

温度勾配のある狭い流路内の音響流と熱音響流 Acoustic and thermoacoustic streamings in a narrow pore subject to a temperature gradient

関西大学・システム理工学部 杉本 信正

Nobumasa SUGIMOTO

Faculty of Engineering Science, Kansai University

1. はじめに

昨年の研究会では、「温度勾配のある狭いチャンネル内の非線形音波の伝播」と題して発表した[1]。温度勾配のある二つの平行な壁面で囲まれた長いチャンネル内の気体中を伝播する非線形音波の振る舞いを調べるために、流体力学の基礎方程式に対して漸近理論を展開することによって、最終的に超過圧に対する非線形拡散・波動（移流）方程式を導出した。この導出過程では、流れ場や温度場も全て超過圧を用いて表現されている。したがってその方程式の解が分かれば、場の量が全て求まることになる。

本報告では、導出された非線形拡散・波動（移流）方程式の時間周期解を仮定して、周期にわたって平均した壁面でのせん断応力や熱流束、特に質量やエネルギーの定常的な輸送を表す音響流や熱音響流の一般的な表現を導出する。音響流や熱音響流は2次の非線形効果であり、この小さな効果を正しく評価するために、上述の方程式の導出に必要な場の表現よりもさらに高次の項まで求めた。詳細は報告[1]のみならず既に論文[2]に発表されているので、そちらも参照されたい。

以下においては、まず前回報告した漸近理論について簡単に纏めた後、時間周期解を仮定した場合の色々な時間平均量の間の関係を示す。特に、超過圧の空間勾配や時間勾配の積の平均量が、平均圧の空間勾配やその高次の空間微分で全て表すことができることを示す。次に、壁面でのせん断応力や熱流束の平均を求め、音響流と熱音響流を圧力の勾配の積で表す。最後に、解析結果からこうした量を実験的に評価する方法についても触れる。なお、前回は2次元チャンネルを仮定したが、ここでは断面が円形の十分長い流路を考える。両者の結果の違いは係数だけである。

2. 漸近理論のまとめ

2.1 漸近パラメータ

はじめに問題の設定を図1に示す。固体壁に囲まれた半径 R の長いまっすぐな流路を考える。流路は静止した理想気体で充たされているとする。重力を無視すると圧力は至る所で一定であり、その値を p_0 とする。流路は十分長いとして両端の影響は考えない。中心軸に沿って x 軸をとり、半径方向に r 軸をとる。壁面温度 $T_w(x)$ が軸方向に緩やかに変化しており、温度勾配 dT_w/dx は考慮するが、2階微分 d^2T_w/dx^2 以上は無視する。この近似をすると、静止状態での気体の温度は壁面温度に等しいと置くことができ、また断面にわたって一様と見なせる。理想気体を仮定すると密度も断面内では一様となり、密度と温度の積はシャルルの法則に従い軸方向には一定である。こうした静止状態での量を添え字 e を付けて表し、特に気体の温度 T_e は壁面温度 T_w と同じであることを注意する。

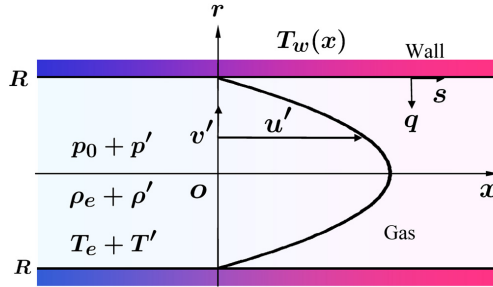


図 1: 固体壁に囲まれた半径 R の流路内には理想気体が充たされており、固体壁の温度 T_w が x 軸方向に緩やかに変化している。各量に対して添え字 e は静止状態での値を表し、プライムは静止状態からの攪乱を表す。また q と s は、壁面で気体に作用するせん断応力と気体に流れ込む熱流束を表す。

壁面温度が流路方向に緩やかに変化している細管を考える。これは流路半径 R が流路方向の代表長さ L に比べて十分小さいと仮定することである：

$$\frac{R}{L} \ll 1. \quad (2.1)$$

前回紹介した理論では温度勾配の 2 階の微分項以上を全て無視しているの、この比の 2 次項以上を全て無視していることになる。この近似を用いると、音波による圧力攪乱が断面にわたって一様であることが示される [1, 2].

