, \pi/3, \pi/2\}$  の範囲を比較している。まず、 $\varepsilon$  または  $\theta$  の変化に伴う波形の変化を調べる。 $\sigma$  が

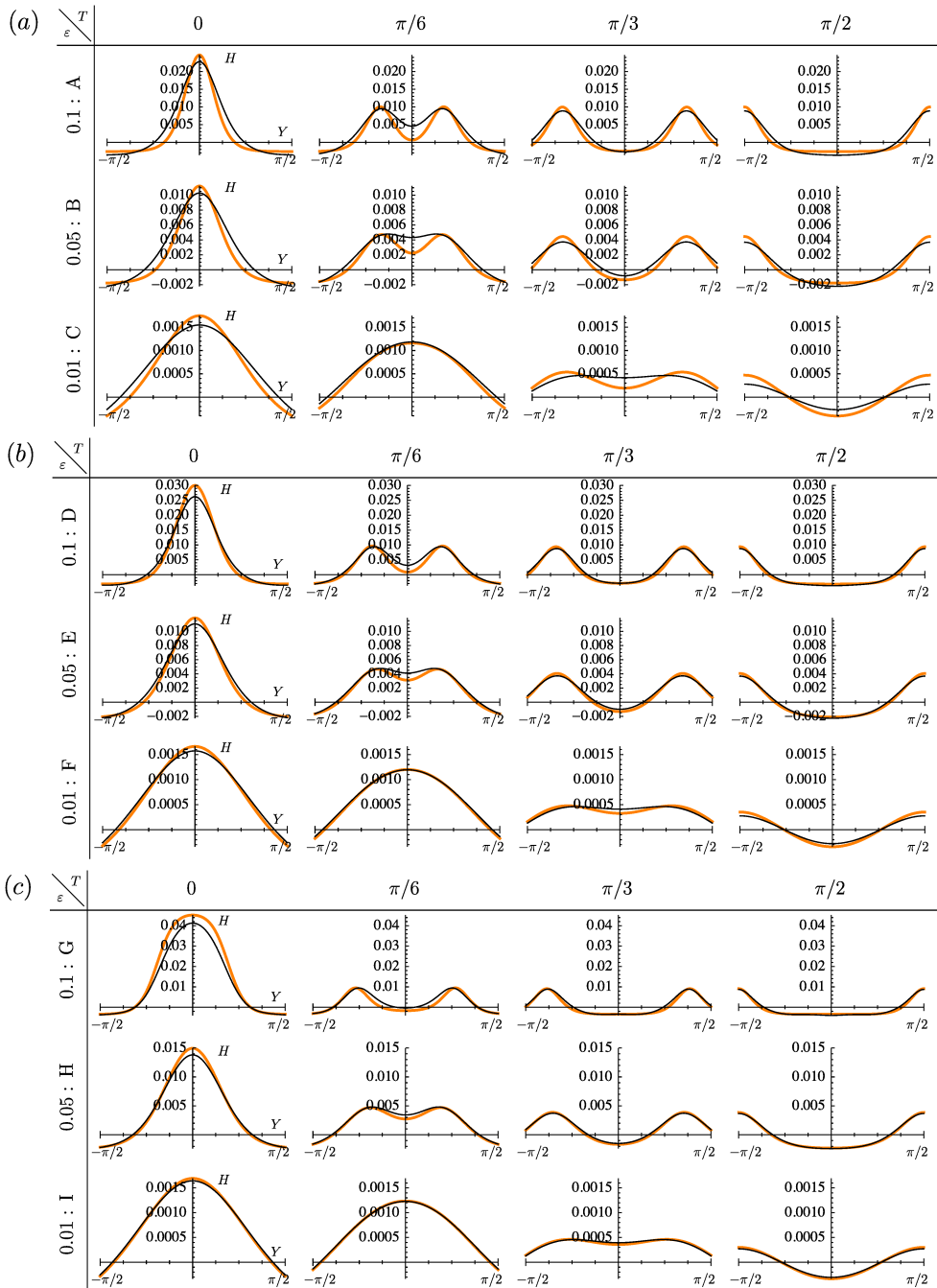


FIGURE 4. Sequence of wave cross sections of direct solutions (thin lines) and KP solution genus-2 (thick lines) over half a period in  $\{T | -\pi/2 \leq T \leq \pi/2\}$  for  $Y = \{0, \pi/6, \pi/3, \pi/2\}$  and  $\epsilon = \{0.1, 0.05, 0.01\}$  in shallow water  $h^* = 1/50$  when the angle  $\theta$  is fixed to (a)  $45^\circ$ , (b)  $59.5^\circ$  and (c)  $69.5^\circ$ .

