

# 静電場中での平面液体ジェットの線形安定性

Linear instabilities of a planar liquid jet in a static electric field

大阪大学 (Osaka Univ.)

吉永隆夫 (Takao Yoshinaga)

## 1 まえおき

よく知られているように、平面液体ジェットでは表面張力は常に安定化に働き、界面変形の波長が短くなるほどより強く安定化する。そのため、速度差のある外部流体とのせん断や速度不連続による不安定化は長波領域でのみ現れる。このような安定性は古くから線形解析により調べられている。特に、ジェットと周囲気体の密度比が十分小さければ(水と空気では  $\rho = \rho_g / \rho_l \simeq 0.001$ )、反対称 (Sinuous) モード攪乱の時間増幅率が対称 (Bulge) モード攪乱の時間増幅率よりも大きくなることが知られている [1, 2].

最近、エレクトロスプレー・スピニングの工学的応用に関連して、ジェットの界面不安定性に及ぼす静電場の影響が、電気流体力学近似 (電荷の拡散時間  $\gg$  磁場の拡散時間) の下で明らかにされつつある。特に、平面ジェットの主流方向に静電場がかけられている場合の周期的な攪乱に対する安定性が線形解析により調べられている。Papageorgiou と Petropoulos[3] は  $\rho = 0$  の場合、対称モード攪乱の安定性が電導性ジェットと周囲気体の誘電率比や電気伝導率比に依存し不安定化されることを示した。  $\rho \neq 0$  に対して El-Sayed [4] や Grandison 等 [5] は不導体の非粘性のジェットの安定性を調べ、両モードに対して対して電場はジェットを安定化することを示した。さらに El-Sayed 等 [6] は電導性の非ニュートン粘性のジェットの安定性を調べ、両モードに対して非ニュートン性はより不安定化を促進することを示した。

これらの解析ではジェットの電気伝導性が十分良いか、もしくは非常に悪い場合を扱っており、ジェット表面での電荷の運動による対流電流の効果を無視している。さらに、周囲気体は無限に広がっているものとして外部の境界の影響は考慮されていない。本解析では、有限の電気伝導性や周囲気体の境界壁などの影響を考慮した、より現実的な問題に対する解析を行い、線形安定性に及ぼすそれらの影響を明らかにしている。

## 2 定式化と分散関係

図1に示すような平面壁の間にある2次元平面ジェットを  $x-y$  系で考える。一定外部電場  $E_w$  は平面壁 ( $y = \pm L$ ) に沿って与えられ、ジェット周囲気体の粘性は無視し、電荷

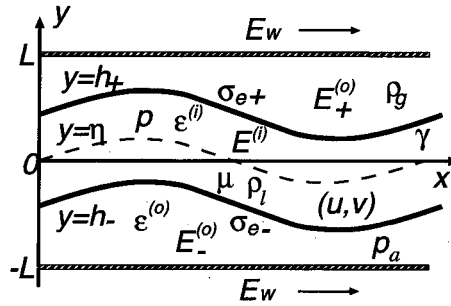


図 1: Schematic of a planar viscous liquid jet and surrounding gas placed between parallel sheath walls on which an external electric field is applied.

$\sigma_{e\pm}$  はジェット界面 ( $y = h_{\pm}$ ) にのみ分布するとする (Leaky dielectric model)[7].

基礎方程式は, ジェット内部 ( $h_- < y < h_+$ ), 外部 ( $-L < y < h_-, h_+ < y < L$ ) での速度  $\mathbf{u} = (u, v)$  に関する連続の式, 運動方程式および, ジェット界面  $y = h_{\pm}$  での電荷  $\sigma_{e\pm}$  の保存則 [8] からなる. 一方, 境界条件としては界面  $y = h_{\pm}$  で, 流体の運動学的条件と粘性応力, マックスウェル応力を含む力学的条件および電場の接線・法線方向の接続の式からなる. また壁面 ( $y = \pm L$ ) では速度の法線成分が 0 と電場の接線方向成分が  $E_w$  の条件からなる.

