数理解析研究所講究録
第2037巻 2017年 141-144

Oseen 問題のための有限要素スキームの粘性係数依存性に注目した誤差評価

Error estimates of finite element schemes for the Oseen problem focused on dependency on the viscosity

内海 晋弥
早稲田大学大学院基幹理工学研究科, su48@fuji.waseda.jp

Shinya Uchiumi
Graduate School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

非圧縮粘性流体の運動を記述する Navier–Stokes 方程式の移流項を線形化した Oseen 方程式に対する数値計算スキームを考える．特に粘性係数が小さい場合，すなわち，高レイノルズ数の場合を考察する．このような状況で安定で高精度な計算を行うためには，物質微分項の近似方法の選択が重要な課題であることが知られている．特性曲線の方法と有限要素法を結合させた Lagrange–Galerkin 法（特性曲線有限要素法）はそのような問題に対する有効な手法の一つである [5, 6, 8, 9].

一方で，より単純な定常 Stokes 問題にも粘性係数依存性が現れる．その依存性の改善方法の一つは grad-div 安定化項の付加である．grad-div 安定化項は Glowinski ら [4] によって導入され，定常 Stokes 問題に対しては Olshanskii–Reusken [7] によって，非定常 Oseen 問題に対しては de Frutos ら [3] によってその粘性係数依存性に対する効果が解析された．[3, 7] では Galerkin 近似を用いたスキームが考察されている．一方で，非定常 Oseen 問題において，$\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 要素を用い，適切な安定化項を加えたスキームは，$\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_{k-1}$ 要素を用いたスキームと比較して，粘性係数依存性が改善できることも示されている．本報告では，これら 2 つの結果を紹介する．

2 Oseen 問題のための Lagrange–Galerkin スキーム

$(u,p):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ を未知関数とする Oseen 問題：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+(w\cdot\nabla)u-\nu\Delta u+\nabla p=f,&\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
\nabla\cdot u=0,&\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
u=0,&\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\
u(\cdot,0)=u^0,&\quad x\in\Omega
\end{aligned}
\tag{Os}
$$

を考える．ここに，$\Omega\subset\mathbb{R}^d, d=2,3$ は多角形または多面体領域，$T>0$, $0<\nu\le 1$ はそれぞれ時刻，粘性係数を表す定数，$w,f:\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^d$, $u^0:\Omega\to\mathbb{R}^d$ は与えられた関数である．$\partial\Omega$ は Ω の境界を表す．

$\Delta t>0$ を時間刻みとする．$t^n\equiv n\Delta t$, $u^n(x)\equiv u(x,n\Delta t)$ とし，f^n なども同様に定める．流速場 $w^*:\Omega\to\mathbb{R}^d$ に対して写像 $X_1(w^*)$ を $X_1(w^*)(x)\equiv x-w^*(x)\Delta t$ で定める．このとき

$$
\frac{\partial u^n}{\partial t}+(w^n\cdot\nabla)u^n=\frac{u^n-u^{n-1}\circ X_1(w^{n-1})}{\Delta t}+O(\Delta t)
$$

が成り立つ．ここで $\circ$ は関数の合成を表す．$N_T \equiv [T/\Delta t]$ を総時間ステップ数とする．

$\{\mathcal{T}_h\}_h$ を一様正則な三角形（四面体）分割列とする．$V_h^k \times Q_h^l \subset H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ を流速，圧力に対応する $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_l$ 有限要素空間とする．ここで $(k,l)=(k,k-1), k \geq 2$ または $(k,l)=(k,k), k\geq 1$ とする．$\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_{k-1}$ 要素は inf-sup 条件を満たすが，$\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 要素はそれを満たさないので圧力安定化項を必要とする．双一次形式 a, b を

$$a(u,v) \equiv \nu(\nabla u, \nabla v), \quad b(v,q) \equiv -(\nabla\cdot v, q)$$

