数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 11-12

Bilinear pseudo-differential operators of type 1, 1 on Besov and Triebel-Lizorkin spaces

冨田 直人 (大阪大学)
Tomita Naohito (Osaka University)

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ を急減少関数空間とし, $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ を緩増加超関数空間とする. $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ に対する Fourier 変換を $\widehat{f}$ と書き, 逆 Fourier 変換を $\mathcal{F}^{-1}f$ で表す. $m \in \mathbf{R}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ とする. $\sigma(x,\xi,\eta) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ が双線形 Hörmander クラス $BS^m_{\rho,\delta}$ に属するとは, 任意のマルチインデックス $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{N}_0^n = \{0,1,2,\cdots\}^n$ に対し, ある定数 $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ が存在し, 任意の $x,\xi,\eta \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x,\xi,\eta)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|+|\eta|)^{m+\delta|\alpha|-\rho(|\beta|+|\gamma|)}$$

となるときに言う. ここで $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ はマルチインデックスの長さを表す. $N \in \mathbf{N}_0$ に対して

$$\|\sigma|BS^m_{\rho,\delta}\|_N := \max_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\leq N} \sup_{x,\xi,\eta\in\mathbf{R}^n} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma \sigma(x,\xi,\eta)|(1+|\xi|+|\eta|)^{-m-\delta|\alpha|+\rho(|\beta|+|\gamma|)}$$

と定義する. また, シンボル σ に関する双線形擬微分作用素 T_σ を, $f,g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$T_\sigma(f,g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbf{R}^{2n}} \sigma(x,\xi,\eta)\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)e^{ix\cdot(\xi+\eta)}d\xi d\eta \ \ (x \in \mathbf{R}^n)$$

で与える.

次に, Triebel-Lizorkin 空間の定義を確認しておく. $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ を $\operatorname{supp}\varphi_0 \subset \{\xi \in \mathbf{R}^n : |\xi| \leq 2\}$, $\varphi_0(\xi) = 1 \ \ (|\xi| \leq 1)$ となるようにとる. $\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) - \varphi_0(2\xi)$ とし, $k \geq 1$ に対して $\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$ とする. このとき $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ は 1 の分割になっている. この $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ を用いて, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ に対して Triebel-Lizorkin 空間 $F^s_{p,q}(\mathbf{R}^n)$ を

$$F^s_{p,q}(\mathbf{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) : \|f\|_{F^s_{p,q}} := \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \left(\sum_{k=0}^\infty \left| 2^{ks}\mathcal{F}^{-1}[\varphi_k \widehat{f}](x) \right|^q \right)^{p/q} dx \right\}^{1/p} < \infty \right\}$$

で定義する ($q = \infty$ のときは修正). Triebel-Lizorkin 空間の性質として, $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$ のとき, $F^s_{p,2}(\mathbf{R}^n)$ は Sobolev 空間 $H^s_p(\mathbf{R}^n)$ と一致し ([4, Theorem 2.5.5]), $0 < p < \infty$ のとき, $F^0_{p,2}(\mathbf{R}^n)$ は local Hardy 空間 $h^p(\mathbf{R}^n)$ と一致することが知られている ([4, Theorem 2.5.8/1]). また, $h^p(\mathbf{R}^n)$ は $1 < p \leq \infty$ のとき, $L^p(\mathbf{R}^n)$ と一致することに注意しておく.

本研究では, $\rho = \delta = 1$ の場合について考察する. $A \lesssim B$ は $A \leq CB$ となる, 与えられたパラメータのみに依存し, 関数やシンボルには依らない定数 $C > 0$ が存在することを意味し, さらに $A \lesssim B$ かつ $B \lesssim A$ のとき, $A \approx B$ と書くことにする. Bényi-Torres [1] は, $\sigma \in BS^0_{1,1}$ のとき, $1 < p_1, p_2, p < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$, $s > 0$ に対してある $N \in \mathbf{N}$ が存在し

$$\|T_\sigma(f,g)\|_{H^s_p} \lesssim \|\sigma|BS^0_{1,1}\|_N \left(\|f\|_{H^s_{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{H^s_{p_2}} \right) \tag{1}$$

が成り立つことが示されている. $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ に対して

$$\tau_{p,q} = \begin{cases} n\left(\frac{1}{\min(p,q,1)} - 1\right) & (q < \infty), \\ \frac{n}{p} & (q = \infty) \end{cases}$$

と定める．一方，Naibo [3] が (1) に関連した次の不等式を証明している: $\sigma \in BS^0_{1,1}$ のとき，$0 < p_1, p_2, p < \infty$，$1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$，$0 < q \le \infty$，$s > \tau_{p,q}$ に対して

$$\|T_\sigma(f,g)\|_{F^s_{p,q}} \lesssim \|\sigma|BS^0_{1,1}\|_N \left(\|f\|_{F^s_{p_1,q}}\|g\|_{F^0_{p_2,1}} + \|f\|_{F^0_{p_1,1}}\|g\|_{F^s_{p_2,q}}\right) \tag{2}$$

