

## 埋め込み境界法の数学的定式化に対する諸注意

### A Remark on the Mathematical Formulation for the Immersed Boundary Method

東京大学大学院数理科学研究科 杉谷 宜紀\*†  
 Yoshiki Sugitani, The University of Tokyo

#### 1 はじめに

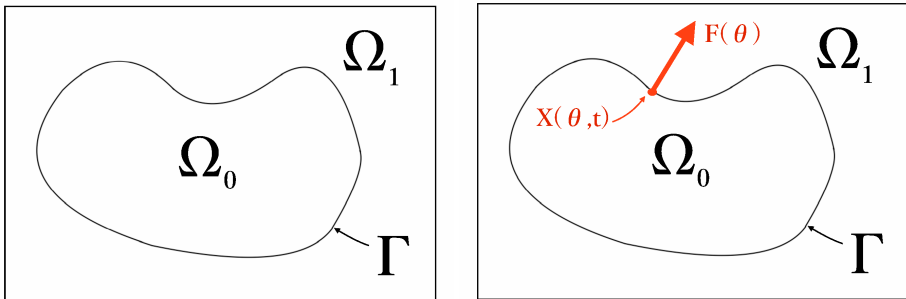
埋め込み境界法とは、1977年に [5] で提唱されたある種の流体構造連成問題を解く為の手法であり、その支配方程式は次のような特異な外力  $f$  を持つ Navier-Stokes 方程式 (IB formulation) によって与えられる:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1a)$$

$$f(x, t) = \int_{\Theta} \mathbf{F}(\theta, t) \delta(x - \mathbf{X}(\theta, t)) d\theta, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\theta, t) = u(\mathbf{X}, t) = \int_{\Omega} u(x, t) \delta(x - \mathbf{X}(\theta, t)) dx. \quad (1c)$$

ここで  $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$  は図のような内部に埋め込まれた厚みの無視できる弾性体  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$  と流体領域  $\Omega_i (i = 0, 1)$  からなる有界領域  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Gamma$  とし、 $\Gamma$  の曲線パラメータ  $\theta \in \Theta$  を用いて  $\mathbf{F}(\theta, t)$  を弾性体のもつ駆動力密度、 $\mathbf{X}(\theta, t)$  を位置関数とする。(1b) は弾性体に Lagrange 座標系を導入し、 $\Gamma$  上でのみ起こる弾性膜の効果をデルタ関数  $\delta$  を用いて  $\Omega$  全体に働く外力  $f$  として表現することを表し、(1c) は  $\Gamma$  の変形を表している。



\*Email: sugitani@ms.u-tokyo.ac.jp

†本研究は東京大学の斎藤宣一先生との共同研究に基づく。

通常は IB formulation (1) とそれに対する数値解法を合わせて埋め込み境界法と呼び, その簡潔で柔軟なモデルは最初に心臓内の血流と弁との関係式として提唱されて以来現在ではパラシュートの落下シミュレーションなど工学の分野で広く応用されている. しかし, 数学的な研究はあまりされておらず (1) の Well-posedness などもしっかりしていないのが現状である.

本稿では  $\Gamma$  を固定して定常 Stokes 方程式に対する埋め込み境界法を考える:

$$-\nu \Delta u + \frac{1}{\rho} \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2a)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2b)$$

$$f = \int_{\Theta} \mathbf{F}(\theta) \delta_{\mathbf{X}(\theta)} d\theta. \quad (2c)$$

定常 Stokes 問題に対する埋め込み境界法の結果として [6] で  $n = 2$  の時に差分スキームがもし解が存在すればおよそ 1 次精度となることが知られている. 埋め込み境界法は近年では差分法だけでなく有限要素法などの他の数値解法への応用も提唱されており, 解の存在証明の事も踏まえると変分法的なアプローチから (2) について研究する必要がある. そこで本稿の目的は (2) の解の存在証明, (2) のデルタ関数の正則化による近似と正則化誤差, (2) と正則化問題の有限要素スキームとの最終的な誤差評価を与える事にあり, 構成は次の通りである. 第 2 節ではまず特異な外力  $f$  のクラスを明らかにし, 問題 (2) に対する弱解の定義と一意可解性について述べたのち, 第 3 節ではデルタ関数の正則化に伴う誤差について調べる.  $p < \frac{n}{n-1}$  をみたく  $p$  に対して正則化誤差が  $W^{1,p} \times L^p$  収束する事を確認する. 第 4 節では埋め込み境界有限要素法について述べる. その誤差の収束は  $p < \frac{n}{n-1}$  からエネルギーノルムでは言えないが 2 次元のときは擬似 1 次収束する. 第 5 節では誤差を  $L^2$  収束させる事ができるインターフェース問題に基づいたスキームを提案する.