解析では, ジェット形状  $h_{\pm}$  や速度成分  $(u, v)$ , 外部, 内部電場  $E_{\pm}^{(o)}$ ,  $E^{(j)}$ , 表面電荷  $\sigma_{e\pm}$  の変動が十分小さいとして, ジェット両面での変形が中央面に関して対称 ( $h_- = -h_+$ ) なモードと反対称 ( $h_+ = h_-$ ) なモードについてそれぞれの安定性を調べる.

各変数の定常状態に加えられた攪乱が, 波数  $k$  と角周波数  $\omega$  及び固有関数  $f(y)$  を用いた  $f(y) \exp[i(kx - \omega t)]$  の形であると仮定し, 基礎方程式と境界条件に代入して非線形項を無視すると, 対称及び反対称モードに対する無次元化した以下の分散関係を得る:

(i) 対称モード:

$$(k - \omega)^2 \coth k + \frac{4k^2 f}{\text{Re}^2} (k \coth f - f \coth k) - \frac{k^3}{\text{Wb}} + \rho \omega^2 \coth k(L - 1) + Ak^2[(k^2 + f^2) \coth k - 2kf \coth f] + B = 0. \quad (1)$$

(ii) 反対称モード:

$$(k - \omega)^2 \tanh k + \frac{4k^2 f}{\text{Re}^2} (k \tanh f - f \tanh k) - \frac{k^3}{\text{Wb}} + \rho \omega^2 \coth k(L - 1) + Ck^2[(k^2 + f^2) \tanh k - 2kf \tanh f] + D = 0. \quad (2)$$

ここで,  $f^2 = k^2 + i \operatorname{Re}(k - \omega)$ ,

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{\Lambda E_w^2}{i(k - \omega) \operatorname{Re} i(k - \omega) \operatorname{Pe} + \sigma_R + [i(k - \omega) \operatorname{Pe} \epsilon_P + 1] \tanh k \tanh k(L - 1)} (1 - \epsilon_P \sigma_R) [1 + \tanh k(L - 1) \tanh k] \\
 B &= -\Lambda E_w^2 (1 - \epsilon_P) k^2 \tanh k(L - 1) \\
 &\quad \times \frac{i(k - \omega) \operatorname{Pe} + \sigma_R - [i(k - \omega) \operatorname{Pe} \epsilon_P + 1]}{i(k - \omega) \operatorname{Pe} + \sigma_R + [i(k - \omega) \operatorname{Pe} \epsilon_P + 1] \tanh k \tanh k(L - 1)}, \\
 C &= -\frac{\Lambda E_w^2}{i(k - \omega) \operatorname{Re} i(k - \omega) \operatorname{Pe} + \sigma_R + [i(k - \omega) \operatorname{Pe} \epsilon_P + 1] \coth k \tanh k(L - 1)} (1 - \epsilon_P \sigma_R) [1 + \tanh k(L - 1) \coth k] \\
 D &= -\Lambda E_w^2 (1 - \epsilon_P) k^2 \tanh k(L - 1) \\
 &\quad \times \frac{i(k - \omega) \operatorname{Pe} + \sigma_R - [i(k - \omega) \operatorname{Pe} \epsilon_P + 1]}{i(k - \omega) \operatorname{Pe} + \sigma_R + [i(k - \omega) \operatorname{Pe} \epsilon_P + 1] \coth k \tanh k(L - 1)}.
 \end{aligned}$$

無次元パラメータとして, 壁面までの距離  $L (> 1)$ , 密度比  $\rho = \rho_g / \rho_\ell$ , 電気伝導率比  $\sigma_R = K^{(o)} / K^{(i)}$ , 誘電率比  $\epsilon_P = \epsilon^{(i)} / \epsilon^{(o)}$ , Reynolds 数  $\operatorname{Re} = (\rho_\ell U a) / \mu$ , Weber 数  $\operatorname{Wb} = \rho_\ell U^2 a / \gamma$ , 電気 Peclet 数  $\operatorname{Pe} = \epsilon^{(o)} U / (K^{(i)} a)$ , 電気 Euler 数  $\Lambda = \epsilon^{(o)} E_0^2 / (\rho_\ell U^2)$  が導入されている. 特に,  $\Lambda$  は (静電力/流体慣性力) であり, 例えば大きな静電力  $E_w$  に対しては大きくなる. 一方,  $\operatorname{Pe}$  は (対流電流/伝導電流) = (流体運動の代表時間/電荷の拡散時間) の物理的な意味を持ち,  $\operatorname{Pe}$  が大きいほど流体の電気伝導性は悪くなり, ジェット液体や周囲気体の物性値による. 例えば, シート厚み 1mm, 流体流れ速度 1m/s とした場合, 特性時間は  $\tau = 1\text{ms}$  になるが, このとき PEO では  $\operatorname{Pe} \gtrsim 10^{-2}$ , シリコンオイルでは  $\operatorname{Pe} \lesssim 10^5$  程度となり  $\operatorname{Pe}$  の取りうる範囲は広い.

