

## 円孔領域への数値等角写像

### A method of numerical conformal mappings onto circular domains

愛媛大学・大学院理工学研究科\* 岡野 大

Dai Okano

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

#### §1. はじめに

天野 [7] の提案した, 代用電荷法による数値等角写像の特長は, 単連結領域において双方向の写像関数を近似できること, とくに円形の境界を持つ領域の計算で近似精度が高いことにある. また, 多重連結領域の正準スリット領域を統一的に扱えることも重要な特長と言える.[9, 4] これは, ポテンシャル流解析と関係の深い Nehari[3] の5つの正準スリット領域をほぼ同一の定式化のもと同じ係数行列を持つ連立一次方程式に帰着して扱えることによく現われている. さらに, Nehari の正準スリット領域のうち, 平行スリット領域をさらに一般化したものと言える直線スリット領域 [8], あるいは Koebe の39種の正準スリット領域 [2] のうち, 螺旋スリット領域を含む13種の正準スリット領域も同様に扱うことができるようになった [6]. 一方で, Koebe の正準スリット領域の残りの23種については, 境界上に現われる原点・無限遠点をそのままでは扱うことができていない. さらに, 理論上対応すべき正準領域について, まだ有効な適用方法が知られていないものがあり, 対応が必要とされる.

本稿では, そのような未対応の問題のうち, 円孔領域 (Circular domain) を正準領域とする多重連結領域の等角写像の問題に, 代用電荷法を適用する試みについて述べる.

## §2. 代用電荷法による多重連結領域の数値等角写像

Riemann の写像定理のもと、単連結の領域においては任意の領域が等角同値であり、等角写像が存在する。したがって、特定の標準領域を採用し、一般の領域との間の等角写像を求めることができれば、任意の領域間の写像について扱うことができる。一方、多重連結領域は、多重度が一致しても等角同値であるとは限らず、与えられた領域間の等角写像を考える前に、その等角同値性を判断する必要がある。そこで、領域の幾何的な特徴に一定の自由度を残して正準領域と呼ばれる多重連結領域を想定し、与えられた問題領域との間の等角写像を考えることが一般的である。

例えば、正準領域として平行スリット領域を想定する場合は、スリットの位置やを自由度として残し、与えられた問題領域毎に定めることで等角写像の存在する場合を考えることができる。実際には、等角写像を求めるとともにスリットの位置や大きさを定めることになる。代用電荷法による数値等角写像では、境界がスリットに写像されるという条件を調和関数の境界値問題に帰着させ、これに代用電荷法を適用するという手順が取られる。したがって、直線分からなるスリットや同一の中心を持つ円・円弧を境界に持たない正準領域について、そのまま適用することが難しい。

## §3. 円孔領域への等角写像の問題

2次元平面中の  $n$  重連結領域の等角写像の問題を考える。ここでは問題を考える2次元平面を複素平面と同一視して、等角写像の写像関数を複素関数として求めることとする。

無限遠点を含む複素平面全体から、互いにも交わらない境界閉曲線  $B_1, \dots, B_n$  と、その囲む領域  $D_1, \dots, D_n$  を除いた問題領域  $D$  を考える。  $D$  と同様に複素平面全体から  $n$  個の円形の孔とその境界円  $C_1, \dots, C_n$  を除いた円孔領域  $C$  を考える。  $S$  の境界円が互いに交わることが無ければ、  $D$  と  $C$  の多重度は一致する。さらに、境界円の位置と大きさを適切に決めることができれば、2つの領域間に等角写像を定めることができる。ここで、  $D$  を  $w (= u + iv)$  平面、  $C$  を  $z (= x + iy)$  平面に置けば等角写像の写像関数  $w = f(z)$  は以下の正規化条件のもと一意に定まる。

$$z \in C_j \Rightarrow f(z) \in B_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (2)$$