## 2 定常 Stokes 方程式の埋め込み境界法の数学解析

### 2.1 IB force (2c) のクラス

まず最初に特異な外力  $f$  の数学的な取り扱いを明らかにする. 以後,  $1 \leq p \leq \infty$  の Hölder 共役指数を  $p^*$  と表す. ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$  である.)

**Lemma 2.1.**  $F \in L^1(\Theta)^n$  とし,  $\Gamma (= \mathbf{X}(\Theta))$  は Borel 集合族に含まれ, さらに  $\mathbf{X} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$  は単射であるとする. このとき  $f = \int_{\Theta} F(\theta) \delta_{\mathbf{X}(\theta)} d\theta$  は  $\Omega$  上の符号付き有限測度となり, 任意の可測関数  $\varphi$  に対してその積分  $df$  が定義される. さらに  $F \in L^p(\Theta)^n$  ( $1 \leq p < \infty$ ) であれば任意の  $\varphi \in W^{1,p^*}(\Omega)^n$  に対して次が成り立つ.

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} \varphi df = \int_{\Theta} F(\theta) \varphi(\mathbf{X}(\theta)) d\theta. \quad (3)$$

また  $f$  は  $n$  次元 Lebesgue 測度に対して特異なので  $f \notin L^1(\Omega)^n$  である.

**Lemma 2.2.** 上記の仮定に加えて  $\Gamma$  が  $C^2$  級または凸な曲線とし, さらに  $\mathbf{X}$  は正則つまり任意の  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n-1}$  について  $|J_{\mathbf{X}}(\theta)| \neq 0$  とする. ここで  $|J_{\mathbf{X}}(\theta)|$  は

$$n = 2 \text{ のとき} \quad |J_{\mathbf{X}}(\theta)| = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \right| \quad (4a)$$

$$n = 3 \text{ のとき} \quad |J_{\mathbf{X}}(\theta)| = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right| \quad (\theta = (\theta_1, \theta_2)) \quad (4b)$$

とする. このとき  $f \in W^{-1,p}(\Omega)^n$  が成り立つ.

## 2.2 Weak formulation

(2) に対する弱形式を次のように定義する:

Find  $(u, p) \in W_0^{1,p}(\Omega)^n \times L_0^p(\Omega)$  satisfying that

$$a(u, v) + b(p, v) = \langle f, v \rangle = \int_{\Theta} F(\theta) v(\mathbf{X}(\theta)) d\theta \quad (\forall v \in W_0^{1,p^*}(\Omega)^n), \quad (5a)$$

$$b(q, u) = 0 \quad (\forall q \in L^{p^*}(\Omega)). \quad (5b)$$

ここで,  $a: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は次で定義される双線形形式である.

$$a(u, v) = 2\nu \int_{\Omega} D(u) : D(v) dx, \quad D(u)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

$$b(p, u) = - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot u) dx.$$

$p = p^* = 2$  のときは標準的な方法によって弱解  $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$  の一意存在とエネルギーノルムの安定性が証明される. 同様に一般の  $p$  に対する (5) の Well-posedness は次の定理より従う.

**Theorem 2.3** (Maz'ya and Rossmann [3]).  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  上の連結で凸な有界領域とする. このとき任意の  $f \in W^{-1,p}(\Omega)^n$   $1 < p \leq 2$  に対して, 一意な解  $(u, p) \in W_0^{1,p}(\Omega)^n \times L_0^p(\Omega)$  が存在して次をみたす:

$$\|u\|_{W^{1,p}} + \|p\|_{L^p} \leq C \|f\|_{W^{-1,p}}. \quad (7)$$

ここで  $C > 0$  は  $(p, \Omega)$  のみによる定数である.