示す通り、条件 I のように、 $\varepsilon$  が小さくかつ  $\theta$  が大きい場合は、直接解と種数 2KP 解はよく一致していることが figures 4(a) and 4(b) からわかる。 $\varepsilon = 0.01$  と固定し、 $\theta$  を変化させると、 $\theta$  が小さくなるにつれて、直接解と比べて種数 2KP 解は中央ピークが尖り、最大振幅が大きくなる傾向がある。最大振幅  $\alpha$  の  $\theta$  依存性の詳細は figure 3(b) で既に調べた通りである。種数 2KP 解の最大振幅  $\alpha$  が、 $\theta$  が小さい場合に、直接解からずれることは、中央ピークの尖りによるものだとわかった。§5.2 で述べた通り、この種数 2KP 解の欠陥は、KP 解が回転対称でないことに起因する。 $\varepsilon = 0.1$  と固定し、 $\theta$  を変化させると、 $\theta$  が大きくなるにつれて、直接解の中央ピークの幅が Y 方向に広がる。これは、oblique interaction が強くなり位相がずれることを表している。 $\varepsilon = 0.01$  で種数 2KP 解も  $\theta$  増加に伴って中央ピークが広がったが、これは、oblique interaction が強くなり位相がずれることを表しているだけでなく、種数 2KP 解の欠陥を表しているに過ぎない。前者と後者の明確な違いは、中央ピークの幅が広がるに従って、前者では最大振幅が増加するのに対して、後者では最大振幅が減少することである。条件 G の波形のように、中央ピークが Y 方向に伸びることのできる第三の波はステムと呼ばれている。このステムの長さは  $\theta$  が大きくなるとより長くなり、振幅が高くなる。 $\varepsilon = 0.01$  で、このステムが顕著に現れた例が figure 2(b) である。これは、[14] が発見した Mach ステムの周期波におけるアナロジーである [13, 12]。

次に、 $\theta$  を固定し、 $\varepsilon$  を変化させて比較すると、 $\theta = \{45^\circ, 59.5^\circ\}$  では、 $\varepsilon$  が大きくなるにつれて、種数 2KP 解は直接解に比べて中央ピークがより尖る傾向がある。しかし、 $\theta = 69.5^\circ$  では、条件 I から H にかけては、種数 2KP 解は直接解に比べて中央ピークは尖るが、条件 H から G にかけては、種数 2KP 解は直接解に比べて Y 方向に中央ピークが急激に伸びステムが形成されている。これは、 $\varepsilon$  が大きくなることで、oblique interaction が強くなり位相がずれることを表している。 $T = \pi/2$  の波形を比べれば、条件 A-I の全ての  $\theta$  において  $\varepsilon$  の増加に伴い、平坦な領域が広がり波の有効波長が伸びていることから、波形がよりソリトニックになる様子が分かる。上で調べたように、 $\theta$  が小さい場合、 $\theta$  が減少するにつれて、直接解の波形は 1 周期解の重ね合わせに収束し最大振幅が減少する。一方で、種数 2KP 解の波形は尖り、最大振幅は増加してしまう。そのような場合、種数 2KP 解は直接解を定性的に近似できていないのである。 $\varepsilon$  変化に伴う直接解と種数 2KP 解の波形の変化は共通しており、 $\varepsilon$  変化に関しては、種数 2KP 解は直接解を定性的に近似できている。

## 6 まとめ

これまでその困難さから大振幅の有限水深の直接解を求めた研究は存在しなかった。また、KP 方程式の厳密解である種数 2KP 解と直接解のパラメタを対応付けて比較したものは存在しなかった。この論文では、[7] の方法を有限水深に一般化し、これまで求めることが困難であった有限水深の大振幅の直接解を求めることを可能にした。さらに、直接解と種数 2KP 解のパラメタを対応付けることができた。これらを用いることで、[17] の計算では不可能であったより広いパラメタ範囲（特に  $\varepsilon$ ）での直接解と KP 解の比較を行った。