次に、流路が、音波の伝播により発生する粘性および温度拡散層の厚さに比べて十分小さい場合を考える。音波の角振動数を ω として、流体の動粘性率および温度拡散率をそれぞれ ν, κ で表すと、粘性拡散層および温度拡散層の厚さは $\sqrt{\nu/\omega}, \sqrt{\kappa/\omega}$ でそれぞれ見積もられる。これより

$$\frac{R}{\sqrt{\nu/\omega}} \sim \frac{R}{\sqrt{\kappa/\omega}} \equiv \frac{1}{\delta} \ll 1 \quad (2.2)$$

と書ける。この比の逆数をパラメータ δ で表し、 δ は十分大きいとする。ここで、 ν/κ は Prandtl 数 Pr である。空気ではこの値は約 0.7 であるので、温度拡散層のほうが粘性拡散層より少し厚いが、両者の厚さは同程度と見なす。

流路の幅が狭いと流体と壁との間の熱交換が大きく、絶えず熱的平衡を保つので気体に温度の攪乱は生じにくく、気体の変化は等温変化に近い。このため攪乱はもはや断熱音速 a では伝播できない。かといって等温音速で伝播するわけでもないことに注意する。代表伝播速度は $L\omega$ で見積もられ a より遅くなるので、

$$\frac{L\omega}{a} \equiv \frac{1}{\chi} \ll 1 \quad (2.3)$$

となる。これより大きなパラメータ χ が導入される。このパラメータの大きさは δ と同じ程度の大きさであることが分かる [1, 2].

最後に弱非線形近似をする。圧力攪乱の代表的な大きさを Δp とおくと、静止状態での基準圧 p_0 に比べて Δp は 1 よりは十分小さいが、有限と仮定する：

$$0 \ll \frac{\Delta p}{p_0} \equiv \varepsilon \ll 1. \quad (2.4)$$

2.2 非線形拡散・波動（移流）方程式

このように導入されたパラメータを漸近パラメータとして、それらの間に $\delta^{-2} \sim \chi^{-2} \sim \varepsilon$ の関係を仮定すると、理想気体に対する連続の式、ナビエ・ストークス方程式、エネルギー式は最終的に超過圧 $p'(x, t)$ ($= p - p_0$) に対するつぎの非線形拡散・波動（移流）方程式に帰着される：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e dT_e}{T_e dx} \frac{\partial p'}{\partial x} + \left[\frac{8}{6} \gamma - (\gamma - 1) \text{Pr} \right] \frac{\alpha_e}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \\ - \frac{1}{6} (1 + \beta + \text{Pr}) \frac{\alpha_e R^2 dT_e}{\nu_e T_e dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} - \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\alpha_e}{p_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで、 x, t は、それぞれ流路に沿った座標および時間であり、 α_e は

$$\alpha_e = \frac{p_0 R^2}{8 \mu_e} \quad (2.6)$$

によって与えられ、圧力波の流路方向への拡散率である。せん断粘性率 μ_e の温度依存性を無視すると α_e は定数となるが、ここでは μ_e は温度 T_e のべきに比例： $\mu_e \propto T_e^\beta$ （ただし、 β は定数で 0.5 程度の値をとる）するとして考慮している。また、後に現れる熱伝導率 k_e も同じ指数 β をもつ温度のべきに比例すると仮定する。方程式 (2.5) の中の a_e は線形断熱音速であり、 $\sqrt{\gamma p_0 / \rho_e}$ で与えられる。ここで、 ρ_e は温度 T_e の静止状態での密度であり、 γ は比熱比である。

この方程式で、最初の 3 つの項が最低次の近似を与える。温度勾配がなければ圧力攪乱は狭い流路の中では拡散していくだけで、伝播できないことを最初の 2 項は示している。しかし温度勾配があれば、攪乱は第 3 項によって温度勾配の正の向きに伝播（移流）できることが分かる。第 4 項と第 5 項は流路幅の有限効果（と温度勾配の影響も）を表す高次項であり、最後の二つの項は非線形効果を表す高次項である。

