

## Entropic Lattice Boltzmann Method による非線形波動方程式の数値解析

九州大学・応用力学研究所 辻 英一

Hidekazu Tsuji

Research Institute for Applied Mechanics,

Kyushu University

### 1 はじめに

海洋中で見られる様々な非線形波動の研究に関して、近似的に導出されるモデル方程式を用いた研究が多くの知見を与えてきた。最も有名なものは、流体中の非線形長波を表す Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の数値計算によるソリトンの発見であろうが、その他にも様々な現象の解明を目指して近似モデル方程式の数値的研究がおこなわれている。

著者はこれまで、非線形波動モデル方程式の数値計算により表面波や内部波の二次元的相互作用の研究を行ってきたが、その際に用いられた擬スペクトル法は、境界条件の実装や並列計算の効率性において有利とは言えない面がある。そのため、より優れた数値計算法の開発が重要であり、その可能性の一つとして格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM) があると考えられる。

LBM は、特に Navier-Stokes(NS) 方程式の数値解法として提案・研究されている [1]。この方法は、NS 方程式以外にも、浅水方程式や多孔質体の流れなど様々な方程式系に応用されている。近年の研究では、より複雑な事例への適用など、応用への方向が盛んである。その一方、シンプルな非線形波動モデル方程式に対しての適用はあまり行われていなく、LBM がそもそもこの方面での数値計算法として有効であるかどうかは、まだ不明な点が多い。

考慮すべき要素の一つとして、非粘性のモデリングがある。これまでのNS方程式の研究では安定性の面で難しいとされている [1]。著者はKdV方程式を例にとってLBMによる数値計算を調べたが、非粘性項のモデリングを原因とする同様の困難から、精度の良い数値計算が難しいことを確認した [2]。

しかしながら、粘性項が小さい場合のモデリングについては改良の余地がないとは言えない。近年、高レイノルズ数の場合のNS方程式について、エントロピー関数を用いて平衡分布関数を求める方法 (Entropic Lattice Boltzmann Method; Entropic LBM) が良い結果を示すことが報告されている [3]。低粘性のモデル方程式の数値計算に対しても、Entropic LBMが有効であるかはまだ調べられていない。本研究では、Burgers 方程式を例にとり、Entropic LBMの考え方を適用して数値スキームを構成し、数値計算を行う。Burgers 方程式のLBMによる解法は既に報告されており (Gaoら [4] など)、これらの既存の結果と今回の数値計算の結果の比較を行う。

## 2 Burgers 方程式のLBMによる定式化

LBMの数値スキームを構成する手続きのうち、Boltzmann方程式の時間発展が解くべき方程式 (ここではBurgers方程式) と対応するようにモーメントを定義する方法についてはGaoら [4] による報告と同様であり、ここで簡単に示す。

空間1次元の格子を考え、その上で速度  $e_i = \{0, c, -c\}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) を持つ粒子の存在確率を表す速度分布関数  $f_i(x, t)$  を定義する。その時間発展は以下の方程式で支配されているとする。

$$f_i(x + \epsilon e_i, t + \epsilon) - f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad (1)$$

ここで、 $\epsilon$ は格子間隔としての微小量、右辺は衝突項であり、BGKモデルによって表わされるとする。 $\tau$ は緩和係数、 $f_i^{eq}(x, t)$ は系の局所平衡関数を表す。

数密度

$$\zeta = \sum_i f_i(x, t) \quad (2)$$

がBurgers方程式を満たす様に定式化を行う。すなわち式(1)の左辺を $\epsilon$ を用いて展開し、 $t, x$ についても一旦微小量 $\epsilon$ を用いてスケーリングする。また $f_i$ を以下のように展開する。

$$f_i = f_i^{(0)} + \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} + \epsilon^3 f_i^{(3)} + \dots \quad (3)$$

ここで、 $f_i^{(0)} = f_i^{eq}$ とする。

各オーダーでそれぞれ成り立つ方程式について、速度空間について和をとった後、足しあわせて元の時間スケールの方程式に直すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_i e_i \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x} \\ + \epsilon \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial t_0} + e_i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f_i^{(0)} + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここでBurgers方程式を導出するために以下のような条件を課す。

$$P_1 \equiv \sum_i e_i f_i^{(0)} \equiv \frac{1}{2} \zeta^2 \quad (5)$$

$$P_2 \equiv \sum_i e_i^2 f_i^{(0)} \equiv \frac{1}{3} \zeta^3 + \hat{\lambda} \zeta \quad (6)$$

これにより、式(4)はBurgers方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

となる。ただし、 $\nu \equiv \epsilon \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \hat{\lambda}$  である。

