

京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」

## 表面波・内部波共存場の孤立波解

### Numerical Solutions for the Coexisting Fields of Surface and Internal Solitary Waves

鹿児島大学学術研究院・理工学域 柿沼 太郎 (Taro Kakinuma)\*  
 東北大学・災害科学国際研究所 山下 啓 (Kei Yamashita)\*\*  
 神戸大学大学院・工学研究科 中山 恵介 (Keisuke Nakayama)\*\*\*

\* Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University  
 \*\* International Research Institute of Disaster Science, Tohoku University  
 \*\*\* Graduate School of Engineering, Kobe University

#### 1. 序 論

成層の発達した海洋や沿岸に共存する表面波と内部波は、互いに干渉する可能性がある。例えば、海洋における密度成層の影響により、遠地津波の走時が遅れることが、線形波を対象とした理論解析に基づき指摘されている (Tsai ら, 2013 ; Watada, 2013) 。ところが、一般に、表面波と内部波は、それぞれ独立に研究されることが多く、特に、非線形性が無視できないような表面波及び内部波の特性は、例えば、Longuet-Higgins・Fenton (1974) や Choi・Camassa (1999) のように、しばしば個別に調べられてきた。

ところで、山下ら (2016a) は、非線形波動方程式系の定常波解を算出する手法を提案し、表面波と内部波が干渉しない場合を対象として、変分原理に基づく非線形波動方程式系 (柿沼, 2001) の、表面孤立波及び内部孤立波の数値解を求めている。そこで、本研究では、自由水面を有する 2 層流体を対象として、表面波・内部波共存場の孤立波解を山下ら (2016a) の手法により算出し、表面波モード及び内部波モードの表面孤立波及び内部孤立波の特性に関して調べた。

#### 2. 基礎方程式系

非粘性・非圧縮性の、2 層流体の非回転運動を対象とする。そして、第 1 層及び第 2 層をそれぞれ上層及び下層とし、各層の流体が互いに混合しないと仮定する。第  $i$  層 ( $i = 1$  or  $2$ ) の速度ポテンシャル  $\phi_i$  を次式のように  $N_i$  個のべき関数の重み付き級数に展開する。

$$\phi_i(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{\alpha_i=0}^{N_i-1} [f_{i,\alpha_i}(\mathbf{x}, t) \cdot z^{\alpha_i}] \quad (1)$$

変分法 (柿沼, 2001) を適用し、次式に示す非線形表面波・内部波方程式系が得られる。

[第 1 層]

$$\zeta^{\alpha_1} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \eta^{\alpha_1} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 + 1} \nabla \left[ (\zeta^{\alpha_1 + \beta_1 + 1} - \eta^{\alpha_1 + \beta_1 + 1}) \nabla f_{1,\beta_1} \right] - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 + \beta_1 - 1} (\zeta^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} - \eta^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}) f_{1,\beta_1} = 0 \quad (2)$$

$$\zeta^{\beta_1} \frac{\partial f_{1,\beta_1}}{\partial t} + \frac{1}{2} \zeta^{\beta_1 + \gamma_1} \nabla f_{1,\beta_1} \nabla f_{1,\gamma_1} + \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_1 \zeta^{\beta_1 + \gamma_1 - 2} f_{1,\beta_1} f_{1,\gamma_1} + g \zeta = 0 \quad (3)$$

$$\eta^{\beta_1} \frac{\partial f_{1,\beta_1}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta_1 + \gamma_1} \nabla f_{1,\beta_1} \nabla f_{1,\gamma_1} + \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_1 \eta^{\beta_1 + \gamma_1 - 2} f_{1,\beta_1} f_{1,\gamma_1} + g \eta + \frac{p}{\rho_1} = 0 \quad (4)$$