2.3 流れ場および温度場

超過圧が (2.5) で支配されるとき、場の量は全て超過圧で表すことができる。そこで結果のみ記す。速度の流路方向の成分 $u(x, r, t)$ は

$$\begin{aligned} u' = & - \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \psi_2 + \frac{1}{\rho_e \nu_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \psi_4 - \frac{1}{\rho_e \nu_e^3} \frac{\partial^3 p'}{\partial t^2 \partial x} \psi_{60} \\ & + \frac{1}{\rho_e \nu_e^2} \left[\frac{p'}{p_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \psi_4 - \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \psi_6 - \frac{1}{p_0 R^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \psi_{64} \right] \\ & + \frac{\beta}{\mu_e} \left[\frac{1}{k_e T_e} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\psi_2^2}{2} + \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2 T_e} \frac{1}{dx} \frac{dT_e}{dx} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \psi_{62} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

で与えられる。ここで、 $\psi_2, \psi_4, \psi_6, \psi_{60}, \psi_{62}$ および ψ_{64} は半径方向の座標 r だけの関数で次のように与えられる：

$$\psi_2(r) = \frac{1}{4}(R^2 - r^2), \quad (2.8a)$$

$$\psi_4(r) = \frac{1}{64}(3R^2 - r^2)(R^2 - r^2), \quad (2.8b)$$

$$\psi_6(r) = \frac{1}{1152}(11R^4 - 7R^2r^2 + 2r^4)(R^2 - r^2), \quad (2.8c)$$

$$\psi_{60}(r) = \frac{1}{2304}(19R^4 - 8R^2r^2 + r^4)(R^2 - r^2), \quad (2.8d)$$

$$\psi_{62}(r) = \frac{1}{768}(4R^2 - r^2)(R^2 - r^2)^2, \quad (2.8e)$$

$$\psi_{64}(r) = \frac{1}{576}(5R^4 + 5R^2r^2 - 4r^4)(R^2 - r^2). \quad (2.8f)$$

一方、半径方向成分 $v(x, r, t)$ は

$$v' = \left(1 - \frac{p'}{p_0}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p'}{p_0}\right) \frac{2\psi_2}{R^2} r - \frac{1}{\nu_e p_0} \left[\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - (1 + \beta + \text{Pr}) \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right] \frac{\psi_2^2}{3R^2} r \quad (2.9)$$

で与えられる。

温度場も同じように求めることができ、壁面温度からの超過温度 T' ($= T - T_e$) は

$$\begin{aligned} T' = & \frac{1}{k_e} \frac{\partial p'}{\partial t} \psi_2 + \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \psi_4 + \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \psi_4 - \frac{1}{2k_e \mu_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)^2 \psi_2^2 \\ & - \frac{\text{Pr}}{k_e \nu_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \psi_4 - \frac{(1 + \text{Pr}) \text{Pr}}{\rho_e \nu_e^3} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \psi_{60} \end{aligned} \quad (2.10)$$

で与えられる。このように、流れ場と温度場が超過圧によって表すことができる。密度場は状態方程式から圧力と温度が分かると求まる。

求めた流れ場および温度場は、(2.5)を導出する目的には余分な高次項まで明記されている。しかし、音響流や熱音響流を正確に求めるためにはここで示した高次項が不可欠になる。

3. 音響流および熱音響流

3.1 圧力の時間平均量の間関係

さて非線形拡散・波動方程式(2.5)に基づいて各量の時間平均値について調べる。熱音響現象を用いる熱機関では、この方程式が成立するのは、いわゆるスタックと呼ばれる温度勾配を課す区間であり管路全体ではない。管路内で自励振動が発生するときには、スタック内でも時間的な周期振動が発生しているはずである。このため、(2.5)の解だけを探すことはあまり意味がなく、スタック外部の解と接続することによって物理的に意味のある解が求まる。そこで、(2.5)に時間的な周期解が存在するものと仮定して、その周期にわたる平均量について議論する。

周期解の周期を τ として、周期にわたる時間平均をティルドを付けて表す：

$$\tilde{p}' \equiv \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} p'(x, \theta) d\theta. \quad (3.1)$$

これより次の関係が成り立つことが分かる：

$$\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial x}, \quad \frac{\widetilde{p' \partial p'}}{p_0 \partial x} = \frac{1}{2p_0} \frac{\partial \widetilde{p'^2}}{\partial x}.$$