従来の解析では, 流体の電気伝導性が非常に良い場合  $\operatorname{Pe} = 0$ , もしくは非常に悪い場合  $\operatorname{Pe} = \infty$  を考えているため, 表面電荷の影響は安定性に現れてこず, また壁面が無限遠にある ( $L = \infty$ ) 場合が考えられてきた. その結果, 周囲流体の運動を無視した場合, (1) に対して  $\rho \rightarrow 0, L \rightarrow \infty, \operatorname{Pe} \rightarrow 0$  とおくと Papageorgiou と Petropoulos [3] の結果に, (2) で  $L \rightarrow \infty, \operatorname{Pe} \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$  とおくと El-Sayed [4] の結果に帰着する. また周囲流体の運動を考慮した場合, (1), (2) で,  $L \rightarrow \infty, \operatorname{Pe} \rightarrow \infty, \operatorname{Re} \rightarrow \infty$  とおくと Gandison 等 [5] の結果に,  $L \rightarrow \infty, \operatorname{Pe} \rightarrow 0, \epsilon_P = \sigma_R$  として非ニュートン性を無視した場合には El-Sayed 等 [6] の結果に帰着する. いずれにしても, これまでの解析では, 有限の  $\operatorname{Pe}$  と  $L$  の影響は考慮されていない.

### 3 解析結果

分散関係式で  $k$  を実波数,  $\omega$  を複素角周波数  $\omega_R + i\omega_I$  として,  $k$  に対する  $\Omega_I (\equiv \omega_I - k)$  の変化を調べ, 各パラメータに対する時間不安定性 ( $\Omega_I > 0$ ) を明らかにする. 計算は Newton 法を用い, 基本パラメータとしては,  $\operatorname{Re} = \operatorname{Wb} = \operatorname{Pe} = 100, \Lambda = 0.1, E_w = 1, \epsilon_P = 3, \sigma_R = 0$  とした.

図 2 は対称モードの増幅率  $\Omega_I$  の波数  $k$  に対する変化を, 図 3 は反対称モードの増幅率  $\Omega_I$  の波数  $k$  に対する変化の様子を示す. 両図において, (a) は  $\operatorname{Pe} = 100, L = \infty$ , (b) は

$Pe = 100, L = 2$ , (c) は  $Pe = 10, L = \infty$  の場合を示している. それぞれの図で, 実線は  $\Lambda = 0.1, \rho = 0.001$ , 破線は  $\rho = 0.001, \Lambda = 0$ , 一点鎖線は  $\rho = 0, \Lambda = 0.1$  の場合である. したがって, 破線は周囲流体による空力不安定の影響を, 一点鎖線は静電力による静電不安定の影響を示し, 実線は両方の効果による影響を表す.