すなわち、  $C_j$  が  $B_j$  に写像され、  $f(z)$  の無限遠点における Laurent 級数の  $-1$  次の係数が

1 で定数項が 0 であるとする条件のもとで、等角写像の写像関数が一意に定まる。本稿では、この写像関数  $f(z)$  の近似について述べる。

#### §4. 代用電荷法による平行スリット領域への数値等角写像

無限遠点を含む複素平面全体から、互いに平行な直線分からなるスリットを除いた領域を平行スリット領域と呼ぶ。前章と同様に定めた問題領域  $D$  から平行スリット領域への等角写像を考える。円孔領域の場合と同様にスリットの位置と長さを適切に定めれば、 $D$  と等角同値な平行スリット領域  $S$  を得る。また  $D$  を  $z$  平面に、 $S$  を  $w$  平面に置けば等角写像の写像関数  $w = f(z)$  は次の条件のもと、一意に定められる。

$$z \in B_j \Rightarrow f(z) \in S_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (4)$$

ただし、 $S_j$  は  $S$  の  $j$  番目のスリットとし、 $S$  のスリットが実軸と成す角度  $\theta$  はあらかじめ与えられたものとする。

このような平行スリット領域への等角写像を求める問題に、代用電荷法による方法を適用する。そのためにはまず、 $D$  から  $S$  への等角写像の写像関数を  $D$  の調和関数  $g(z)$  と、その共役対  $h(z)$  を用いて、次のように表す。

$$f(z) = z + g(z) + ih(z). \quad (5)$$

平行スリット領域  $S$  のスリットが実軸と成す角度を  $\theta = \pi/2$  とすれば、境界閉曲線  $B_j$  は虚軸と平行なスリット  $S_j$  に写像され、次式を満たす。

$$g(z) + x = u_j \quad z = x + iy \in B_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

ここで  $u_j$  は  $B_j$  が  $f(z)$  により写像されたスリットの位置を示す未知の定数で、写像関数  $f(z)$  とともに定まる。また、正規化条件  $f(z) \sim z (z \rightarrow \infty)$  から、 $g(z)$  と  $h(z)$  は

$$g(\infty) + ih(\infty) = 0 \quad (7)$$

を満たさなければならない。写像関数  $f(z)$  の一意性から、等角写像の問題はこのような共役調和関数  $g(z)$  と  $h(z)$  を求める問題に帰着できる。

天野 [7] はこのような等角写像の問題を変形して得られる問題に対して代用電荷法を適用する手法を提案した。代用電荷法では、対数ポテンシャルにもとづく基本解の重ね合わせで近似解を表現し、境界条件を満たすように基本解の重みを決定する。そこで、電荷点と

呼ぶ対数ポテンシャルの特異点を  $D_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) にそれぞれ  $N_j$  個ずつを置けば, 近似調和関数  $G(z) \approx g(z)$  を定数関数と  $N_1 + \dots + N_n$  個の対数ポテンシャルにより次式のように表すことになる.

$$g(z) \approx G(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z - x_{lj}|, \\ x_{l1}, \dots, x_{lN_l} \in D_l \quad l = 1, \dots, n. \quad (8)$$

このとき,  $G(z)$  の共役対を  $H(z)$  とし,  $f(z) = z + g(z) + ih(z)$  であることから, 近似写像関数  $F(z)$  を任意の定数  $H_0$  とともに

$$f(z) \approx F(z) = z + Q_0 + iH_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - x_{lj}) \quad (9)$$

とすることができる. また, 写像関数  $F(z)$  が一価であることから, 次の条件が導かれる.

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad l = 1, \dots, n. \quad (10)$$

ここで, 正規化条件 (7) を  $G(z) + iH(z)$  にも課せば,  $Q_0 = H_0 = 0$  が得られる. 以上の諸条件を併せて, 未定係数  $Q_{11}, \dots, Q_{nN_n}, U_1, \dots, U_n$  を次の連立一次方程式の解として得られる.