で定める．ここで $(\cdot,\cdot)$ は $L^2(\Omega), L^2(\Omega)^d$ または $L^2(\Omega)^{d\times d}$ の内積である．

以下，$\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_{k-1}$ $(k\geq 2)$ 要素に grad-div 安定化項を加えたスキームと $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ $(k \geq 1)$ 要素に圧力安定化項を加えたスキームを述べる．スキームの初期値 u_h^0 を定常 Stokes 問題

$$\begin{aligned}(\nabla u_h^0, \nabla v_h) - (\nabla\cdot v_h, r_h) &= (\nabla u^0, \nabla v_h), && \forall v_h \in V_h^k,\\ -(\nabla\cdot u_h^0, q_h) &= 0, && \forall q_h \in Q_h^{k-1}\end{aligned}$$

の解 $(u_h^0, r_h) \in V_h^k \times Q_h^{k-1}$ の第一成分とする．

d を grad-div 安定化項

$$d(u,v) \equiv \delta_1(\nabla\cdot u, \nabla\cdot v),\ \delta_1 > 0$$

とする．

スキーム 1. 次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h^k \times Q_h^{k-1}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}\circ X_1(w^{n-1})}{\Delta t}, v_h\right) + a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) + d(u_h^n, v_h) &= (f^n, v_h),\ && \forall v_h \in V_h^k,\\ b(u_h^n, q_h) &= 0, && \forall q_h \in Q_h^{k-1}.\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_h$ を圧力安定化項

$$\mathcal{C}_h(p,q) \equiv \delta_0 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{2k} \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha p, D^\alpha q)_K,\ \delta_0 > 0$$

とする．ここに，h_K は要素 K の直径であり，$(\cdot,\cdot)_K$ は K における L^2 内積である．この項は Burman [2] によって導入されている．$\mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1$ 要素に対する Brezzi–Pitkäranta [1] の安定化項の高次要素への拡張である．

スキーム 2. 次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h^k \times Q_h^k$ を求めよ．

$$\begin{aligned}\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}\circ X_1(w^{n-1})}{\Delta t}, v_h\right) + a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) &= (f^n, v_h), && \forall v_h \in V_h^k,\\ b(u_h^n, q_h) - \mathcal{C}_h(p_h^n, q_h) &= 0, && \forall q_h \in Q_h^k.\end{aligned}$$

注意． 1. $k=1$ のとき，スキーム 2 は Notsu–Tabata [5] により作成と解析が行われている．下では，粘性係数に注目した新しい誤差評価を示す．

2. これらのスキームから生じる連立一次方程式の係数行列は対称である．

3. 本稿では $(u_h^{n-1}\circ X_1(w^{n-1}), v_h)$ が厳密に計算されたものとして以下の誤差評価を述べる．一般にはこの計算を厳密に行うことは困難である．元の流速場 w の代わりに局所線形化流速場 $\Pi_h^{(1)} w$ を使うことにより $(u_h^{n-1}\circ X_1(\Pi_h^{(1)} w^{n-1}), v_h)$ は厳密に積分することができる [8, 9]．ここに $\Pi_h^{(1)}$ は P_1 有限要素空間への補間作用素である．

3 粘性係数依存性に注目した誤差評価

定理. u_h をスキーム 1 または 2 の解とし，(Os) の解 (u,p) は十分滑らかとする．流速場 w は $w \in C([0,T]; W_0^{1,\infty}(\Omega)^d)$ を満たすとし，$\Delta t |w|_{C([0,T];W^{1,\infty}(\Omega)^d)} \le 1/4$ とする．このとき $\nu, h, \Delta t$ に依存しない正定数 c が存在して

$$\|u-u_h\|_{\ell^\infty(L^2)}, \sqrt{\nu}\,\|\nabla(u-u_h)\|_{\ell^2(L^2)} \le c(\Delta t + h^k) \tag{1}$$