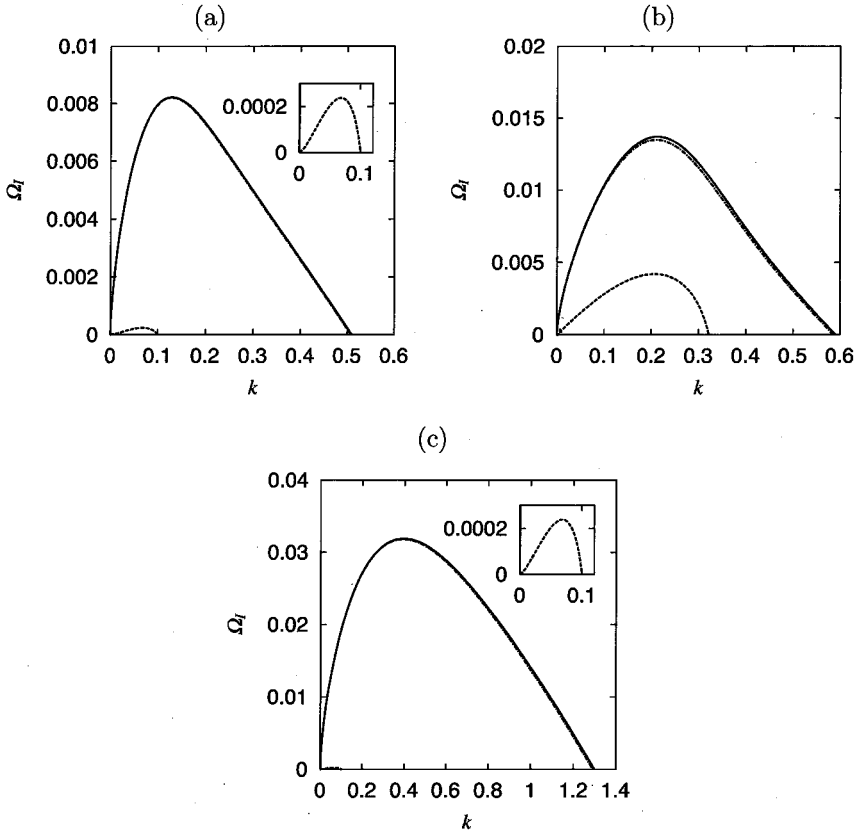


図 2: Variations of the growth rate  $\Omega_I$  of the symmetric mode with wavenumber  $k$  for  $Wb = Re = 100$  when  $Pe = 100$  and  $L = \infty$  in (a), when  $Pe = 100$  and  $L = 2$  in (b) and when  $Pe = 10$  and  $L = \infty$  in (c), where the solid lines denote for  $\Lambda = 0.1, \rho = 0.001$ , the broken lines for  $\Lambda = 0, \rho = 0.001$  and the dash-dotted lines for  $\Lambda = 0.1, \rho = 0$ .

対称モードの不安定性を示す図2(a)では, 増幅率が実線と一点鎖線で重なっており, 破線が表わす増幅率が極めて小さいことから, 空力不安定は電場をかけることにより大きく強められていることがわかる. 図2(b)ではギャップ間隔  $L$  の減少により全体に不安定性は強められるが, 特に破線が示す増幅率が図(a)と比べて大きくなっていることから,  $L$  の減少は空力不安定性の増加に大きく寄与する. また, 図2(c)では図(a)と比較して  $Pe$  が減少しても空力不安定モード(破線)は変化しないのに, 静電不安定モード(一点鎖線)を大きく増加させていることがわかる. したがって,  $Pe$  は空力不安定(破線)には影響を