[第2層]

$$\eta^{\alpha_2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2 + 1} \nabla \left[ (\eta^{\alpha_2 + \beta_2 + 1} - b^{\alpha_2 + \beta_2 + 1}) \nabla f_{2, \beta_2} \right] - \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2 - 1} (\eta^{\alpha_2 + \beta_2 - 1} - b^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}) f_{2, \beta_2} = 0 \quad (5)$$

$$\eta^{\beta_2} \frac{\partial f_{2, \beta_2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta_2 + \gamma_2} \nabla f_{2, \beta_2} \nabla f_{2, \gamma_2} + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma_2 \eta^{\beta_2 + \gamma_2 - 2} f_{2, \beta_2} f_{2, \gamma_2} + g \eta + \frac{1}{\rho_2} [p + (\rho_2 - \rho_1) g h_1] = 0 \quad (6)$$

ここで、 $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $h_1$  及び  $\rho_i$  は、それぞれ、水面変動、界面変動、底面位置、界面における圧力、静水時の上層厚及び第  $i$  層の流体の密度である。このうち、密度  $\rho_i$  は、各層内で一様、かつ、一定である。そして、 $g$  は、重力加速度であり、 $9.8 \text{ m/s}^2$  とする。また、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  は、水平方向の微分演算子である。なお、添え字  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  及び  $\gamma_i$  に対して、積の総和規約を採用しており、例えば、式(2)の左辺第1項の  $\alpha_1$  は、 $\zeta$  のべきである。

式(4)及び(6)より、界面における圧力  $p$  を消去して次式を得る。

$$\begin{aligned} \eta^{\beta_2} \frac{\partial f_{2, \beta_2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta_2 + \gamma_2} \nabla f_{2, \beta_2} \nabla f_{2, \gamma_2} + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma_2 \eta^{\beta_2 + \gamma_2 - 2} f_{2, \beta_2} f_{2, \gamma_2} + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) g (\eta + h_1) \\ - \frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \eta^{\beta_1} \frac{\partial f_{1, \beta_1}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^{\beta_1 + \gamma_1} \nabla f_{1, \beta_1} \nabla f_{1, \gamma_1} + \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_1 \eta^{\beta_1 + \gamma_1 - 2} f_{1, \beta_1} f_{1, \gamma_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

本研究では、比較的浅い水域における孤立波を対象とし、式(1)で表わされる速度ポテンシャルの展開項数を上・下層ともに  $N_1 = N_2 = N = 3$  とする。

### 3. 表面波・内部波共存場における定常進行波解の算出方法

#### 3.1 定常進行波を解とする非線形波動方程式系

表面波及び内部波の伝播が、 $x$  軸方向の1次元伝播である場合を対象として、表面波・内部波共存場の定常進行波解を算出する。すなわち、式(2), (3), (5) 及び (7) の時間微分項に、移流方程式  $\partial F/\partial t = C \partial F/\partial x$  を代入することによって得られる、定常進行波を解とする非線形波動方程式系を解く。ここで、 $C$  は、定常進行波の位相速度であり、また、物理量  $F$  は、水面変動  $\zeta$ 、界面変動  $\eta$  及び速度ポテンシャルの重み係数  $f_{i\alpha}$  である。本手法では、任意の位相速度  $C$  を与え、この位相速度を有する定常進行波に対するこれらの物理量を未知数として求めていく。なお、定常進行波を解とする非線形波動方程式系では、時間微分項が消去されているため、物理量  $F$  は、 $x$  のみの関数  $F(x)$  になっている。

#### 3.2 Newton-Raphson 法の適用方法

本研究では、Newton-Raphson 法を用いた山下ら (2016a) の手法を適用して、上述の定常進行波を解とする非線形波動方程式系の数値解を求める。Newton-Raphson 法の初期値としては、小振幅孤立波に対する KdV 理論解の、水面形及び界面形と、速度ポテンシャル場とを与える。ただし、本研究では、自由水面を有する2層流体を対象とするため、波動場には、復元力を異にする2種類のモードの孤立波解が存在する。すなわち、図-1 に示すような、重力を復元力とする表面波モードと、図-2 に示すような、2層間の有効重力を復元力とする内部波モードである。このうち、表面波モードの表面孤立波と内部孤立波は、同位相となり、他方、内部波モードの表面孤立波と内部孤立波は、逆位相となる。これら2種類のモードの孤立波解が存在するため、Newton-Raphson 法の

