数理解析研究所講究録
第2039巻 2017年 106-111

Gelfand pairs and determinants

水川 裕司 (Hiroshi Mizukawa*)

防衛大学校 総合教育学群 数学教育室

Department of Mathematics, National Defense Academy

mzh@nda.ac.jp

概要

ツイストされた帯球関数を行列の固有値として捉え，その一つの応用としてシューアの Q-関数の組合せ論的な定義を与える.

1 有限群のねじれゲルファントペア

有限群 G とその部分群 H を考える. φ を（必ずしも恒等表現とは限らない）H の一次元表現とする.

Definition 1.1. 三組 (G,H,φ) がねじれゲルファントペアとは $\varphi\uparrow_H^G$ が G の表現として無重複なことである.

さて，以下では (G,H,φ) をねじれゲルファントペアとして

$$\varphi\uparrow_H^G\sim\bigoplus_{i=1}^{s}V_i$$

と既約分解しているとしよう. さらにいま有限群の表現を考えているので各既約成分には G-不変な内積が存在しているとしよう. すると各既約成分 V_i には定数倍を除いて一意的に長さ1の φ-相対不変元が取れるが，それを $v_0^{(i)}$ と書こう. このとき

$$\omega_i(x)=\langle v_0^{(i)},xv_0^{(i)}\rangle\ (x\in G)$$

*This work was supported by KAKENHI 15K04802

で定義される G 上の関数を φ-球関数と言う．ただし，$\langle , \rangle$ はその上の G-不変な内積である．これは φ で捩じられた，という意味で帯球関数の一般化である．なお，

$$\omega_\iota(hxk) = \varphi(h^{-1}k^{-1})\omega_i(x) \ (h, k \in H)$$

であることを注意しておく．

次に

$$H(G, H, \varphi) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f(hxk) = \varphi(h^{-1}k^{-1})f(x)\}$$

とおいて，これを (G, H, φ) のヘッケ環という．すぐに分かるように φ-球関数はヘッケ環の元である．ヘッケ環は畳み込み積

$$(f * g)(x) = \sum_{yz=x} f(y)f(z)$$

によって $\mathbb{C}$-代数の構造を持つ．このとき次は基本的である．

Proposition 1.2. (G, H, φ) がねじれゲルファントペアなこととそのヘッケ環が可換なことは同値である．

さらにヘッケ環の次元について次が言える．

Proposition 1.3. $\dim H(G, H, \varphi)$ は両側剰余類の元 $D \in H\backslash G/H$ で任意の $x \in D$ が $hxk = x$ なら $\varphi(hk) = 1$ を満たすものの個数に等しい．

2 (G, H, φ)-行列

記号は前節のままとする．いま f を代数 A 上に値を取る G 上の関数で

$$f(hxk) = \varphi(hk)^{-1}f(x) \ (h, k \in H)$$

を満たすものとする．そして $\{g_1, \ldots, g_r\}$ を G/H の一つの完全代表系として固定する．

Definition 2.1. $|G/H|$ 次の正方行列

$$\Theta(G, H, \varphi; f) = (f(g_\iota^{-1}g_j))_{1\leq i,j\leq r}$$

を $(G, H, \varphi; f)$-行列と呼ぶ．

$\Theta(G, H, \varphi; f)$ は次の性質をもつ．

Theorem 2.2. (1) $\Theta(G,H,\varphi)$ の固有値は

$$S_{\omega_j}=\sum_{i=1}^{r}\overline{\omega_j(g_i)}f(g_i)$$

で与えられる.

(2) S_ω の重複度は $d_j=\dim V_j$ である.

(3) $f(x)=\frac{|H|}{|G|}\sum_{j=1}^{r}d_j\omega_j(x)S_{\omega_j}$.

ここで，f を $x\in G$ ずらす変換 $f\mapsto f_x$ を

$$f_x(z)=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}f(zhx)\varphi(h)$$

と定義する．このとき次が成り立つ.

Proposition 2.3. (1) $f_x(e)=f(x)$.

(2) $f_x(hxk)=\overline{\varphi(hk)}f_x(z)$.

3 Schur の Q-関数

シューアの Q-関数の捉え方は色々あるが，ここではねじれゲルファントペアを用いた方法を考える.

3.1 ねじれゲルファントペア (S_{2n},H_n,φ)

$2n$ 次の対称群 $S_{2n}=\langle(i,i+1)\mid 1\le i\le 2n-1\rangle$ とその部分群

$$H_n=\langle(2i-1,2i),(2j-1,2j+1)(2j,2j+2)\mid 1\le i\le n,\ 1\le j\le n-1\rangle$$

を考える．また $S_n=\langle(2j-1,2j+1)(2j,2j+2)\mid\ 1\le j\le n-1\rangle$ と書いてしまうことにする（この S_n は $\{\{2i-1,2i\}\mid 1\le i\le n\}$ 上の対称群と考えられるから）.

次の定理が成り立つ.

Theorem 3.1. 任意の H_n の一次表現 φ に対して (S_{2n},H_n,φ) はねじれゲルファントペアである.

また，H_n の一次表現は次の 4 つで尽くされる

(Id) 恒等表現.