及ぼさない。

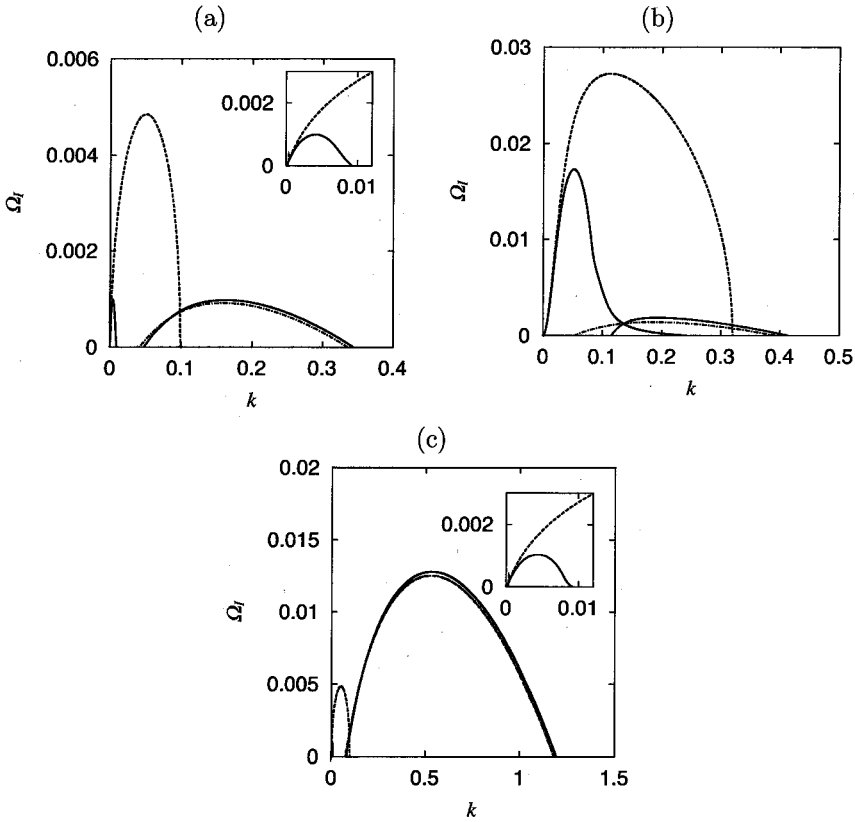


図 3: Variations of the growth rates  $\Omega_I$  of the antisymmetric mode with wavenumber  $k$  for  $Wb = Re = 100$  when  $Pe = 100$  and  $L = \infty$  in (a),  $Pe = 100$  and  $L = 2$  in (b) and  $Pe = 10$  and  $L = \infty$  in (c), where the solid lines denote for  $\Lambda = 0.1, \rho = 0.001$ , the broken lines for  $\Lambda = 0, \rho = 0.001$  and the dash-dotted lines for  $\Lambda = 0.1, \rho = 0$ .

一方、反対称モードの不安定を示す図3では、対称モードの場合とは異なり波数  $k$  の小さな領域と比較的大きな領域にそれぞれ不安定領域が分離して現れている。以下では前者を空力不安定モードで後者を静電不安定モードとよぶ。図3(a)から、増幅率において実線が破線に比べて小さく現れていることから、 $\Lambda$ の増加により空力不安定モードが大きく抑えられていることがわかる。図3(b)から、 $L$ の減少は図(a)の破線と比べると空力不安定モードを大きく増加させるが、電場をかけることにより図(a)と同様に抑えられる。また、実線と一点鎖線による増幅率がほぼ同じことから、 $L$ の減少は静電不安定モード(一点鎖線)には影響を及ぼさない。また、図3(c)から、 $Pe$ の減少により図(a)と比較して静電不安定モード(一点鎖線)が大きく増加しているのに対し、空力不安定モード(破線)はほとんど変わらない。そのため、 $Pe$ の減少は静電不安定モードを増加させるが、空力不

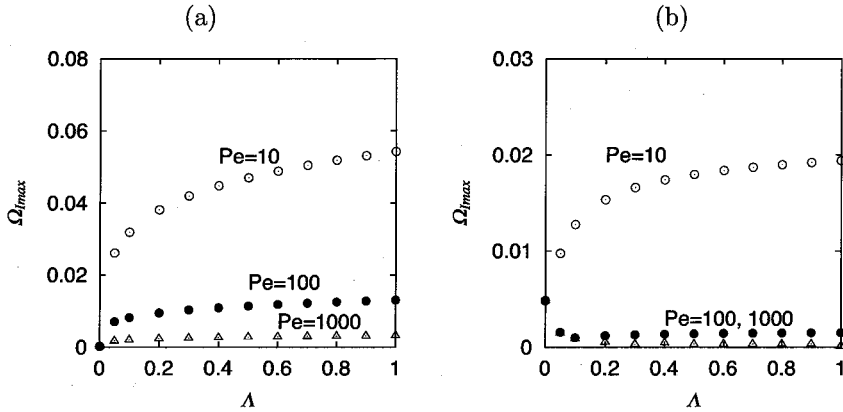


図 4: Variations of the maximum growth rates  $\Omega_{I_{max}}$  with  $\Lambda$  in the symmetric mode (a) and antisymmetric mode (b) when  $l = \infty$ , where  $Pe = 10$  is denoted by  $\circ$ ,  $Pe = 100$  by  $\bullet$  and  $Pe = 1000$  by  $\triangle$  keeping the other parameters unchanged.