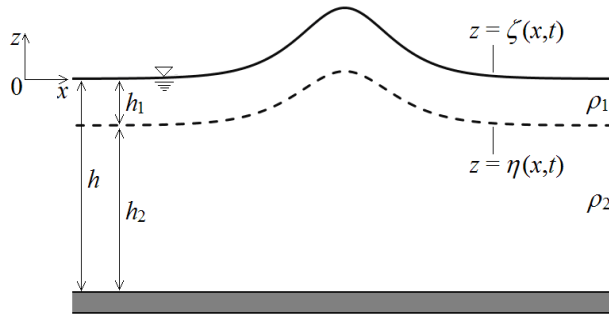


図-1 自由水面を有する2層流体における表面波モードの表面孤立波及び内部孤立波

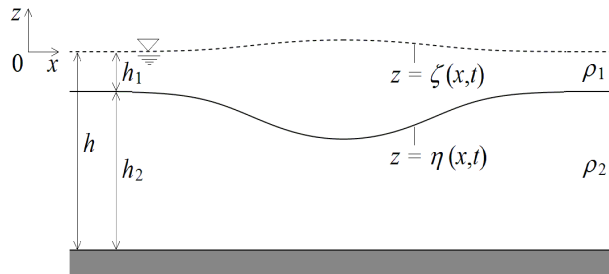


図-2 自由水面を有する2層流体における内部波モードの表面孤立波及び内部孤立波

初期値として、表面波モードの孤立波解を求める場合には、1層流体の KdV 理論解を与え、他方、内部波モードの孤立波解を求める場合には、上面が固定水平板に接する2層流体の KdV 理論解を与える。なお、例えば、後者の場合、速度ポテンシャルの重み係数の KdV 理論解  $f_{i\alpha, \text{KdV}}$  は、移流方程式を代入した式(2)及び(5)に、KdV 理論解の  $\eta_{\text{KdV}}$  及び  $C_{\text{KdV}}$  を代入することによって求められる。その際に、 $\eta_{\text{KdV}}$  及び  $C_{\text{KdV}}$  が代入された式(2)及び(5)は、線形方程式となる。

### 3.3 有限領域で孤立波を近似するための側方境界条件

孤立波は、水平方向の遠方において、物理量の水平勾配  $dF/dx$  がゼロに漸近するという性質を有する。しかしながら、数値解析では、対象領域を有限な領域としなければならず、従って、この孤立波の性質を、何らかの別の境界条件として記述する必要がある。ここでは、次式を採用した。

$$F_0 = F_1 \quad \text{and} \quad F_{M+1} = F_M \quad (8)$$

ここで、 $m$  を  $x$  軸上の計算格子点の番号として、 $F_m$  は、格子点  $m$  における物理量を表わす。格子点番号  $m$  は、 $0 \sim M+1$  の整数とする。そして、 $m=1$  及び  $m=M$  の点は、対象領域の境界に位置する格子点であり、また、 $m=0$  及び  $m=M+1$  の点は、対象領域の外側にあり、それぞれ、 $m=1$  及び  $m=M$  の境界に隣接する仮想格子点である。式(8) で与えられる条件は、境界に隣接する仮想領域内における物理量の勾配をゼロと仮定する条件であるが、境界において  $dF/dx = 0$  となることを意味するものでない。例えば、 $m=1$  の境界における  $dF/dx$  は、 $(F_2 - F_1)/(2\Delta x)$  と表わされる。これは、 $m \sim 1.5$  の位置における  $dF/dx$  と同符号であり、絶対値の大きさは、 $m \sim 1.5$  の位置における  $dF/dx$  の  $1/2$  である。このため、境界周辺での符号の反転による振動が抑制され、かつ、 $dF/dx$  が境界に向かってゼロに漸近するという孤立波の性質が近似的に表現される。