さらに,  $f \in H^{-1}(\Omega)^n \cap L^p(\Omega)^n$  ならば解  $(u, p)$  は  $W^{2,p}(\Omega)^n \times W^{1,p}(\Omega)$  に属して次をみたす:

$$\|u\|_{W^{2,p}} + \|p\|_{W^{1,p}} \leq C \|f\|_{L^p}. \quad (8)$$

これより  $1 < p \leq 2$  で  $\Omega$  が多角形のとときに (5) の一意可解性が成り立つ. しかし  $\Omega$  は有界で  $f \notin L^1(\Omega)$  である事から  $(u, p) \notin W^{2,p}(\Omega)^n \times W^{1,p}(\Omega)$  となり滑らかな解は得られない.

## 3 (2) の正則化と正則化誤差

埋め込み境界法はデルタ関数  $\delta$  を用いて定式化される為に, それを数値的に解く際は正則化デルタ関数  $\delta^\varepsilon$  が導入される ( $\varepsilon$  は正則化パラメータである).

### 3.1 正則化問題と誤差

正則化デルタ関数  $\delta^\varepsilon$  を用いて  $f$  を  $f^\varepsilon = \int_{\Theta} F(\theta) \delta_{X(\theta)}^\varepsilon d\theta$  で置き換えた問題

$$-\nu \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\rho} \nabla p^\varepsilon = f^\varepsilon, \quad \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (9a)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (9b)$$

$$f^\varepsilon = \int_{\Theta} \mathbf{F}(\theta) \delta_{X(\theta)}^\varepsilon d\theta. \quad (9c)$$

について考える. 定理 2.3 より問題 (9) の弱解の一意可解性も保障され, さらに  $f^\varepsilon \in H^{-1} \cap L^p$  となるようにデルタ関数を正則化すれば滑らかな解  $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in W^{2,p}(\Omega)^n \times W^{1,p}$  が得られ次をみます:

$$\|u^\varepsilon\|_{W^{2,p}} + \|p^\varepsilon\|_{W^{1,p}} \leq C \|f^\varepsilon\|_{L^p}. \quad (10)$$

問題 (9) を有限要素法によって数値的に解いた解を  $(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)$  とおくと最終的な誤差は正則化誤差を離散化誤差に分けて考える事ができる.

$$\|u - u_h^\varepsilon\| \leq \underbrace{\|u - u^\varepsilon\|}_{\text{正則化誤差}} + \underbrace{\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|}_{\text{離散化誤差}} \quad (11)$$

### 3.2 正則化誤差評価

定理 2.3 より正則化誤差は次のように評価される.

**Corollary 3.1.**  $\varepsilon$  によらない定数  $C > 0$  が存在して次をみます:

$$\|u - u^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|p - p^\varepsilon\|_{L^p} \leq C \|f - f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}}. \quad (12)$$

**Theorem 3.2.** 補題 2.2 の仮定のもとで,  $\text{supp } \delta_0^\varepsilon$  が局所的かつ  $\text{dist}(\Gamma, \partial\Omega) > 0$  とする. このとき  $p < n$  ならば  $\varepsilon$  によらない定数  $C > 0$  が存在して次をみます:

$$\|f - f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}} \leq C \left[ \left| 1 - \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0^\varepsilon(y) dy \right| + \|y|\delta_0^\varepsilon(y)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right]. \quad (13)$$

*Proof.* 試験関数  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  の Taylor 展開

$$\varphi(x) = \varphi(X(\theta)) + (x - X(\theta)) \cdot \int_0^1 \nabla \varphi(t(x - X(\theta)) + X(\theta)) dt$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
 \langle f - f^\varepsilon, \varphi \rangle &= \int_{\Theta} F(\theta) \varphi(X(\theta)) \, d\theta - \int_{\Omega} \left[ \int_{\Theta} F(\theta) \delta_{X(\theta)}^\varepsilon(x) \, d\theta \right] \varphi(x) \, dx \\
 &= \int_{\Theta} F(\theta) \varphi(X(\theta)) \left[ 1 - \int_{\Omega} \delta_{X(\theta)}^\varepsilon(x) \, dx \right] \, d\theta \\
 &\quad - \int_0^1 \int_{\Theta} F(\theta) \int_{\Omega} \delta_{X(\theta)}^\varepsilon(x) (x - X(\theta)) \cdot \nabla \varphi(t(x - X(\theta)) + X(\theta)) \, dx d\theta dt \\
 &\leq \frac{\|F\|_{L^p}}{\|J_X\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p^*}}} \left| 1 - \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0^\varepsilon(y) \, dy \right| \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Gamma)} \\
 &\quad + \int_0^1 \int_{\Theta} F(\theta) \|\delta_{X(\theta)}^\varepsilon(x) (x - X(\theta))\|_{L^p(\Omega)} \|\nabla \varphi(t(x - X(\theta)) + X(\theta))\|_{L^{p^*}(\Omega)} \, d\theta dt \\
 &\leq \frac{\|F\|_{L^p}}{\|J_X\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p^*}}} \left| 1 - \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0^\varepsilon(y) \, dy \right| \|\varphi\|_{W^{1,p^*}} \\
 &\quad + \|F\|_{L^1} \|y\|_{L^p} \|\delta_0^\varepsilon(y)\|_{L^p} \int_0^1 t^{\frac{-n}{p^*}} \|\varphi\|_{W^{1,p^*}} \, dt
 \end{aligned}$$