安定モードには影響を及ぼさないことがわかる。

図 4 は、このような静電力による不安定性の促進と抑制が  $\Lambda$  の変化に対してどのように現れるかを、異なる  $Pe$  に対して調べている。図では  $\circ$  は  $Pe = 10$ 、 $\bullet$  は  $Pe = 100$ 、 $\triangle$  は  $Pe = 1000$  で、 $\Lambda$  に対する最大増幅率  $\Omega_{I_{max}}$  の変化を示す。対称モード攪乱に対する図 (a) から、 $\Lambda$  の増加に対して  $\Omega_{I_{max}}$  は単調に増加することから、 $\Lambda$  は常に不安定性を促進し、その程度は  $Pe$  が小さいほど大きくなる。一方、反対称モードに対する図 (b) では  $Pe = 10$  では  $\Lambda$  の増加に対して  $\Omega_{I_{max}}$  は単調に増加するが、 $Pe = 100, 1000$  のような大きな  $Pe$  に対しては減少傾向にあることがわかる。反対称モードに対するこのような違いは、小さな  $Pe$  では不安定性が主に静電モード不安定性で決定されるのに対し (図 3(a), (c) の一点鎖線参照)、大きな  $Pe$  では主に空力不安定性 (図 3(a) の破線と実線参照) で決定されるからである。

図 5 は電気伝導率比  $\sigma_R$  に対する  $\Omega_{I_{max}}$  の変化を異なる  $Pe$  に対して示している。図では  $\circ$  は  $Pe = 10$ 、 $\bullet$  は  $Pe = 100$ 、 $\triangle$  は  $Pe = 1000$  で、実線は  $Pe = 0$ 、破線は  $Pe = \infty$  とした場合である。また、図 (a) は対称モード攪乱の場合を、図 (b) は反対称モード攪乱の場合を示す。対称モード攪乱に対する図 (a) から  $\sigma_R \simeq 3.33$  付近で  $\Omega_{I_{max}}$  が最小値をとり、そこに至る変化は  $Pe$  数が減少するにつれて大きくなる。しかし、実線で示されている  $Pe = 0$  の場合、 $\sigma_R < 0.33$  では  $\Omega_{I_{max}} = 0$  となり安定であり、 $\sigma_R > 0.33$  では  $\Omega_{I_{max}}$  はより大きく増加する。この結果は  $Pe = 0$ 、 $\rho = 0$  の場合を扱った Papageorgiou と Petropoulos [3] より示されている、 $\sigma_R < 1/\epsilon_P$  ( $\epsilon_P = 3$ ) で線形安定という結果と同様である。しかし、 $Pe$  がわずかに大きくなると ( $Pe \gtrsim 0.001$ )、 $\sigma_R < 0.33$  でも  $\Omega_{I_{max}}$  は急激に 0 から増加し  $Pe = 10$  の結果に次第に近づく。また、 $Pe = \infty$  (破線) では完全不導体になるため、 $\sigma_R$  の値に関わらず電場の影響はほとんどない。そのためわずかではあるが空力不安定のみ現れ  $\Omega_{I_{max}} \simeq 0$  となる。一方、反対称モードに対する (b) 図は、 $Pe = 10$  では  $\Omega_{I_{max}}$  が  $\sigma_R \simeq 3.33$  で最小値をとるが、 $Pe = 100, 1000$  では  $\Omega_{I_{max}}$  は  $\sigma_R$  の値によらずほぼ一定値