弱分散性を満たすような、条件  $h^* = 50^\circ$  の場合、 $\varepsilon < 0.1$  では種数 2KP 解の位相速度  $c$  の精度は弱非線形形の不成立の影響に対して比較鈍感であり良好を維持した。弱二次元性の不成立に対しては強い影響を受けるものの、 $\varepsilon \leq 0.1$  かつ  $\theta \leq 45^\circ$  の範囲では近似精度は良好であった。一方、 $\theta$  の大きい場合、条件 G :  $(\varepsilon, \theta) = (0.1, 69.5^\circ)$  での  $\alpha$  は 9.59% のずれが生じていることから、弱非線形形の不成立の影響を強く受けると言える。また、条件 C :  $(\varepsilon, \theta) = (0.01, 45^\circ)$  の場合に 12.9% のずれが生じることから、最大振幅  $\alpha$  が弱二次元性の影響に対して鈍感であるとは言えない。 $\varepsilon$  が大きいほど、または  $\theta$  が小さいほど、 $\sigma$  は増加し、弱非線形性と弱二次元性の不成立による解の近似精度の悪化傾向を明白に表していた。

## 参考文献

- [1] J. R. C. Hsu, Y. Tsuchiya, and R. Silvester 1979, "Third-order approximation to short-crested waves," *J. Fluid Mech.*, vol. 90, no. 01, pp. 179–196.

- [2] A. J. Roberts 1983, "Highly nonlinear short-crested water waves," *J. Fluid Mech.*, vol. 135, pp. 301–321.
- [3] T. R. Marchant and A. J. Roberts 1987, "Properties of short-crested waves in water of finite depth," *J. Aust. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math.*, vol. 29, no. 01, pp. 103–125.
- [4] A. J. Roberts and L. W. Schwartz 1983, "The calculation of nonlinear short-crested gravity waves," *Phys. Fluids*, vol. 26, no. 9, pp. 2388–2392.
- [5] C. P. Tsai, D. S. Jeng, and J. R. C. Hsu 1994, "Computations of the almost highest short-crested waves in deep water," *Appl. Ocean Res.*, vol. 16, no. 6, pp. 317–326.
- [6] M. Okamura 1996, "Notes on Short-Crested Waves in Deep Water," *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 65, no. 9, pp. 2841–2845.
- [7] M. Okamura 2010, "Almost limiting short-crested gravity waves in deep water," *J. Fluid Mech.*, vol. 646, pp. 481–503.
- [8] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili 1970, "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media," *Sov. Phys. Dokl.*, vol. 15, pp. 539–541.
- [9] B. A. Dubrovin 1981, "Theta functions and non-linear equations," *Russ. Math. Surv.*, vol. 36, no. 2, pp. 11–92.
- [10] A. Nakamura 1979, "A Direct Method of Calculating Periodic Wave Solutions to Nonlinear Evolution Equations. I. Exact Two-Periodic Wave Solution," *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 47, no. 5, pp. 1701–1705.
- [11] H. Segur and A. Finkel 1985, "An Analytical Model of Periodic Waves in Shallow Water," *Stud. Appl. Math.*, vol. 73, no. 3, pp. 183–220.
- [12] T. R. Akylas 1994, "Three-dimensional long water-wave phenomena," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 26, no. 1, pp. 191–210.
- [13] J. L. Hammack 1989, "Two-dimensional periodic waves in shallow water," *J. Fluid Mech.*, vol. 209, pp. 567–589.
- [14] J. W. Miles 1977, "Obliquely interacting solitary waves," *J. Fluid Mech.*, vol. 79, no. 01, pp. 157–167.
- [15] H. Yeh, W. Li, and Y. Kodama 2010, "Mach reflection and KP solitons in shallow water," *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, vol. 185, no. 1, pp. 97–111.
- [16] W. Li, H. Yeh, and Y. Kodama 2011, "On the Mach reflection of a solitary wave: revisited," *J. Fluid Mech.*, vol. 672, pp. 326–357.
- [17] P. J. Bryant 1982, "Two-dimensional periodic permanent waves in shallow water," *J. Fluid Mech.*, vol. 115, pp. 525–532.
- [18] A. J. Roberts and D. H. Peregrine 1983, "Notes on long-crested water waves," *J. Fluid Mech.*, vol. 135, pp. 323–335.