が成立する．ここに，$\psi = \{\psi^n\}_{n=0}^{N_T}$ に対して，

$$\|\psi\|_{\ell^\infty(L^2)} \equiv \max\{\|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}; n=0,\ldots,N_T\}, \quad \|\psi\|_{\ell^2(L^2)} \equiv \left(\Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

である．

注意. 1. 定数 c は厳密解 u,p に依存する．

2. スキーム 1 で $\delta_1 = 0$ のとき，すなわち，grad-div 安定化項を加えないときの収束次数は (1) と同じであるが，定数 c が ν に依存する．

証明のポイント スキーム 1 についての証明は，de Frutos ら [3] の方法と，Lagrange–Galerkin スキームの誤差評価の方法（例えば [9]）を組み合わせて行う．

スキーム 2 についての証明では，$v_h \in V_h^k$ に対して

$$b(v_h, p^n - \hat{p}_h^n) = -(\nabla\cdot v_h, p^n - \hat{p}_h^n) = (v_h, \nabla(p^n - \hat{p}_h^n)) \le \|v_h\|_{L^2}\,\|\nabla(p^n - \hat{p}_h^n)\|_{L^2}$$

の評価が必要になる．ここで，$\hat{p}_h^n$ は p^n の補間を積分平均が 0 になるように調整したものを表す．上式では，微分を v_h から $p^n - \hat{p}_h^n$ に移していることに注意したい．Q_h^k の近似能力を使い $\|\nabla(p^n - \hat{p}_h^n)\|_{L^2}$ を k 乗のオーダーで評価する．

4 おわりに

本稿では非定常 Oseen 問題に対する 2 つの有限要素スキームを導入し，その粘性係数依存性に注目した誤差評価を述べた．

ここでは述べなかったが，2 次元領域において創生解から設定された問題の数値計算結果も，$k=2$ のとき得ていて，誤差を比較している．すなわち，$\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1$ 要素を用いたときと，そこに grad-div 安定化項を加えたスキーム 1 の結果を比較し，$\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1$ 要素と $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_2$ 安定化法を用いたスキーム 2 の結果を比較している．粘性係数 ν が 10^{-4} 程度に小さい場合，いずれのスキームも単純な $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1$ 要素より誤差が小さい．

上では $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_{k-1}$ 要素（$k \ge 2$）と $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 安定化法を比較したが，前者と $\mathrm{P}_{k-1}/\mathrm{P}_{k-1}$ 安定化法との比較も興味深い課題である．

Navier–Stokes 問題，すなわち (Os) において $w=u$ とした問題に対応するスキームの誤差評価は，非線形性から生じる難しさがあるため，課題として残っている．創生解問題における数値実験では，Oseen 問題のそれと同程度の誤差であった．

参考文献

[1] F. Brezzi and J. Pitkäranta. On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations. In W. Hackbusch, editor, *Efficient solutions of Elliptic Systems*, pages 11–19. Vieweg, 1984.

[2] E. Burman. Pressure projection stabilizations for Galerkin approximations of Stokes' and Darcy's problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1):127–143, 2008.

[3] J. de Frutos, B. García-Archilla, V. John, and J. Novo. Grad-div stabilization for the evolutionary Oseen problem with inf-sup stable finite elements. *Journal of Scientific Computing*, 66(3):991–1024, 2016.

[4] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. Studies in Applied and Numerical Mathematics. SIAM, 1989.

[5] H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations. *Journal of Scientific Computing*, 65(3):940–955, 2015.

[6] H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50(2):361–380, 2016.

[7] M. A. Olshanskii and A. Reusken. Grad-div stablilization for Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 73:1699–1718, 2004.

[8] M. Tabata and S. Uchiumi. A genuinely stable Lagrange–Galerkin scheme for convection-diffusion problems. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 33(1):121–143, 2016.

[9] M. Tabata and S. Uchiumi. An exactly computable Lagrange–Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations and its error estimates. *Mathematics of Computation*, to appear.