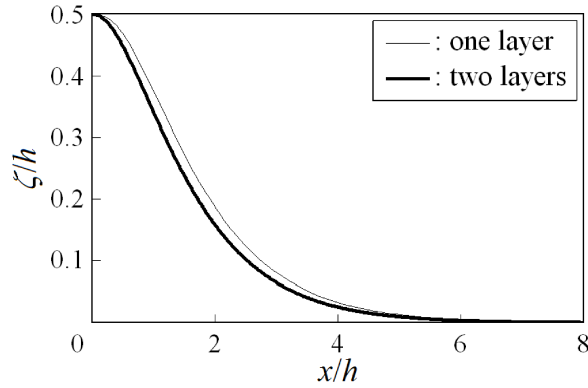


図-3 表面波モードの表面孤立波の水面形（下層と上層の密度比及び静水時の層厚比は、それぞれ、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$ 及び $h_2/h_1 = 4.0$ である。また、表面孤立波の波高と静水深の比は、 $a_s/h = 0.5$ である。）

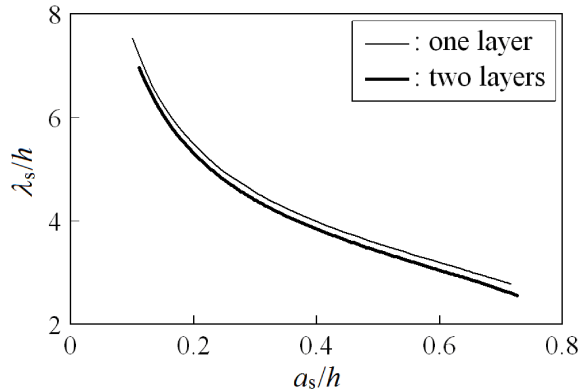


図-4 表面波モードの表面孤立波の相対代表波長 $\lambda_s/h$ と波高・静水深比 $a_s/h$ の関係（表面孤立波の代表波長 $\lambda_s$ は、式(9)で定義する。また、下層と上層の密度比及び静水時の層厚比は、それぞれ、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$ 及び $h_2/h_1 = 4.0$ である。）

#### 4. 表面波モードの孤立波

まず、図-1に示すような、表面波モードの孤立波を対象とする。計算対象領域は、静水深 $h = h_1 + h_2$ が一樣な水域とし、下層と上層の静水時の層厚比を $h_2/h_1 = 4.0$ とする。また、下層と上層の密度比を $\rho_2/\rho_1 = 1.20$ とする。そして、前述の手法を適用して、表面波モードの表面孤立波及び内部孤立波の数値解を求める。ここで、 $x$ 軸上にある計算対象領域の全長及び計算格子間隔をそれぞれ $L = 50.0h$ 及び $\Delta x = 0.02h$ とする。

図-3に、表面波モードの表面孤立波の水面形の数値解を示す。ここで、横軸及び縦軸は、それぞれ、波頂位置からの水平距離 $x$ 及び静水位を基準とした水面変動 $\zeta$ が、静水深 $h$ で無次元化された値である。表面孤立波の波高・静水深比は、 $a_s/h = 0.5$ である。2層流体の表面波モードの表面孤立波は、1層流体の表面孤立波よりも、各高さにおける波の前面と後面の間の距離が短くなる。

図-4に、表面波モードの表面孤立波の、相対代表波長 $\lambda_s/h$ と波高・静水深比 $a_s/h$ の関係を示す。ここで、表面孤立波の代表波長 $\lambda_s$ は、次式で定義する。

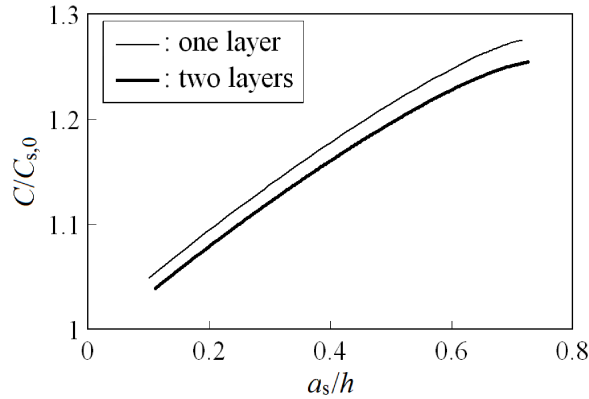


図-5 表面波モードの表面孤立波の相対位相速度  $C/C_{s0}$  と波高・静水深比  $a_s/h$  の関係 ( $C_{s0}$  は、1層流体における線形浅水波の位相速度である。また、下層と上層の密度比及び静水時の層厚比は、それぞれ、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$  及び  $h_2/h_1 = 4.0$  である。)