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0, \quad -U_m + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |y_{mk} - x_{lj}| = -\operatorname{Re}(y_{mk}), \quad (10) \\ l = 1, \dots, n, \quad y_{mk} \in B_m \quad m = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, N_m.$$

## §5. 円孔領域への数値等角写像

以上により, 一般の問題領域  $D$  や円孔領域  $C$  から平行スリット領域への数値等角写像を求めることができる. このとき  $D$  の境界が写像されたスリットと  $C$  の境界が写像されたスリットとの位置と長さが一致すれば,  $D$  と  $C$  は同じ平行スリット領域と等角同値であることから  $D$  と  $C$  が等角同値であると言える. そこで, 本稿では, 与えられた問題領域から平行スリット領域への等角写像を計算し, 結果として明らかになった平行スリット領域への等角写像が存在する円孔領域の孔の位置と半径を求め, 問題領域と等角同値な円孔

領域を定めるまでを前段とし、等角同値な問題領域と円孔領域の間の等角写像を計算する後段と併せた方法を提案する。

具体的には、まず問題領域  $D$  から平行スリット領域への近似等角写像を求めることで平行スリット領域  $S$  を定める。このとき  $D$  から  $S$  への等角写像の近似写像関数  $F_D(z)$  とともに、 $S$  の境界スリット  $S_1, \dots, S_n$  の位置と大きさ (の近似) を得ることができる。同様に円孔領域に対応する平行スリット領域を求めることができるが、円孔スリット領域のパラメタを反復的に改良することでスリットの位置と大きさを  $S_1, \dots, S_n$  と一致させる。こうして得た円孔領域を  $C$  と置き、 $C$  から  $S$  への等角写像の近似写像関数を  $F_C(z)$  とする。写像関数の一意性から、2つの領域  $D$  と  $C$  は同じ平行スリット領域  $S$  に写像されるので、それぞれの対応する境界を  $D$  においては  $B_l$ 、 $C$  においては  $C_l$ 、 $S$  においては  $S_l$  と置けば、以降に説明する方法で  $C$  から  $D$  への等角写像の近似写像関数を求めることができる。

### ■円孔領域 $C$ の反復改良による近似

円孔領域  $C$  を反復改良によって定めるため、まずは初期境界円  $C_1^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$  からなる初期円孔領域を用意し、 $C^{(0)}$  とする。 $C^{(0)}$  から平行スリット領域への等角写像の近似写像関数を求め  $w = F_{C^{(0)}}(z)$  とすれば、 $C^{(0)}$  と等角同値な平行スリット領域  $S^{(0)}$  が定まり、 $w$  平面上のスリット  $S_l^{(0)}$  とその端点  $w_{l1}^{(0)}, w_{l2}^{(0)}$  ( $l = 1, \dots, n$ ) を決めることができる。目的の平行スリット領域  $S$  とそのスリット  $S_l$ 、端点  $w_{l1}, w_{l2}$  もまた、近似写像関数  $w = F_D(z)$  により決めることができるので、対応するスリット端点同士を比較することで、スリットのズレを調べ、これを減少させるように円孔領域を更新する必要がある。

反復改良中の円孔領域を  $C^{(k)}$  とする ( $k = 0, 1, \dots$ )。ここで  $C^{(k)}$  の境界円の中心を  $c_l^{(k)}$  ( $l = 1, \dots, n$ )、その半径を  $r_l^k$  とすれば、円孔領域の更新は、すなわちその境界円の中心点と半径の更新なので、スリットのズレが少なくなるよう新たな中心  $c_l^{(k+1)}$ 、半径  $r_l^{(k+1)}$  を決めなければならない。

そこで、更新に際して、次の仮定をおく。

$$F_{C^{(k)}} \approx F_C, \quad (11)$$

$$\arg F_C^{-1}(w_{lm}^{(k)} - c_l^{(k)}) \approx \arg F_C^{-1}(w_{lm} - c_l) \quad l = 1, \dots, n, m = 1, 2, \quad (12)$$

ただし、 $c_l$  は  $D$  と等角同値な円孔領域  $C$  の境界円の中心。すなわち、近似写像関数  $F_{C^{(k)}}$  は  $F_C$  に十分近く、スリット端点の原像の境界円上の位置関係もほぼ一致する。このこと

を利用して、次の更新式を採用する.

$$c_l^{(k+1)} = c_l^{(k)} + (\delta z_{l1}^{(k)} + \delta z_{l2}^{(k)})/2 \quad (13)$$

$$r_l^{(k+1)} = |F_{C^{(k)}}^{-1}(w_{lm}) - c_l^{(k+1)}| \quad (14)$$

$$\delta z_{lm}^{(k)} = F_{C^{(k)}}^{-1}(w_{lm}) - F_{C^{(k)}}^{-1}(w_{lm}^{(k)}) \quad l = 1, \dots, n, m = 1, 2$$

これは、スリット端点の原像を目的の位置に移動させることで円形境界の中心と半径を更新するものである. 近似写像の逆関数は境界上の対応関係から構成することもできる [5].