### 3 平衡分布関数

ここでは、二通りの平衡分布関数を示す。

まず、標準的な方法として、モーメントの関係式を平衡分布関数の連立方程式と見立てて計算した場合の平衡分布関数を示す。これは Gao ら [4] で採用された方法であり、局所平衡関数  $f_i^{eq}(x, t)$  について、式 (2)、(5)、(6) の3式を連立させることによって得ることができる。

$$f_1^{eq} = \frac{1}{2} \left( \frac{P_2}{c^2} + \frac{P_1}{c} \right) \quad (8)$$

$$f_2^{eq} = \frac{1}{2} \left( \frac{P_2}{c^2} - \frac{P_1}{c} \right) \quad (9)$$

$$f_0^{eq} = \zeta - f_1^{eq} - f_2^{eq} \quad (10)$$

一方、Entropic LBM における平衡分布関数は、以下のように求められる。まず関数  $H$  を以下のように定義する。

$$H = h_0(f_0) + h_1(f_1) + h_1(f_2) \quad (11)$$

ここで、 $h_{0,1}$  は未知の凸関数である。平衡分布は  $H$  の最小値 (モーメント式 (2)、(5) の制約を満たす上で) から与えられる。 $\mu_{0,1}$  を  $h_{0,1}$  の微分の逆関数

$$\mu_{0,1}(x) \equiv [h'_{0,1}(x)]^{-1} \quad (12)$$

としたとき、平衡分布関数は形式的に

$$f_0^{eq} = \mu_0(a), \quad f_1^{eq} = \mu_1(a + \lambda c), \quad f_2^{eq} = \mu_1(a - \lambda c), \quad (13)$$

と与えられる。ここで、 $a, \lambda$  はラグランジュ乗数であり、0次及び1次のモーメントの式を満たすために導入されたものである。さらに2次のモー

メントの式を付加的な制約条件として考えると、 $H$ が以下のように近似的に求められる<sup>1</sup>。

$$H = f_0 \left( \ln f_0 - 1 - \ln \frac{16}{3} \right) + f_1 (\ln f_1 - 1) + f_2 (\ln f_2 - 1) \quad (14)$$

平衡分布関数はこの  $H$  の最小値を取る  $f_i$  として求められる。すなわち、

$$f_0^{eq} = \frac{64}{55} \zeta \left( 1 - \frac{3}{8} \sqrt{1 + \frac{55}{36} M^2} \right) \quad (15)$$

$$f_1^{eq} = \frac{\zeta}{2} \left( 1 + \frac{M}{2} \right) - \frac{f_0^{eq}}{2} \quad (16)$$

$$f_2^{eq} = \frac{\zeta}{2} \left( 1 - \frac{M}{2} \right) - \frac{f_0^{eq}}{2} \quad (17)$$

である ( $M \equiv \zeta/c$ )。一見したところ、粘性係数  $\nu$  が定義に現れていないが、導出の過程で  $\hat{\lambda} \equiv \frac{3c^2}{11}$  と定める必要がある。これにより、 $c$  が  $\nu$  に依存するため、間接的に平衡関数は  $\nu$  に依存している。

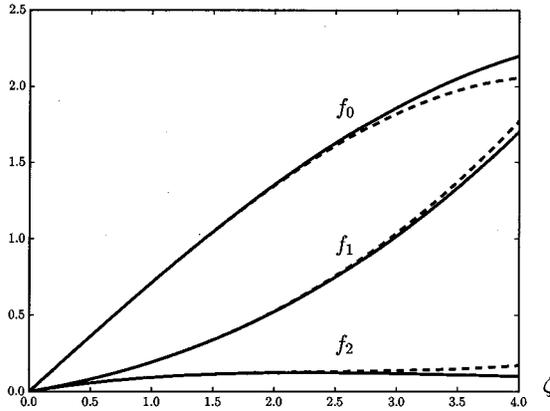


図 1: 平衡分布関数の  $\zeta$  依存性。実線: Entropic LBM での式、点線: 標準的な方法での式。  $c=5$  としている。

<sup>1</sup>ラグランジュ乗数  $\lambda$  が小さいとしている。

図1に平衡分布関数の $\zeta$ 依存性を示す。速度空間全体に関して、場の量 $\zeta$ が小さい場合にはほぼ一致しており、大きくなるにつれて違いが出てくる。なお、ここでは $c=5$ としているので、 $M$ で見ると違いが現れ始めるのは $M=0.6$ 程度である。