□

### 3.3 正則化デルタ関数と誤差のオーダー

埋め込み境界法で使われる正則化デルタ関数は、各軸方向にそれぞれ近似する

$$\delta_0^\varepsilon(\vec{x}) = \frac{C_n}{\varepsilon^n} \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right), \quad C_n = \left[ \int_{\mathbb{R}} \phi(s) \, ds \right]^{-1} \quad (14)$$

がよく用いられる。あるいは等方的な近似として  $r = |x|$  に対し

$$\delta_0^\varepsilon(x) = \frac{C_n}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right), \quad C_n = \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(r) \, dx \right]^{-1} \quad (15)$$

も用いられる。ここで  $\phi$  は例えば

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \cos(\frac{\pi s}{2})) & (-2 \leq s \leq 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (16)$$

のように与えられる。(14) や (15) のもとで簡単な計算によって  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_0^\varepsilon(x) \, dx = 1$ ,  $\|y\|_{L^p} \|\delta_0^\varepsilon\|_{L^p} = O(\varepsilon^{1-n(1-\frac{1}{p})})$  が分かるので系 3.1 と定理 3.2 と組み合わせると

$$\|u - u^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|p - p^\varepsilon\|_{L^p} \leq C\varepsilon^{1-n(1-\frac{1}{p})} \quad (17)$$

を得る。よって  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき  $1 < p < \frac{n}{n-1}$  なら正則化誤差は  $W^{1,p} \times L^p$  収束する。

## 4 埋め込み境界有限要素法

以下のように P1b/P1 有限要素によって空間を離散化する.

- $\mathcal{T}_h : \Omega$  の正則準一様三角形分割とする. つまり  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$  に対して

$$\exists \tau, \xi > 0 \text{ satisfying that } \tau h < h_T < \xi \rho_T, \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (18)$$

近似関数空間はそれぞれ

- $X_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega})^n \mid v_h|_{\partial\Omega} = 0 \text{ and } \forall T, v_h|_T \in [\mathcal{P}_1(T) \oplus \mathcal{B}(T)]^n\}$
- $M_h = \{q_h \in C(\bar{\Omega}) \mid \forall T, q_h|_T \in \mathcal{P}_1(T)\}$

ここで  $\mathcal{P}_k(T)$  を  $T$  上の  $k$  次多公式全体の集合,  $\mathcal{B}(T)$  を  $T$  上バブル関数とする.

これらの設定のもとで正則化問題 (9) に対する有限要素近法は次のようになる:  
Find  $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$  satisfying that

$$a(u_h, v_h) + b(p_h, v_h) = (f^\varepsilon, v_h) \quad (\forall v_h \in X_h), \quad (19a)$$

$$b(q_h, u_h) = 0 \quad (\forall q_h \in M_h), \quad (19b)$$

$$f^\varepsilon = \int_{\Theta} F(\theta) \delta_{X(\theta)}^\varepsilon(x) d\theta \quad (19c)$$

定理 4.1 のように,  $p = 2$  だけでなく一般の  $1 < p < \infty$  に対しても有限要素法は最良近似となる事が知られている [2].