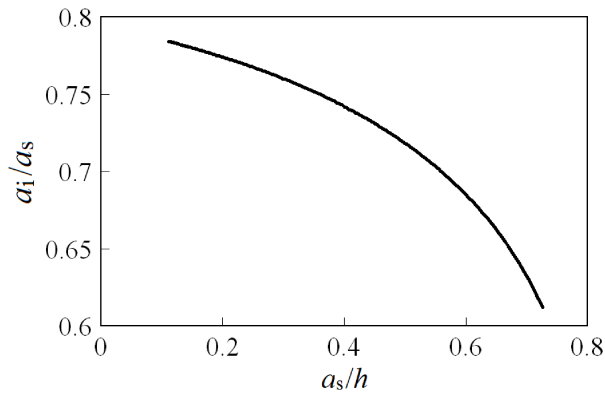


図-6 表面波・内部波共存場における表面波モードの孤立波の波高比  $a_i/a_s$  と表面波モードの表面孤立波の波高・静水深比  $a_s/h$  の関係 ( $a_i$  及び  $a_s$  は、それぞれ、内部孤立波及び表面孤立波の波高である。また、下層と上層の密度比及び静水時の層厚比は、それぞれ、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$  及び  $h_2/h_1 = 4.0$  である。)

$$\lambda_s = \int_{-L/2}^{L/2} \zeta dx / a_s \quad (9)$$

図-4より、2層流体の場合の表面波モードの表面孤立波の代表波長は、1層流体の場合の表面孤立波の代表波長より短いことがわかる。また、いずれの場合も、相対代表波長  $\lambda_s/h$  は、 $a_s/h$  の増加に伴い減少している。

図-5に、表面波モードの孤立波の相対位相速度  $C/C_{s0}$  を示す。ここで、 $C_{s0} = \sqrt{gh}$  は、1層流体の場合の線形浅水波の位相速度である。2層流体の場合の表面波モードの孤立波の相対位相速度  $C/C_{s0}$  は、1層流体の場合の表面孤立波の相対位相速度より小さいことが確認できる。

図-6に、2層流体の場合の表面波モードの、内部孤立波の波高  $a_i$  と表面孤立波の波高  $a_s$  の比を示す。表面波モードの孤立波の波高比  $a_i/a_s$  は、表面孤立波の相対波高  $a_s/h$  が大きくなるにつれて、減少することがわかる。

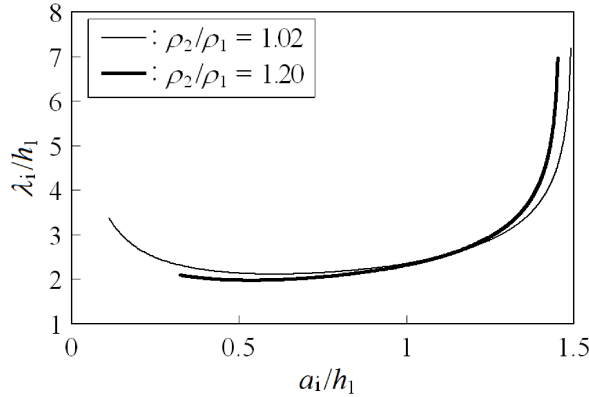


図-7 表面波・内部波共存場における内部波モードの内部孤立波の相対代表波長  $\lambda_i/h_1$  と波高・静水時上層厚比  $a_i/h_1$  の関係 (内部孤立波の相対代表波長  $\lambda_i$  は、式(10) で定義する。また、下層と上層の密度比は、 $\rho_2/\rho_1=1.02$ 、または、 $1.20$  であり、下層と上層の静水時の層厚比は、 $h_2/h_1=4.0$  である。)

### 5. 内部波モードの孤立波

次に、図-2 に示すような、内部波モードの孤立波を対象とする。計算対象領域は、静水深  $h = h_1 + h_2$  が一様な水域とし、下層と上層の静水時の層厚比を  $h_2/h_1 = 4.0$  とする。そして、前述の手法を適用して、内部波モードの表面孤立波及び内部孤立波の数値解を求める。計算対象領域の全長及び計算格子間隔は、それぞれ、 $L=25.0h$  及び  $\Delta x=0.005h$  とする。