(γ) S_{2n} の符号表現の制限.

(δ) $\delta((2i-1,2i)) = 1$ と $\delta((2j-1,2j+1)(2j,2j+2)) = -1$ により定義されるもの.

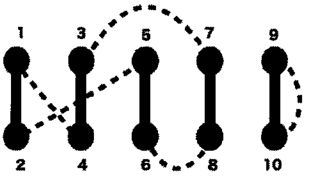
$(\gamma \otimes \delta)$ γ と δ のテンソル表現.

次に両側剰余類 $H_n \backslash S_{2n} / H_n$ の記述を説明しよう.
$w \in S_n$ に対してグラフ $\Gamma(w) = (V(w), E(w))$ を次のように対応させる.

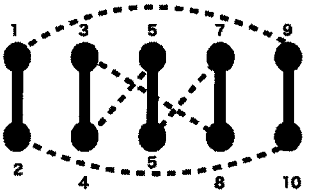
(1) $V(w) = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) $E(w) = \{\{2i-1, 2i\}, \{w(2i-1), w(2i)\} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Example 3.2. $(2,7,5,4,8)(1,3,6)(9,10) \in S_{10}$ に対してグラフを書くと次のようになる：



また，$(1,2,10,9)(3,4,5,6,7,8) \in S_{10}$



では次のようになる.

このようにして得られた $\Gamma(w)$ において各連結成分は偶数個の辺を含むサイクルになることが簡単にわかるが，各サイクルの長さの半分を大きい順に並べて得られる n の分割（$|E(w)| = 2n$ なので n の $t(w)$ は分割になる）を $t(w)$ と書いて w の型と呼ぶことにする.

Example 3.3. 先程の例だと $t((2,7,5,4,8)(1,3,6)(9,10)) = (4,1)$ と $t((1,2,10,9)(3,4,5,6,7,8)) = (3,2)$ である.

この型は両側剰余類を決定する：

Theorem 3.4 ([1]). $w \in H_n v H_n \Leftrightarrow \Gamma(w) \cong \Gamma(v)$.

また，次も知られている.

Theorem 3.5 ([1]).

$$Id \uparrow_H^G \sim \bigoplus_{\lambda \vdash n} S^{2\lambda}.$$

ここで，$S^{2\lambda}$ は分割 2λ に対応する Specht 加群である.

これらのもと，次の定理が成り立つことも知られている.

Theorem 3.6 ([2]). $\Theta(S_{2n}, H_n, Id)$ の固有値は zonal polynomial で与えれれる.

では上の定理のねじれ版はどのように与えられるのであろうか，次節ではその事を考える.

3.2 ねじれ版

Definition 3.7. $\psi : S_{2n} \to S_{2n}$ を次のように定義する：$w \in S_{2n}$ のグラフ $\Gamma(w)$ の各サイクルにおける最小の頂点 $2i-1$ から $2i$ に向かってスタートし，サイクルを一周するするとき，各頂点を通った順に記録する．そのようにして得られた列を巡回置換と考え，それらをすべてかけたものを $\psi(w)$ と置く.

Example 3.8. $w_1 = (1347)(68)$ なら，$\psi(w_1) = (12346587)$ である．$w_2 = (15632487)$ なら，$\psi(w_2) = (1287)(3456)$ である.

ψ によって次の事がわかる.

Proposition 3.9. (1) $w \in \psi(w)H_n$.

(2) $\psi(S_{2n})$ が S_{2n}/H_n の完全代表系を与える.

Definition 3.10. S_{2n} 上の関数 f を $\begin{cases} f(hwk) = \overline{\delta(hk)} f(w) \\ f(\psi(w)) = 2^{\ell(t(\psi(w)))} p_{t(\psi(w))} \end{cases}$ で定義する.

ただし p_r はべき和対称関数.

この f は次を満たす.

Proposition 3.11.

$$f(w) = \delta(\psi(w)^{-1}w)f(\psi(w))$$

さて，以上の準備のもと次のような行列を考える：

$$\Theta_{(S_{2n},H_n,\delta};f) = (f(x^{-1}y))_{x,y\in\psi(S_{2n})}.$$

この $\Theta_{(S_{2n},H_n,\delta};f)$ に関して Stembridge による $\delta\uparrow_{H_n}^{S_{2n}}$ の既約分解と帯球関数の表示（[3]）を合わせることで次のことがわかった．

Theorem 3.12. $\Theta_{(S_{2n},H_n,\delta};f)$ の固有値は *Schur* の Q-関数を用いて $\{h'_\lambda Q_\lambda \mid \lambda \in SP_n\}$ で与えられる．ここで，SP_n は n の strict な分割全体を表し，h'_λ は bar hook length の積である．

Acknowledgements

発表の機会を与えて頂いた研究代表者である山田裕史先生に感謝いたします．

参考文献

[1] A.T.James, *"Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices"*, Annals of Math. vol.74,pp.475-501,1961

[2] I.G.Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomils 2nd.ed.*, Oxford Science Pub, 1995.

[3] J.R.Stembridge, *"On Schur's Q-functions and the primitive idempotents of a commutative Hecke algebra"*, J.Alg.Comb.vol.1 pp.71-95 ,1992