さて、方程式 (2.5) を時間平均すると、

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e dT_e}{T_e dx} \frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} - \frac{\alpha_e}{p_0} \left(\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (3.2)$$

となり、流路幅の有限効果は消える。この関係式は

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_e \widetilde{\partial p'}}{T_e \partial x} \right) = \frac{\alpha_e}{p_0 T_e} \left(\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} \right)^2 \quad (3.3)$$

と書ける。これから、係数 α_e/T_e を除けば、左辺の平均圧の勾配の空間微分は、右辺の圧力勾配の2乗の平均に等しいことが分かる。これから当然、平均圧の勾配は2次量である。

次に (2.5) に p' を掛けて平均すると

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e p' \frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} \right) + \alpha_e \left(\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha_e dT_e}{T_e dx} p' \frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} + \tilde{P} = 0 \quad (3.4)$$

となる。ここで、 P は

$$\tilde{P} = - \left[\frac{8}{6} \gamma - (\gamma - 1) \text{Pr} \right] \frac{\alpha_e}{a_e^2} \left(\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{6} (1 + \beta + \text{Pr}) \frac{\alpha_e H^2 dT_e}{\nu_e T_e dx} \frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial t} \frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} - \frac{\alpha_e}{p_0} p' \left(\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} \right)^2 \quad (3.5)$$

である。これは流路の有限幅の影響や3次の非線形性の影響を反映している高次項である。式 (3.4) の第2項を (3.3) を用いて置き換えると、(3.4) は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\alpha_e}{T_e} \left(\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} + \frac{p' \widetilde{\partial p'}}{p_0 \partial x} \right) \right] = \frac{\tilde{P}}{p_0 T_e}. \quad (3.6)$$

のように纏めることができる。右辺の \tilde{P} を小さいと見なして無視すると、(3.6) は積分できて

$$\tilde{p}' + \frac{\widetilde{p'^2}}{2p_0} = c_1 \int^x \frac{T_e}{\alpha_e} dx + c_2 \quad (3.7)$$

となる。ここで、 c_1, c_2 は任意定数である。圧力攪乱がゼロの場合を考えると左辺はゼロであるので、これら定数はゼロとなる。これより平均圧 \tilde{p}' は2次量であることが分かる。線形理論では当然ゼロである。

次に (2.5) に $\alpha_e \partial p' / \partial x$ を掛けて平均をとると

$$\frac{\alpha_e}{T_e^2} \frac{\widetilde{\partial p'} \partial p'}{\partial t \partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\alpha_e^2}{T_e^2} \left(\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

となり、一方 $\partial p'/\partial t$ を掛けて平均をとると

$$\frac{1}{T_e^2} \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial t}} \right)^2 = \frac{1}{T_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_e \widetilde{\frac{\partial p'}{\partial t}} \widetilde{\frac{\partial p'}{\partial x}}}{T_e} \right) = \frac{1}{T_e} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{T_e}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\alpha_e^2}{T_e^2} \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial x}} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.9)$$

となる。ただし、これらの関係は P の高次項を全て無視した、最低次の近似の範囲であることに注意する。

以上のことから分かることは、次に示す圧力の空間または時間に関する勾配の積の平均

$$\left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial x}} \right)^2, \quad \widetilde{\frac{\partial p'}{\partial t}} \widetilde{\frac{\partial p'}{\partial x}}, \quad \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial t}} \right)^2 \quad (3.10)$$

は、(3.3) の関係を用いると α_e や T_e の空間微分が現れるものの、全て平均圧の空間勾配とその空間微分で表すことができることである。

これをもっと明確にするために、 x に代わって新しい変数 ξ を次の関係より導入する：

$$\frac{\alpha_e \partial p'}{T_e \partial x} \equiv \frac{\partial p'}{\partial \xi} \quad (3.11)$$

この変数を用いると、(3.3) は

$$\left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial \xi}} \right)^2 = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial \xi}} \right) p_0 \quad (3.12)$$