ところで、山下ら (2016b) は、2層流体の下層と上層の密度比を  $\rho_2/\rho_1 = 1.02$  として、自由水面があり表面波が存在する場合と、上層の上面が固定水平板と接して表面波が存在しない場合の、二つの場合の内部波モードの孤立波の比較を行なっている。そこで、本論文では、2層流体において、自由水面があり表面波が存在する場合を対象として、下層と上層の密度比の違いが、内部波モードの孤立波に与える影響に着目する。すなわち、表面波と内部波が共存する2層流体において、下層と上層の密度比が、 $\rho_2/\rho_1 = 1.02$  である場合と、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$  である場合の、内部波モードの孤立波を比較する。

図-7 に、表面波・内部波共存場における、内部波モードの内部孤立波の、相対代表波長  $\lambda_i/h_1$  と波高・静水時上層厚比  $a_i/h_1$  の関係を示す。ここで、内部孤立波の代表波長  $\lambda_i$  は、次式で定義する。

$$\lambda_i = \int_{-L/2}^{L/2} |\eta + h_1| dx / a_i \quad (10)$$

図-7 より、表面波・内部波共存場における、内部波モードの内部孤立波の代表波長  $\lambda_i$  は、内部孤立波の相対波高  $a_i/h_1$  が小さいとき、 $\rho_2/\rho_1 = 1.02$  の場合の方が大きいですが、 $a_i/h_1$  が大きくなると、逆転して、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$  の場合の方が大きくなるのがわかる。

図-8 に、表面波・内部波共存場における、内部波モードの孤立波の相対位相速度  $C_i/C_{i0}$  を示す。ここで、 $C_{i0} = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)gh_1h_2 / (\rho_2h_1 + \rho_1h_2)}$  は、表面波が共存しない場合における、線形内部浅水波の位相速度である。内部波モードの孤立波の相対位相速度  $C_i/C_{i0}$  は、 $\rho_2/\rho_1 = 1.02$  の場合の方が、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$  の場合よりも大きい。

図-9 に、表面波・内部波共存場における内部波モードの、表面孤立波の波高  $a_s$  と内部孤立波の波高  $a_i$  の比を示す。これより、内部波モードの孤立波の波高比  $a_s/a_i$  は、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$  の場合の方が、

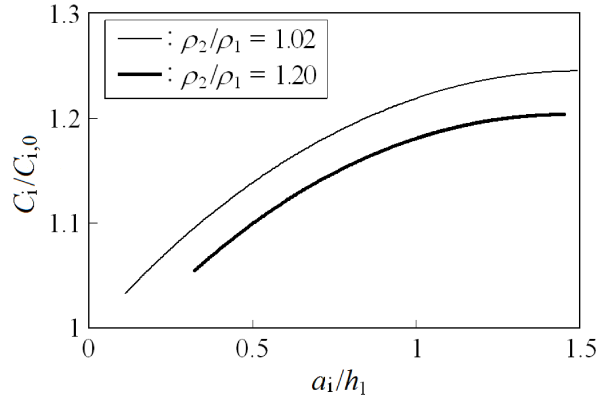


図-8 表面波・内部波共存場における内部波モードの内部孤立波の相対位相速度  $C_i/C_{i,0}$  と波高・静水時上層厚比  $a_i/h_1$  の関係 ( $C_{i,0}$  は、表面波が共存しない場合の線形内部浅水波の位相速度である。また、下層と上層の密度比は、 $\rho_2/\rho_1 = 1.02$ 、または、 $1.20$  であり、下層と上層の静水時の層厚比は、 $h_2/h_1 = 4.0$  である。)