### ■問題領域 $D$ から円孔領域 $C$ への近似写像関数

円孔領域  $C$  を  $z$  平面に、問題領域  $D$  を  $w$  平面におけば、等角写像の写像関数は以下の条件のもとで一意に定まる.

$$z = \infty \text{ における Laurent 級数展開: } w = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \quad (15)$$

このとき、 $f(z)$  の近似  $F^*(z)$  を恒等写像と複素対数ポテンシャルとの線形結合で表す.

$$f(z) \approx F^*(z) = z + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* \log(z - x_{lj}^*). \quad (16)$$

未定係数は円形境界  $C_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ) 上にそれぞれとった拘束点  $y_{l1}, \dots, y_{lN_l}$  において、以下の拘束条件を満たすように定める.

$$\begin{aligned} F^*(y_{mk}) = \\ y_{mk} + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* \log(y_{mk} - x_{lj}) = w_{mk} \\ m = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N_m, \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $w_{mk}$  は近似写像関数  $F(z)$  と  $F'(z)$  を通じて対応する  $B_m$  上の点であることから、次の連立 1 次方程式から  $Q_{11}^*, \dots, Q_{nN_n}^*$  を定める.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} y_{mk} + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* \log |y_{mk} - x_{lj}| = \operatorname{Re} w_{mk} \\ m = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N_m, \end{aligned} \quad (18)$$

## §6. 数値実験

3つの楕円境界を持つ3重連結領域(図2左)と等角同値な円孔領域(図2右)を求め、領域間の等角写像の近似写像関数を計算する.

代用電荷法による数値等角写像の誤差は電荷点・拘束点配置とその数によって決まるが、一般に適切な電荷点・拘束点配置を選択する方法は知られていない。領域の境界閉曲線によっては精密な誤差評価が得られていたり、ある程度精度の高い近似解が期待できる場合はあるので、境界閉曲線の形状に合わせて電荷点・拘束点を配置するのが望ましい。

今回の数値実験において、問題領域の楕円はそれぞれ、 $1.5 + 0.5i$ ,  $-1 - 0.5i$ ,  $2 - 0.5i$  に中心を持つ同じ扁平率の楕円で、焦点を結ぶ線分が 2:1 の比率で傾いている。このような境界を持つ問題に対しては Joukowski 逆変換を利用した理想的な電荷点・拘束点の配置方法が知られているが、ここでは一般の問題を想定して、境界上に等間隔に置いた拘束点  $y_{mk}$  ( $m = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N_m$ ) から領域拡張法あるいは天野の方法と呼ばれる簡易な方法で電荷点を定め用いる (図 1)。十分な精度を得るため各境界閉曲線毎に  $N_m = 64$  点を配置する。境界上の等分点ということから拘束点が確定し、領域拡張法により電荷点を定めることができる。

円孔領域においては、等角同相配置と呼ばれる方法が知られている。等角同相配置では、拘束点が境界円上に等間隔に、電荷点が境界円との同心円上に等間隔に、かつ電荷点と拘束点が円の中心からみて同じ方向に揃うように配置される。また、天野の方法を境界円上に等間隔に置いた拘束点に適用して電荷点を生成すれば、等角同相配置の電荷点が得られる。等角同相配置は理想的な電荷点・拘束点配置を与えることが知られているので、境界円ごとに 16 点程度の電荷点・拘束点を配置すれば、問題領域  $D$  の等角写像の近似に見合う精度の数値等角写像を得ることができる。