**Theorem 4.1** (Girault, Nochetto, and Scott ).  $\Omega$  を凸多角形とし,  $\mathcal{T}_h$  が (18) をみたすとする.  $(u, p)$  を正則化 Stokes 問題 (9) の弱解,  $(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)$  を有限要素近似 (19) の解とする. このとき  $h, u^\varepsilon, p^\varepsilon$  によらない定数  $C > 0$  が存在して次をみたす:

$$\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|p^\varepsilon - p_h^\varepsilon\|_{L^p} \leq C \inf_{(v_h, q_h) \in X_h \times M_h} (\|u^\varepsilon - v_h\|_{W^{1,p}} + \|p^\varepsilon - q_h\|_{L^p}). \quad (20)$$

右辺の inf に Lagrange 補完などを代入して上から評価すると,

$$\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|p^\varepsilon - p_h^\varepsilon\|_{L^p} \leq Ch (\|u^\varepsilon\|_{W^{2,p}} + \|p^\varepsilon\|_{W^{1,p}}) \leq Ch \|f^\varepsilon\|_{L^p},$$

さらに  $\|f^\varepsilon\|_{L^p} \leq C \|\delta_0^\varepsilon\|_{L^p}$  かつ (14) や (15) のもとで  $\|\delta_0^\varepsilon\|_{L^p} = O(\varepsilon^{-n(1-\frac{1}{p})})$  より

$$\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|p^\varepsilon - p_h^\varepsilon\|_{L^p} \leq Ch \varepsilon^{-n(1-\frac{1}{p})} \quad (21)$$

となる.

### 4.1 埋め込み境界有限要素法の誤差評価

(17) と (21) を合わせて最終的な誤差評価は次のようになる.

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{W^{1,p}} + \|p - p_h^\varepsilon\|_{L^p} \leq C \varepsilon^{-n(1-\frac{1}{p})} (\varepsilon + h) \quad (1 < p < \frac{n}{n-1}). \quad (22)$$

また Sobolev 埋蔵定理  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  ( $1 \leq \forall q \leq \frac{np}{n-p}$ ) より

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{L^q} \leq C\varepsilon^{-n(1-\frac{1}{p})}(\varepsilon + h) \quad (1 \leq \forall q \leq \frac{np}{n-p}) \quad (23)$$

となる.  $p$  を十分小さく ( $p \approx 1$ ) とればこれは

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} < C(\varepsilon + h) \quad (1 < q < \frac{n}{n-1}) \quad (24)$$

を意味する. 特に  $n=2$  のとき  $0 < \Delta \ll 1$  として

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{L^{2-\Delta}(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-\Delta}(\varepsilon + h), \quad (25)$$

となり, 埋め込み境界有限要素法はエネルギーノルムに対して擬似 1 次精度である事が分かる.

## 5 インターフェース問題と特性関数を用いたスキーム

前節のようにデルタ関数を使って表現する IB formulation (2) に基づいている埋め込み境界法は, 一般にエネルギーノルムについての収束性は保証されない. 一方で (2) は次のようなインターフェース問題と同値である事が知られており [4], デルタ関数  $\delta$  の代わりに特性関数  $\chi$  を使ったスキームでは  $L^2$  収束させる事ができる.

$$-\nu\Delta u_i + \frac{1}{\rho}\nabla p_i = 0, \quad \nabla \cdot u_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i \quad (i = 0, 1), \quad (26a)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_i \setminus \Gamma, \quad (26b)$$

$$u_0 = u_1, \quad \tau_0 = \tau_1 + g \quad \text{on } \Gamma, \quad (26c)$$

ここで  $\tau_i$  は各  $\Omega_i$  での応力を表し  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  によってインターフェース  $\Gamma$  上でジャンプが起こっている. この問題 (26) の弱形式は次のようになる:

Find  $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  s.t.

$$a(u, v) + b(p, v) = \int_{\Gamma} g \cdot v \, d\Gamma \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)^n), \quad (27a)$$

$$b(q, u) = 0 \quad (\forall q \in L^2(\Omega)). \quad (27b)$$

$g \circ X(\theta) = F(\theta)|J_X(\theta)|$  のもとの  $\int_{\Gamma} g \cdot v|_{\Gamma} \, d\Gamma = \int_{\Theta} F(\theta) \cdot v(\mathbf{X}(\theta)) \, d\theta$  が成り立つので 2つの問題 (2) と (26) の解は超関数の意味で一致する. さらに (28) は次のようにも同値変形できる事が知られている [1]:

Find  $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  s.t.

$$a(u, v) + b(p, v) = -\langle \tilde{g}\nabla\chi \cdot \tilde{n}, v \rangle \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)^n), \quad (28a)$$

$$b(q, u) = 0 \quad (\forall q \in L^2(\Omega)). \quad (28b)$$

ここで  $n$  は  $\Gamma$  上単位法線ベクトル ( $\Omega_0$  から  $\Omega_1$  の向き) を表し, チルダは  $\Gamma$  上関数の  $H^1(\Omega)$  拡張とする ( $\Gamma$  が滑らかな閉曲線や閉曲面などの場合はこのような拡張が存在する).  $\chi$  は  $\Omega_0$  に対する特性関数を表す.

IB formulation (2) の代わりに formulation (28) に基づいて, デルタ関数  $\delta$  の代わりに特性関数  $\chi$  を正則化して P1b/P1 有限要素法によって解くスキームについて考える.

**Theorem 5.1.**  $(u, p)$  を (28) の解,  $(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)$  を提案スキームの解とする. このとき  $g, \Omega, \Gamma$  のみに依存して  $\varepsilon, h$  によらない定数  $C > 0$  で

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{H^1} + \|p - p_h^\varepsilon\|_{L^2} \leq C(\|\chi - \chi^\varepsilon\|_{L^2} + h\|\chi^\varepsilon\|_{H^1}), \quad (29)$$

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{L^2} \leq C(\|\chi - \chi^\varepsilon\|_{L^2} + h^2\|\chi^\varepsilon\|_{H^1}) \quad (30)$$

をみたすものが存在する.

$\chi^\varepsilon$  の選び方として例えば法線方向に対する折れ線近似

$$\chi^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \Omega_0) \\ \max\{0, 1 - \frac{\text{dist}(x, \Gamma)}{\varepsilon}\} & (x \notin \Omega_0). \end{cases} \quad (31)$$

とすれば

$$\|\chi - \chi^\varepsilon\|_{H^{-1}} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad \|\chi^\varepsilon\|_{H^1} \leq C\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (32)$$

とできるので誤差評価を最大にするパラメータの関係はそれぞれ次のようになる:

$$\varepsilon \approx h \quad \text{のとき} \quad \|u - u_h^\varepsilon\|_{H^1} + \|p - p_h^\varepsilon\|_{L^2} \leq Ch^{\frac{1}{2}}, \quad (33)$$

$$\varepsilon \approx h^2 \quad \text{のとき} \quad \|u - u_h^\varepsilon\|_{L^2} \leq Ch, \quad (34)$$

## 6 数値実験

最後に, 数値実験によってそれぞれの理論結果を検証する.  $\Omega = (-1, 1)^2, \Gamma = \{(x, y) = \mathbf{X}(\theta) = 0.5(\cos \theta, \sin \theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$  として, 次のような Stokes インターフェース問題を考える.

$$-\Delta u_i + \nabla p_i = 0, \quad \nabla \cdot u_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i \quad (i = 0, 1), \quad (35a)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_i \setminus \Gamma, \quad (35b)$$

$$u_0 = u_1, \quad \tau_0 = \tau_1 + n \quad \text{on } \Gamma, \quad (35c)$$

この問題を, 埋め込み境界法による定式化に書き直すと次のようになる.

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (36a)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (36b)$$

$$f = \int_{\Theta} n(\theta) \delta_{\mathbf{X}(\theta)} d\theta, \quad n(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta). \quad (36c)$$



特性関数による定式化の場合は  $f$  を

$$f = -\tilde{n}(\nabla\chi \cdot \tilde{n}), \quad \tilde{n} = (x/r, y/r) \quad (37)$$

で置き換えれば良い. これらの問題を一様メッシュ分割による P1b/P1 有限要素法によって数値的に解く. デルタ関数および特性関数の近似にはそれぞれ (16), (31) を用い,  $\varepsilon = h$  とする. 誤差は十分細かいメッシュの時の数値解を厳密解とみなして計る事とする. 計算結果を Figure. 1 と Table. 1-2 にまとめる.