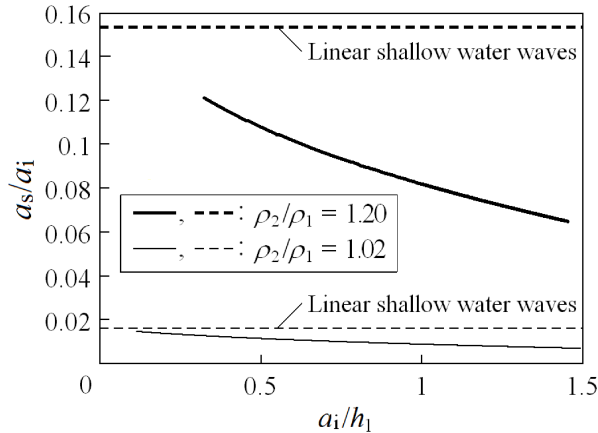


図-9 表面波・内部波共存場における内部波モードの孤立波の波高比  $a_s/a_i$  と内部波モードの内部孤立波の波高・静水時上層厚比  $a_i/h_1$  の関係 ( $a_s$  及び  $a_i$  は、それぞれ、表面孤立波及び内部孤立波の波高である。太い実線及び細い実線は、それぞれ、下層と上層の密度比が  $\rho_2/\rho_1 = 1.20$  及び  $\rho_2/\rho_1 = 1.02$  の場合の数値解を示す。また、太い破線及び細い破線は、それぞれの密度比の場合の、線形浅水波理論による値を示す。下層と上層の静水時の層厚比は、 $h_2/h_1 = 4.0$  である。)

$\rho_2/\rho_1 = 1.02$  の場合よりも大きいことがわかる。また、両者の密度比の場合とも、波高比  $a_s/a_i$  は、内部孤立波の相対波高  $a_i/h_1$  が大きいほど、小さくなることわかる。これに対して、表面波・内部波共存場を対象とした線形浅水波理論では、波高比  $a_s/a_i$  は、内部孤立波の相対波高  $a_i/h_1$  に依存せず、密度比と静水時の層厚比とで定まる一定値  $[(\rho_2/\rho_1) - 1] / [(\rho_2/\rho_1) / (h_2/h_1) + 1]$  となり、この値は、 $\rho_2/\rho_1 = 1.20$  の場合に、約 0.154、 $\rho_2/\rho_1 = 1.02$  の場合に、約 0.016 である。

## 6. 結 論

自由水面を有する 2 層流体を対象として、表面波・内部波共存場における孤立波の数値解を求めた。そして、表面波モード及び内部波モードのそれぞれの孤立波解の特性に関して調べた。

表面波・内部波共存場における表面波モードの表面孤立波は、内部波が共存しない場合の表面孤立波と比較して、代表波長が短く、相対位相速度が小さい。また、表面波・内部波共存場における表面波モードの、内部孤立波と表面孤立波の波高比は、表面孤立波の相対波高が大きくなるにつれて減少する。

他方、表面波・内部波共存場における、内部波モードの内部孤立波の代表波長は、内部孤立波の相対波高が小さいとき、下層と上層の密度比が小さい場合の方が大きい。内部孤立波の相対波高が大きくなると、逆転して、下層と上層の密度比が大きい場合の方が大きくなった。また、表面波・内部波共存場における、内部波モードの孤立波の相対位相速度は、下層と上層の密度比が小さい場合の方が大きい。更に、表面波・内部波共存場における内部波モードの、表面孤立波と内部孤立波の波高比は、内部孤立波の相対波高が大きくなるにつれて減少する。

## 参考文献

- 柿沼太郎: 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 146 - 150, 2001.
- 山下 啓・柿沼太郎・中山恵介: 表面孤立波及び内部孤立波の特性, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 72, No. 1, pp. 27-41, 2016a.
- 山下 啓・柿沼太郎・中山恵介: 表面波・内部波共存場における孤立波解, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 72, No. 2, pp. I\_13-I\_18, 2016b.
- Choi, W. and Camassa, R.: Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, *J. Fluid Mech.*, Vol. 396, pp. 1-36, 1999.
- Longuet-Higgins, M. S. and Fenton, J. D.: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. 340, No. 1623, pp. 471-493, 1974.
- Tsai, V. C., Ampuero, J.-P., Kanamori, H., and Stevenson, D. J.: Estimating the effect of earth elasticity and variable water density on tsunami speeds, *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 40, pp. 492-496, 2013.
- Watada, S.: Tsunami speed variations in density-stratified compressible global oceans, *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 40, pp. 4001-4006, 2013.