と表すことができ、他の積の平均も

$$\frac{\alpha_e \widetilde{\frac{\partial p'}{\partial t}} \widetilde{\frac{\partial p'}{\partial \xi}}}{T_e^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial \xi}} \right)^2, \quad \frac{\alpha_e}{T_e^2} \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial t}} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial t}} \widetilde{\frac{\partial p'}{\partial \xi}} \right) \quad (3.13)$$

と表すことができる。これらの関係より、圧力の空間勾配や時間勾配の積の時間平均は、圧力の変数 ξ についての空間勾配で表せると言い換えることができる。

3.2 壁面での摩擦力和熱流束の平均

壁面で流体に作用するせん断応力 s と流体に流れ込む熱流束 q の時間平均を考える。これらは

$$s = \mu_e \left. \frac{\partial u'}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad q = k_e \left. \frac{\partial T'}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (3.14)$$

から求まる。既に求めた流れ場と温度場の式から、

$$\frac{2}{R} \widetilde{s} = \frac{\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial x}}}{\partial x} + \frac{R^2}{6\nu_e p_0} \left[2 \frac{\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial t}} \widetilde{\frac{\partial p'}{\partial x}}}{\partial t \partial x} + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial x}} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

および

$$\frac{2}{R} \widetilde{q} = - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left(\widetilde{\frac{\partial p'}{\partial x}} + \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \quad (3.16)$$

と表すことができる。特に、(3.16) より温度勾配が無ければ平均熱流はゼロであることが分かる。

3.3 音響流および熱音響流

音響流とは質量流束密度ベクトル $\rho \mathbf{v}$ の時間平均量である。攪乱にダッシュを付けて表すと、

$$\rho \mathbf{v} = \rho_e \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}' \quad (3.17)$$

と書ける。状態方程式 $p/p_0 = \rho T / \rho_e T_e$ を用いて密度の攪乱 ρ' を消去すると

$$\rho' \mathbf{v}' = \rho_e \left(\frac{p'}{p_0} - \frac{T'}{T_e} - \frac{\rho'}{\rho_e} \frac{T'}{T_e} \right) \mathbf{v}' = \frac{\rho_e}{p_0} p' \mathbf{v}' - \frac{T'}{T_e} \rho \mathbf{v}' \quad (3.18)$$

となる。

これらの関係を用いて x 方向の音響流を求めると

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho u'} = & -\frac{1}{\nu_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \psi_2 - \frac{1}{\nu_e^2 p_0} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \psi_{46} + \frac{\alpha_e dT_e}{T_e dx} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \frac{8\psi_6}{R^2} \right] \\ & + \frac{\text{Pr}}{\nu_e^2 p_0} \left[\frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \psi_2^2 + \frac{\alpha_e dT_e}{T_e dx} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \frac{8\psi_2 \psi_4}{R^2} \right] \\ & + \frac{\beta \text{Pr}}{\nu_e^2 p_0} \left[\frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\psi_2^2}{2} + \frac{\alpha_e dT_e}{T_e dx} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \frac{8\psi_{62}}{R^2} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる。一方、半径方向の音響流を求めするには、既に求めた v の表現 (2.9) では不十分で高次項が必要になる。しかし、これを求めることは大変面倒になるので、次のよう回避して求める。音響流は連続の式の時間平均をとると発散がゼロ

$$\nabla \cdot (\widetilde{\rho \mathbf{v}'}) = 0 \quad (3.20)$$

を満たす。これを流路断面にわたって積分すると、壁面で $v' = 0$ から

$$\frac{d}{dx} \int_0^R (\widetilde{\rho u'}) r dr = 0 \quad (3.21)$$

となり、断面にわたる x 方向の質量流束は x によらないことが分かる。この関係を用いると、 $\widetilde{\rho u'}$ は

$$\widetilde{\rho u'} = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial}{\partial x} (\widetilde{\rho u'}) r dr \quad (3.22)$$

となり、ここに既に求めた $\widetilde{\rho u'}$ を代入することによって求めることができる。

熱音響流も音響流と同じく、エネルギー式におけるエネルギー流束密度ベクトル \mathcal{H} の時間平均である：

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathcal{H}} = 0. \quad (3.23)$$

ここで, \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' + h \right) \mathbf{v}' - k \nabla T - \mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.24)$$