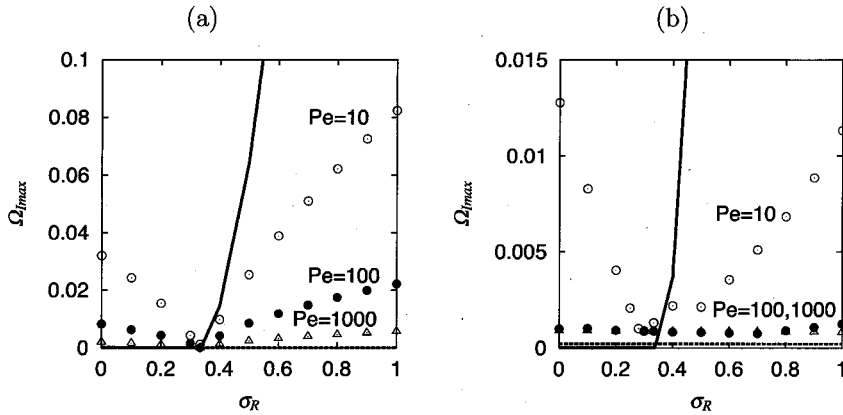


図 5: Variations of  $\Omega_{I_{max}}$  with  $\sigma_R$  when  $Pe = 10$ ( $\circ$ ),  $Pe = 100$ ( $\bullet$ ) and  $Pe = 1000$ ( $\triangle$ ), keeping the other parameters unchanged, where the symmetric mode for  $L = \infty$  in (a), while the antisymmetric mode for  $L = \infty$  in (b). The solid lines denote for  $Pe = 0$  and broken lines for  $Pe = \infty$ .

をとる。その値は  $Pe = \infty$ (破線)ではさらに小さくなり、空力不安定による影響のみが現れる。 $Pe = 0$ (実線)では対称モードと同様  $\sigma_R \lesssim 0.33$  で安定になるが、わずかな  $Pe$  の増加 ( $Pe \gtrsim 0.01$ ) で  $\Omega_{I_{max}}$  は急激に増加し、次第に  $Pe = 10$  での値に近づく。そのため、両モードの  $\Omega_{I_{max}}$  は  $\sigma_R$  に大きく依存するが、 $Pe \ll 1$  での結果は  $Pe = 0$  の極限とは異なることを注意しておく。

## 4 結論

本解析で得られた結果を以下にまとめる：

1. 有限の  $Pe$  では、反対称モード攪乱に対して空力不安定モードと静電不安定モードは分離するが、対称モード攪乱に対しては常に両モードは融合して現れる。
2. 対称モード攪乱に対して  $\Lambda$  の増加や  $Pe$ ,  $L$  の減少により不安定性が促進される。
3. 反対称モード攪乱に対して、 $\Lambda$ ,  $L$  が小さくなると空力不安定が促進され、 $Pe$  が小さくなると静電不安定が促進される。また、 $Pe$  が小さければ  $\Lambda$  の増加は空力不安定を抑制し静電不安定を促進する。
4.  $\sigma_R$  の増幅率に及ばず影響は  $Pe$  が小さいほどより顕著になるが、 $Pe = 0$  の極限では  $\sigma_R \lesssim 0.33$  において、有限  $Pe$  とは安定性の傾向が異なる。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP16K06082 の助成を受けたものである。ここに感謝の意を表す。

## 参考文献

- [1] Squire, H.B., "Investigation of the instability of a moving liquid film", *British J. Appl. Phys.*, 4 (1953) pp.167-169.
- [2] Lin, S.P., *Breakup of liquid sheets and jets* (Cambridge, 2003).
- [3] Papageorgiou, D.T. and Petropoulos, P.G., "Generation of interfacial instabilities in charged electric viscous liquid films", *J. Engr. Math.*, 50 (2004) pp.223-240.
- [4] El-Sayed, M.F., "Electro-aerodynamic instability of a thindielectric liquid sheet sprayed with an air stream", *Phys. Rev. E*, 60 (1999) pp.7588-7591.
- [5] Grandison, S., Papageorgiou, D.T. and Vanden-Broeck, J-M., "Interfacial capillary waves in the presence of electric fields", *Euro. J. Mech. B/Fluids*, 26 (2007) pp.404-421.
- [6] El-Sayed, M.F., Moatimid, G.M., Elsabaa, F.M.F. and Amer, M.F.E., "Electrohydrodynamic instability of non-Newtonian dielectric liquid sheet issued into streaming dielectric gaseous environment", *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 3 (2015) pp.159-183.
- [7] Saville, D.A., "Electrohydrodynamics: The Taylor-Melcher leaky dielectric model", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 29 (1997) pp.27-64.
- [8] Castellanos, A., *Electrohydrodynamics* (CISM 380, ed. Castellanos, A., Springer, 1998).