が成り立つ．しかし，$1 < p_1, p_2 < \infty$ に対して $F^0_{p_i,1}(\mathbf{R}^n) \hookrightarrow F^0_{p_i,2}(\mathbf{R}^n) = L^{p_i}(\mathbf{R}^n)$，$i = 1, 2$，の関係から，(2) は (1) の一般化にはなっていない．我々の主結果は (1) の一般化であり，(2) の改良となっている次の定理である．

定理 1 ([2, Theorem 1.1])**.** $m \in \mathbf{R}$，$0 < p_1, \widetilde{p_2}, p < \infty$，$0 < p_2, \widetilde{p_1} \le \infty$ は $1/p_1 + 1/p_2 = 1/\widetilde{p_1} + 1/\widetilde{p_2} = 1/p$ を満たし，$0 < q \le \infty$，$s > \tau_{p,q}$ とする．このとき，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して，任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ と任意の $\sigma \in BS^m_{1,1}$ に対して

$$\|T_\sigma(f,g)\|_{F^s_{p,q}} \lesssim \|\sigma|BS^m_{1,1}\|_N \left(\|f\|_{F^{m+s}_{p_1,q}}\|g\|_{h^{p_2}} + \|f\|_{h^{\widetilde{p_1}}}\|g\|_{F^{m+s}_{\widetilde{p_2},q}}\right)$$

が成り立つ．

$\sigma \equiv 1$ に対して $T_\sigma(f,g) = fg$ であることと，$f \in F^s_{p,2}(\mathbf{R}^n)$ に対して $\|f\|_{F^s_{p,2}} \approx \|(I-\Delta)^{s/2}f\|_{F^0_{p,2}} \approx \|(I-\Delta)^{s/2}f\|_{h^p}$ が成り立つ ([4, Theorem 2.3.8]) ことから次の系を得る．

系 2 ([2, Corollary 1.2])**.** $0 < p_1, \widetilde{p_2}, p < \infty$，$0 < p_2, \widetilde{p_1} \le \infty$ は $1/p_1 + 1/p_2 = 1/\widetilde{p_1} + 1/\widetilde{p_2} = 1/p$ を満たし，$s > \max(n/p - n, 0)$ とする．このとき，任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\|(I-\Delta)^{s/2}(fg)\|_{h^p} \lesssim \|(I-\Delta)^{s/2}f\|_{h^{p_1}}\|g\|_{h^{p_2}} + \|f\|_{h^{\widetilde{p_1}}}\|(I-\Delta)^{s/2}g\|_{h^{\widetilde{p_2}}}$$

が成り立つ．

$1/2 < p < \infty$，$1 < p_1, \widetilde{p_2} < \infty$，$1 < p_2, \widetilde{p_1} \le \infty$ は $1/p_1 + 1/p_2 = 1/\widetilde{p_1} + 1/\widetilde{p_2} = 1/p$ を満たし，$s > \max(n/p - n, 0)$ とする．このとき，任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\|(I-\Delta)^{s/2}(fg)\|_{L^p} \lesssim \|(I-\Delta)^{s/2}f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}} + \|f\|_{L^{\widetilde{p_1}}}\|(I-\Delta)^{s/2}g\|_{L^{\widetilde{p_2}}} \tag{3}$$

が成り立つことが知られている．この不等式は Kato-Ponce の不等式と呼ばれており，$p \le 1$ のとき

$$\|(I-\Delta)^{s/2}(fg)\|_{L^p} \lesssim \|(I-\Delta)^{s/2}(fg)\|_{h^p}$$

が成り立つので，$p \le 1$ のときは系 2 は (3) の改良であることがわかる．

また Naibo [3] は，Besov 空間についても (2) と同様の不等式も示している．我々も [2] の中で，Besov 空間に対しての定理 1 と同様の不等式を得ている．

参考文献

[1] Bényi, Á., Torres, R.H., Symbolic calculus and the transposes of bilinear pseudodifferential operators, Comm. Partial Differential Equations 28 (2003), 1161-1181.

[2] Koezuka, K., Tomita, N., Biliner pseudo-differential operators with symbols in $BS^m_{1,1}$ on Triebel-Lizorkin spaces, J. Fourier Anal. Appl., to appear.

[3] Naibo, V., On the bilinear Hörmander classes in the scales of Triebel-Lizorkin and Besov spaces, J. Fourier Anal. Appl. 21 (2015), 1077-1104.

[4] Triebel, H., Theory of Function Spaces, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.