である. ここで, h はエンタルピー $c_p T$ を表し, $\boldsymbol{\sigma}$ は粘性応力テンソルである. 幾つかの項がなる中で, 最も大きいのはエンタルピー流束密度ベクトルからの寄与である. これは

$$\rho h \mathbf{v}' = h_e \left(\rho_e \mathbf{v}' + \frac{\rho_e}{p_0} p' \mathbf{v}' \right) \quad (3.25)$$

と書ける. 音響流の x 成分を参考にして, $\tilde{\mathcal{H}}$ の x 成分は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_x = & -\frac{h_e}{\nu_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \psi_2 - \frac{h_e}{\nu_e^2 p_0} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \psi_{46} + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \frac{8\psi_6}{R^2} \right] \\ & + \frac{\beta Pr h_e}{\nu_e^2 p_0} \left[\frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\psi_2^2}{2} + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \frac{8\psi_{62}}{R^2} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる. 熱音響流の r 成分 \mathcal{H}_r は, $\nabla \cdot \tilde{\mathcal{H}} = 0$ より次のように求めすることができる.

$$\mathcal{H}_r = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} r dr. \quad (3.27)$$

一方, $\nabla \cdot \mathcal{H} = 0$ を断面にわたってこれを積分すると

$$\frac{d}{dx} \int_0^R \mathcal{H}_x 2\pi r dr = 2\pi \tilde{q} \quad (3.28)$$

となる. これより x 方向のエンタルピー流束密度ベクトルは一定ではなく, 壁からの熱流によって変化することが分かる.

4. 結果と議論

非線形拡散・波動 (移流) 方程式の時間的な周期解が存在するとの大前提の下に, 壁面でのせん断応力や熱流束の時間平均値, また音響流と熱音響流について超過圧によって表せることを示した. これらの量は, 圧力の空間勾配の積や時間勾配との積の平均で表すことができる. これらの積はまた, 平均圧の高階の空間勾配で全て表されることも分かった. したがって全ての平均量は平均圧力分布が分かれば求まることを示唆しているが, 現実にはこれを求めることは容易でないであろう.

むしろ得られた解析結果は, 音響流や熱音響流が流速や温度の計測から実験的に導くことができることを示唆する. 最低次の関係から, 圧力の空間勾配は断面にわたる平均流速に, また時間勾配は同じく断面にわたる温度の平均に等しいことが分かる:

$$\overline{u'} \approx -\frac{R^2}{8\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \overline{T'} \approx \frac{R^2}{8k_e} \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (4.1)$$

これらから, 圧力の空間および時間勾配の積の時間平均は, 断面平均した速度や温度の時間平均と次のような関係にある:

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 = \frac{64\mu_e^2}{R^4} (\overline{u'})^2, \quad \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{64\mu_e k_e}{R^4} \overline{u' T'}, \quad \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right)^2 = \frac{64k_e^2}{R^4} (\overline{T'})^2. \quad (4.2)$$

したがって流速や温度の断面にわたる時間平均が実験的に得られれば、これらのデータを (3.19) や (3.26) に代入すると音響流や熱音響流の分布が求まることになる。

5. おわりに

温度勾配のある狭い流路における音響流や熱音響流について、非線形拡散・波動（移流）方程式に基づいてそれらの一般的な表現を提示した。こうした定常流れは攪乱の2次量であるため小さく、温度勾配が無い場合でもよく分かっていないのが現状である。しかし、熱音響現象を利用した熱機関を構築するにはこの知見は不可欠である。熱機関は長時間作動させるので音響流や熱音響流は必ず出現し、小さくても定常的に質量や熱を流路に沿って輸送する。このため与えた温度勾配が抑えられ、不必要な熱の輸送が発生し熱機関の作動上好ましくない。こうした定常流れを抑制することができれば熱機関の効率の上昇に繋がることは間違いない。

参考文献

- [1] 杉本 信正, “温度勾配のある狭いチャンネル内の非線形音波の伝播,” 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」No.1989 (2016) 34–44.
- [2] Sugimoto, N., “Nonlinear theory for thermoacoustic waves in a narrow channel and pore subject to a temperature gradient,” *J. Fluid Mech.*, **797** (2016) 765–801.