反復計算により円孔領域を求めるにあたり初期円孔領域を決定する必要がある。今回の実験では、あらかじめ求めた問題領域  $D$  の数値等角写像を用いて得た平行スリット領域  $S$  のスリットの位置と大きさから初期円孔領域を定める。具体的には、それぞれ 1 つずつのスリットだけを持つ単連結領域を想定し、対応する等角同値な円孔領域を考える。このような場合は Joukowski 逆変換を用いて写像関数を得ることができるので、単連結な円孔領域の境界円の位置と大きさを求めることができる。それぞれのスリット毎に求めた境界円を初期円孔領域の境界として 3 重連結の円孔領域を定めて反復計算を開始すれば良い。

以上の条件にもとづいて 3 つの楕円境界をもつ 3 重連結領域に等角同値な円孔領域を求め、前章に示した方法で円孔領域  $C$  から問題領域  $D$  への等角写像の写像関数を求めた結果を図 2 に示す。

このとき、円孔領域の反復計算では、24 回の反復で図 3 に示すようにスリットのズレが減少している。

なお、問題によっては初期円孔領域の設定時あるいは円孔領域の反復改良の過程で境界円の交差が発生してしまう。何らかの方法で更新量の緩和が必要になるが、その場合は図

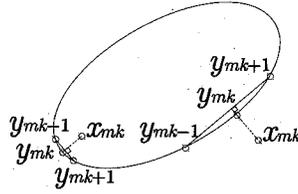


図1 天野の方法 (領域拡張法)

境界閉曲線上に順序付けて並べられた拘束点  $y_{m1}, \dots, y_{mN_m}$  を利用して、電荷点  $x_{mk}$  を生成する.  $x_{mk} = y_{mk} + q \times i(y_{mk+1} - y_{mk-1})$ , ここで  $q > 0$  は配置のためのパラメタ.

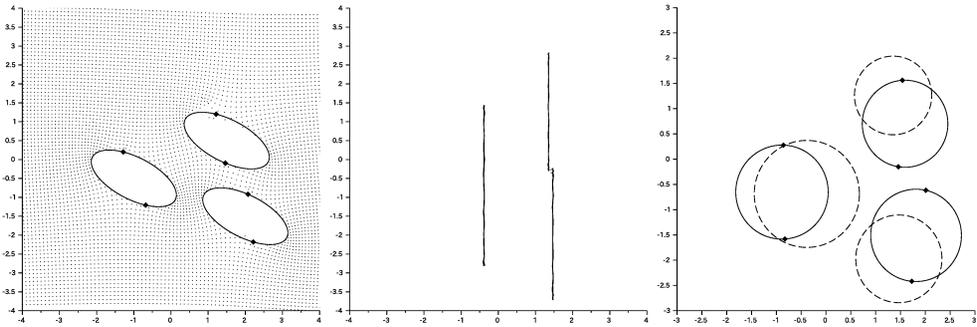


図2 問題領域  $D$ , 平行スリット領域  $S$ , 円孔領域  $C$

問題領域  $D$  中のドットは円孔領域  $C$  においた等間隔格子点を近似写像関数で写像したもの. スリット領域  $S$  の境界スリットに沿った曲線は問題領域  $D$  の境界閉曲線を近似写像関数で写像したもので、誤差も含む. 円孔領域  $C$  の破線は初期円孔領域  $C^{(0)}$  の境界円.  $D$  および  $C$  の境界上のドットはスリット端点の原像.

3 に示したような効率的な更新は期待できなくなる. 今回の数値実験例では初期配置・反復中ともに境界円の交差が無いものとなっている.