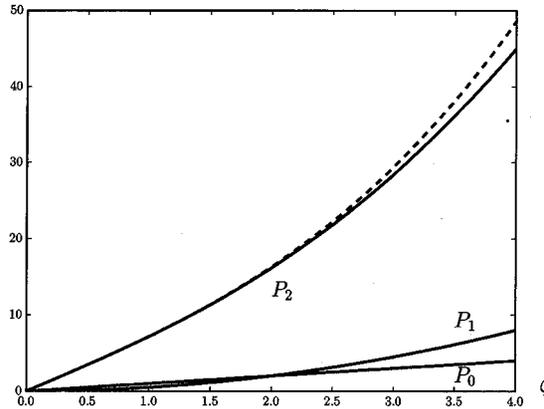


図2: 平衡分布関数から求めたモーメントの $\zeta$ 依存性。実線: Entropic LBMでの式、点線: 標準的な方法での式。

図2に平衡分布関数から求めたモーメントの $\zeta$ 依存性を示す。0次、1次のモーメントについては二つの方法に違いはなく、2次のモーメントにおいて $\zeta$ が大きい場合に違いが見られる。これはEntropic LBMでは平衡分布関数の導出の過程で近似を用いているためであると考えられる。

#### 4 数値解析の結果

以下に二つの異なる平衡分布関数を用いた場合の結果を示す。なお以下の結果では、緩和係数は $\tau=0.9$ 、粘性係数は $\nu=0.0005$ としている。ま

た、初期条件については、Gaoら [4] のケースのうち

$$u(x, t = 1) = \frac{x}{1 + (1/t_0)^{1/2} \exp(x^2/(4\nu))}$$

を示す。厳密解は

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + (t/t_0)^{1/2} \exp(x^2/(4\nu t))}$$

なお、 $t_0 = \exp(1/(8\nu))$  である。境界条件については、領域の両端において分布関数の勾配がない条件を採用した。

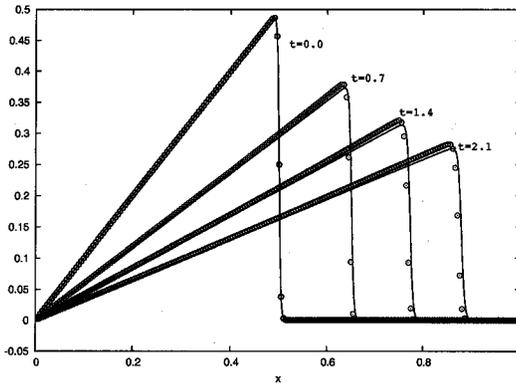


図 3: 標準的な方法による平衡分布関数を用いた計算結果。厳密解は実線、計算結果は点で表されている。 $dx = 0.005$ ,  $dt = 0.007$ 。

図 3 に標準的な方法で求めた平衡分布関数を用いた計算結果 (Case 1) を示す。空間格子を十分に細かくとれば、かなり厳密解に等しい結果を得られる。しかしながら  $dt$  をある程度大きく取ると、この図のようにわずかなずれが生じる。

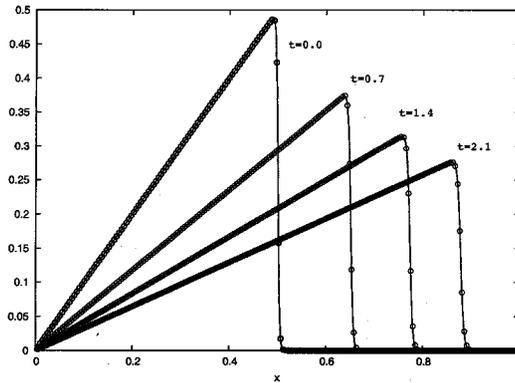


図 4: Entropic LBM による平衡分布関数を用いた計算結果。厳密解は実線、計算結果は点で表されている。 $dx = 1/198 \simeq 0.00505$ ,  $dt = 0.007$ 。

図 4 に Entropic LBM で求めた平衡分布関数を用いた計算結果 (Case 2) を示す。この場合、 $\nu$  から  $c$  が決まってしまうため、 $dt, dx$  どちらかだけが指定可能である。ここでは  $dt$  を Case 1 に合わせた。Case 1 に比較して、空間格子はわずかにむしろ粗くなっているにもかかわらず、ほぼ厳密解に等しい結果が得られており、この初期条件に関しては、Entropic LBM はより高精度のスキームとなっているとみなせる。

## 参考文献

- [1] S. Succi, "The Lattice Boltzmann Equation", Clarendon press, 2001.
- [2] 辻英一, "格子ボルツマン法を用いた非線形波動方程式の数値解析", 京都大学数理解析研究所研究集会講究録 1989 (2016), pp78-84.
- [3] I. V. Karlin, A. Ferrante and H. C. Oettinger, "Perfect entropy functions of the Lattice Boltzmann method", Europhys. Lett. vol.47(1999)

pp. 182-188.

- [4] Yun Gao, Li-Hua Le and Bao-Chang Shi, "Numerical solution of Burgers' equation by lattice Boltzmann method", *Appl. Math. Comp.* vol.219 (2013) pp. 7685-7692.