Table. 1-2 を見ると, いずれの場合も理論結果を肯定する収束性が得られている. 流速と圧力の  $H^1 \times L^2$  誤差に関しては, 埋め込み境界法による定式化では理論的な誤差評価は得られていないが, 実験的にはおよそ 1/2 次精度で収束しているのが確認できる. いずれの場合も従来の有限要素法の 1 次精度よりも低い結果が得られているのは, 外力項の正則化によるロスが表れているからである. 流速の  $L^2$  誤差はいずれも場合もおおよそ  $O(h^{\frac{3}{2}})$  で収束しているが, これは理論結果  $O(h)$  よりも良い精度となっている. 理論では特性関数のスキームでは  $\varepsilon = h$  で  $O(h^{\frac{1}{2}})$ ,  $\varepsilon = h^2$  では  $O(h)$  の結果が得られていたが, 数値的には  $\varepsilon$  がどちらの場合も  $O(h^{\frac{3}{2}})$  となる. 数値実験の結果から, 理論面のさらなる改善の可能性が期待される.

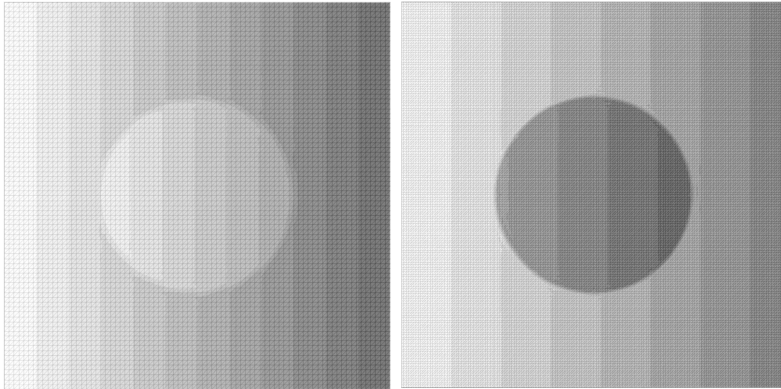


Figure 1: 圧力解  $p_h^\varepsilon$  の分布. 埋め込み境界法のスキーム (左) と特性関数によるスキーム (右) とともに  $\Gamma$  で不連続になっているのが確認できる.

$h$	$\ u - u_h^\varepsilon\ _{L^2}$	order	$\ u - u_h^\varepsilon\ _{H^1}$	order	$\ p - p_h^\varepsilon\ _{L^2}$	order
0.1414	8.782e-09	—	1.986e-05	—	5.358e-4	—
0.0707	1.039e-09	1.539	1.029e-05	0.474	1.765e-4	0.800
0.0353	1.053e-10	1.651	5.333e-06	0.474	2.257e-05	1.483

Table 1: 埋め込み境界法によるスキームの収束オーダー

$h$	$\ u - u_h^\varepsilon\ _{L^2}$	order	$\ u - u_h^\varepsilon\ _{H^1}$	order	$\ p - p_h^\varepsilon\ _{L^2}$	order
0.1414	1.422e-03	—	3.162e-2	—	0.2466	—
0.0707	5.056e-04	1.492	1.746e-2	0.856	0.1706	0.531
0.0353	1.462e-04	1.790	9.271e-3	0.913	0.0935	0.867

Table 2: 特性関数によるスキームの収束オーダー

## References

- [1] H. Fujita, H. Kawahara, H. Kawarada, Distribution theoretic approach to fictitious domain method for Neumann problems. East-West J. Numer. Math. 3 (1995), no. 2, 111-126.
- [2] Girault, V.; Nchetto, R. H.; Scott, L. R. Max-norm estimates for Stokes and Navier-Stokes approximations in convex polyhedra. Numer. Math. 131 (2015), no. 4, 771822.
- [3] Maz'ya, V.; Rossmann, J.  $L_p$  estimates of solutions to mixed boundary value problems for the Stokes system in polyhedral domains. Math. Nachr. 280 (2007), no. 7, 751793.
- [4] Lai, Ming-Chih; Li, Zhilin A remark on jump conditions for the three-dimensional Navier-Stokes equations involving an immersed moving membrane. Appl. Math. Lett. 14 (2001), no. 2, 149154. 76D05 (76M25)
- [5] C. S. Peskin, The immersed boundary method. Acta Numer. 11 (2002), 479517.
- [6] L. Zhilin: On convergence of the immersed boundary method for elliptic interface problems, Mathematics of Computations, Vol. 84, Num. 293, 1169-1188 (2015)