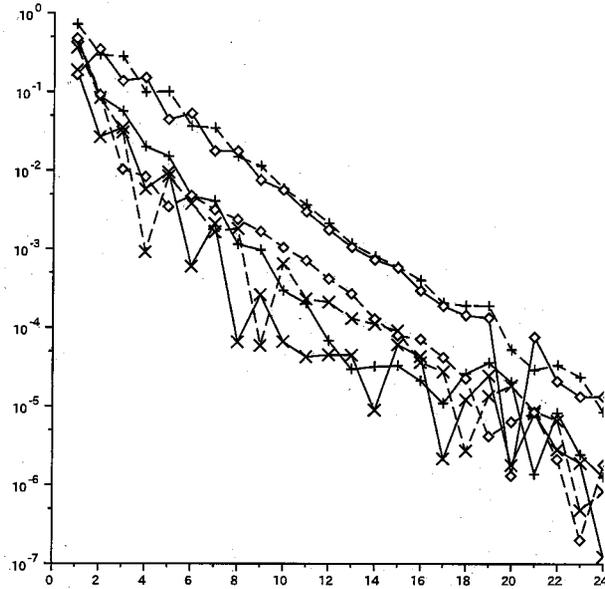


図3 スリットのズレの収束

円孔領域の更新毎の平行スリット領域におけるズレ,  $|w_{lm}^{(k)} - w_{lm}|$  ( $l = 1, 2, 3, m = 1, 2$ ). ただし, 図中の + 記号が  $D$  中の右上の楕円, × 記号が左の楕円, ◇ 記号が右下の楕円に対応し, 実線が下側, 点線が上側の端点に対応する.

## §7. おわりに

一般に与えられた問題領域と円孔スリット領域との間の数値等角写像を代用電荷法による平行スリット領域への数値等角写像を介して計算する方法を提案した.

円孔領域を正準領域とした等角写像の問題は理論上も応用上も重要で [1], 一般には Koebe の方法と呼ばれる, 一部の境界閉曲線を円形の境界に写像する等角写像と Kelvin 変換を組合せて反復改良的に等角写像を得る方法が知られている. 原理的には Koebe の方法と代用電荷法による数値等角写像を組合せることも可能である. しかし, Koebe の方法では, その過程で扱うことになる領域の境界が頻繁に変化し適切な電荷点・拘束点を定めることが難しい. 提案法では反復計算の対象となる円孔領域において, 理想的な電荷点・拘束点配置を採用し, 解くべき連立一次方程式方程式を小さく保ち, かつ高い精度の近似

を得続けることが可能である。

円孔領域への数値等角写像を求める方法としては、本稿で述べた方法は素朴に過ぎるものではあるが、そこで用いた正準 (スリット) 領域を介して等角同値な多重連結領域を定め、境界の対応関係から近似写像関数を再構成するという手順は代用電荷法による数値等角写像の方法の適用範囲を広げるものと期待できる。

## 参考文献

- [1] Darren Crowdy and Jonathan Marshall. Conformal mappings between canonical multiply connected domains. *Computational Methods and Function Theory*, Vol. 6, No. 1, pp. 59–76, 2006.
- [2] Paul Koebe. Abhandlungen zur theorie der konformen abbildung. *Acta Mathematica*, Vol. 41, No. 1, pp. 305–344, 1916.
- [3] Zeev Nehari. *Conformal Mapping*. McGraw-Hill, New York, 1952.
- [4] Dai Okano, Hidenori Ogata, Kaname Amano, and Masaaki Sugihara. Numerical conformal mappings of bounded multiply connected domains by the charge simulation method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 159, No. 1, pp. 109–117, 2003.
- [5] Dai Okano, Masatoshi Terazono, Kaname Amano, and Hidenori Ogata. Bi-directional method for numerical conformal mappings of multiply connected domains by the charge simulation method. *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 54, pp. 357–363, 2005.
- [6] 天野要, 岡野大, 遠藤慶一, 緒方秀教. 代用電荷法による koebe (1916) の正準スリット領域への数値等角写像 (応用). *日本応用数学会論文誌*, Vol. 24, No. 3, pp. 157–183, 2014.
- [7] 天野要. 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法. *情報処理学会論文誌*, Vol. 28, No. 7, pp. 697–704, 1987.
- [8] 天野要, 遠藤慶一, 岡野大, 鳳弘勝, 李涛. 代用電荷法による直線スリット領域への数値等角写像. *情報処理学会論文誌*, Vol. 50, No. 8, pp. 1775–1779, 2009.
- [9] 天野要, 岡野大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顯. 代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法. *情報処理学会論文誌*, Vol. 42, No. 3, pp. 385–395, 2001.